CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS

CHAIRE DE TRAVAUX PUBLICS ET BATIMENT

" BETON ARME "
Chapitre 6 : Flexion composée ELU-ELS

(Code CCV109)

Enseignants : F. GUILLEMARD / J. PAÏS

2007 – 2008

Sommaire

6. Calcul en flexion composée

6.1. généralités

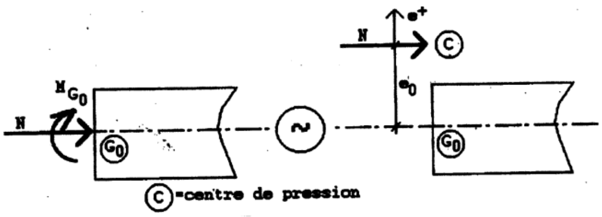
Une section est sollicitée en flexion composée à partir du moment ou elle est soumise simultanément à :

- Un effort normal noté N.
  - N sera compté positif dans le cas d'une compression.
  - N sera compté négatif dans le cas d'une traction.
- Un moment de flexion au centre de gravité (de la section de béton seule) noté Mg0.

Ce torseur (M,N) revient à appliquer un effort N au point C, appelé « centre de pression ». la distance de C au centre de gravité de la section de béton est appelé « excentricité » et est notée e0.

e0 a pour valeur :

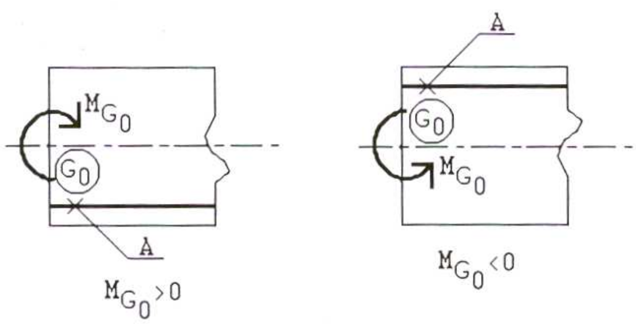
$$e_0 = \frac{M_{G0}}{N}$$



En flexion composée, la 1ère étape consiste donc la position du point C en fonction de l'excentricité

$e_0 = \frac{M_{G0}}{N}$.

Le signe de Mg0 fournit une indication sur la position des aciers tendus:



En fonction du signe de N et de la valeur de e0, on distingue plusieurs cas de figure :

- Si N est négatif (traction) et que le point C est situé entre les deux nappes d'armatures longitudinales, on est dans le cas d'une **section entièrement tendue**.
- Si N est négatif (traction) et que le point C est situé à l'extérieur des deux nappes d'armatures longitudinales, on est dans le cas d'une **section partiellement tendue**.
- Si N est positif et que le point C est situé à l'extérieur des deux nappes d'armatures longitudinales, on est dans le cas d'une **section partiellement comprimée**.
- Si N est positif (compression) et que le point C est situé entre les deux nappes d'armatures longitudinales, on est dans le cas d'une **section entièrement comprimée**.

Les conditions d'une section partiellement tendue (ou comprimée) peuvent également se traduire en comparant la position de l'axe neutre par rapport à la section de béton.

Evidemment, les cas d'une section partiellement comprimée ou partiellement tendue sont traités de la même façon, seul le signe de N change et aura tendance à majorer ou à minorer les aciers issus du dimensionnement en flexion simple.

Le cas de la section « entièrement comprimée » fait appel à un calcul basé sur des abaques ou un calcul itératif basé sur les diagrammes d'interaction.

Le moment Mg0 est issu du calcul de RDM. Pour dimensionner la section de béton, il convient de majorer les efforts en tenant compte des effets du second ordre. Sous certaines conditions, on peut déterminer les effets du second ordre de façon forfaitaire.

6.2. Prise en compte forfaitaires des effets de second ordre

La prise en compte des effets du second ordre a pour but de majorer les efforts issus du calcul RDM. Pour cela, on détermine une excentricité du second ordre.

Cette excentricité du 2nd ordre viendra se cumuler à l'excentricité du 1er ordre pour majorer les efforts en conséquence.

ATTENTION, la prise en compte forfaitaire des effets du second ordre n'est valable que dans le cas d'un dimensionnement à l'ELU.

Dans le cas d'un dimensionnement à l'ELS, seule l'excentricité M/N sera prise en compte.

Notation

- Lf: longueur de flambement de la pièce
- H: hauteur de la section droite dans le plan de flambement.
- L: longueur libre de la pièce.

Excentricité du 1er ordre.

On note:

- $e_0 = \dfrac{\sum \gamma_J M_{jG0}}{\sum \gamma_i N_i}$
- $e_a = \max \begin{cases} 2cm \\ \dfrac{l}{250} \end{cases}$ =excentricité additionnelle

L'excentricité du 1er ordre à l'ELU a pour valeur:

$$\boxed{e_1 = e_0 + e_a}$$

Excentricité du second ordre

Pour déterminer l'excentricité du second ordre, on distingue 2 cas de figure:

- Si $\frac{l_f}{h} > Max\left[15{,}20\frac{e_1}{h}\right]$, on doit vérifier la pièce à l'état limite ultime de stabilité de forme (voir chapitre correspondant).
- Si $\frac{l_f}{h} \leq Max\left[15{,}20\frac{e_1}{h}\right]$, on détermine l'excentricité du 2nd ordre de façon forfaitaire, comme détaillé ci-dessous.

L'excentricité e2 est définie par la formule:

$$\boxed{e_2 = \frac{3l_f^2}{10^4 h}\left[2 + \alpha\varphi\right]}$$

Avec:

$$\begin{cases} \varphi = 2 \\ \alpha = \dfrac{M(G + \sum \psi_{2i} Q_i)}{M(G + Q_1 + \sum \psi_{0i} Q_i)} \\ \text{Les moments sont évalués à l'ELS, sans coefficient de pondération.} \end{cases}$$

Dans le cas d'un élément soumis à des charges G et Q, le coefficient α peut s'écrire plus simplement:

$$\alpha = \frac{M_G}{M_G + M_Q}$$

Connaissant la valeur de e2, on peut déterminer les sollicitations corrigées:

$$\left| \begin{array}{l} \qquad Nu \\ Mu = (e_1 + e_2) N_U \end{array} \right.$$

6.3. Sections entièrement tendues (ELU et ELS)

6.3.1. Définition

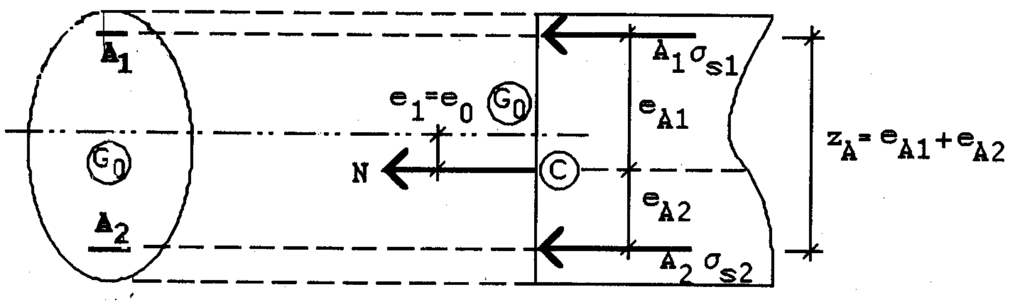
Comme nous l'avons vu précédemment, la section est considérée entièrement tendue (à l'ELU comme à l'ELS) si:

- N est une traction (N < 0).
- C tombe entre les armatures

6.3.2. Calcul des armatures

ATTENTION, dans le cas d'un dimensionnement en section entièrement tendue, il n'y a pas lieu de majorer les efforts appliqués par les excentricités ea et e2.

Le dimensionnement de la section se fait à partir du schéma suivant:



On écrit l'équilibre de la section par rapport au centre de poussée:

- Equilibre des forces: $A_1\sigma_{s1} + A_2\sigma_{s2} = N$
- Equilibre des moments: $(A_2\sigma_{s2})e_{A2} = (A_1\sigma_{s1})e_{A1}$ => $A_2\sigma_{s2} = (A_1\sigma_{s1})\dfrac{e_{A1}}{e_{A2}}$

On a donc:

- $A_1\sigma_{s1} + (A_1\sigma_{s1})\dfrac{e_{A1}}{e_{A2}} = N$
- $(A_1\sigma_{s1})e_{A2} + (A_1\sigma_{s1})e_{A1} = Ne_{A2}$
- $A_1 = \dfrac{N \times e_{A2}}{(e_{A1} + e_{A2})\sigma_{s1}}$

De l'équation d'équilibre des forces, on en déduit la valeur de A2:

- $A_2 = \dfrac{N \times e_{A1}}{(e_{A1} + e_{A2})\sigma_{s2}}$

En résumé, on a donc les sections d'aciers définies par:

$$A_1 = \frac{N \times e_{A2}}{(e_{A1} + e_{A2})\sigma_{s1}}$$

$$A_2 = \frac{N \times e_{A1}}{(e_{A1} + e_{A2})\sigma_{s2}}$$

Ce principe de dimensionnement est valable aussi bien à l'ELU qu'à l'ELS. Seule la contrainte maxi sur les aciers tendus change:

- Calcul à l'ELU: on est en pivot A et donc $\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = Fed = \frac{Fe}{\gamma_s}$
- Calcul à l'ELS: on a $\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = \overline{\sigma_s}$

6.3.3. Section minimale

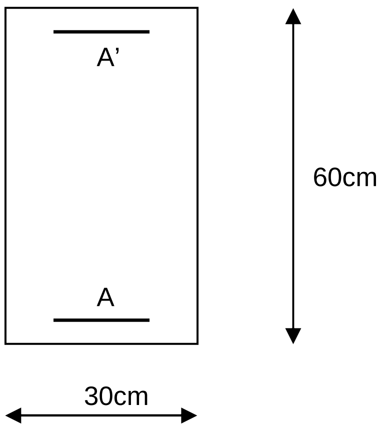
Dans le cas d'une section entièrement tendue, la section minimale d'armature à mettre en œuvre vaut:

$$\boxed{A_1 + A_2 = A \geq A\min = B\frac{F_{t28}}{Fe}}$$

En général, les armatures minimales sont placées symétriquement dans la section de béton.

6.4. Exercice 1: section entièrement tendue à l'ELU

Dans cet exercice, on se propose de déterminer les armatures sur la section suivante:



- Sollicitations :
  - Ng= -200 KN et Mg= 20 KN.m
  - Nq= -200 KN et Mq= 20 KN.m
- La durée d'application des charges est supérieure à 24 heures => θ= 1,00.
- Fissuration peu préjudiciable.
- Matériaux :
  - Fc28= 25 Mpa
  - Fe500
- Hauteurs utiles :
  - d= 55 cm
  - d'= 5cm

6.4.1. Caractéristiques des matériaux

- Béton Fc28= 25 Mpa => $Fbu = 0{,}85\dfrac{F_{c28}}{\theta \times \gamma_b} = 0{,}85\dfrac{25}{1{,}5} = 14{,}17 Mpa$
- Acier Fe500 : $Fed = \dfrac{Fe}{\gamma_s} = \dfrac{500}{1{,}15} = 434{,}78 Mpa$

6.4.2. Vérification si section entièrement tendue.

On est dans le cas d'une section « entièrement tendue » si :
- N est une traction.
- Le centre de pression C est situé entre les nappes d'armatures.

La position du point C est donnée par la valeur de l'excentricité e0 :

$$e_{0u} = \frac{M_{g0u}}{N_U} = \frac{(1{,}35 \times 20 + 1{,}50 \times 20)}{-(1{,}35 \times 200 + 1{,}50 \times 200)} = -0{,}10 m$$

Pour que le point C soit situé entre les deux nappes d'armatures longitudinales, on doit avoir :

$$\boxed{e_{0u} < d - \frac{h}{2} = 0{,}55 - \frac{0{,}60}{2} = 0{,}25 m}$$

On est donc bien dans le cas d'une section entièrement tendue.

6.4.3. Calcul des excentricités.

Le calcul des excentricités nous donne :

- $e_{A1} = \dfrac{h}{2} - d' + |e_{0u}| = 0{,}30 - 0{,}05 + 0{,}10 = 0{,}35m$
- $e_{A2} = \dfrac{h}{2} - (h - d) - |e_{0u}| = 0{,}30 - 0{,}05 - 0{,}10 = 0{,}15m$

6.4.4. Calcul des armatures

Pour la nappe supérieure :

- $A_1 = \dfrac{N_u \times e_{A2}}{(e_{A1} + e_{A2}) \times F_{ed}} = \dfrac{0{,}570 \times 0{,}15}{(0{,}35 + 0{,}15) \times 434{,}78} = 3{,}93.10^{-4} m^2 = 3{,}93cm^2$

Pour la nappe inférieure :

- $A_2 = \dfrac{N_u \times e_{A1}}{(e_{A1} + e_{A2}) \times F_{ed}} = \dfrac{0{,}570 \times 0{,}35}{(0{,}35 + 0{,}15) \times 434{,}78} = 9{,}17.10^{-4} m^2 = 9{,}17cm^2$

6.4.5. Pourcentage minimal

Il est rappelé que le % mini pour une section entièrement tendue est :

- $A\min = \dfrac{B \times F_{t28}}{F_e}$

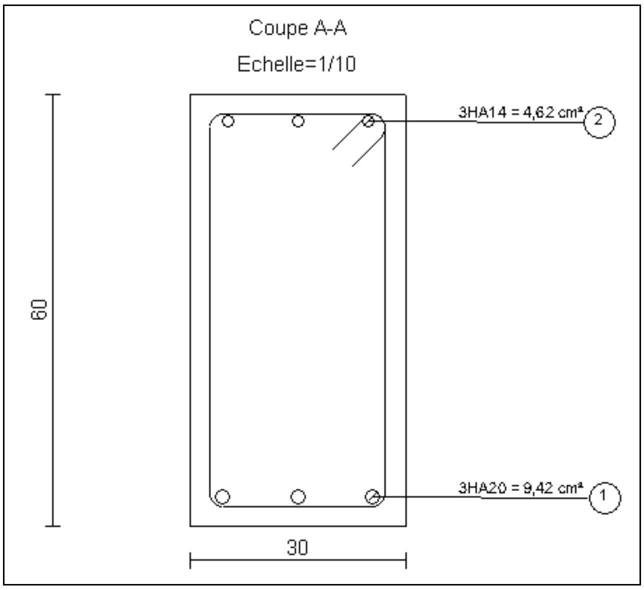
La section Amin est à comparer avec la section totale A1 + A2 car on est dans le cas d'une section entièrement tendue.

On a donc :

- $A_1 + A_2 = 3{,}93 + 9{,}17 = 13{,}10cm^2 > A\min = \dfrac{(0{,}30 \times 0{,}60) \times 2{,}1}{500} = 7{,}56cm^2$

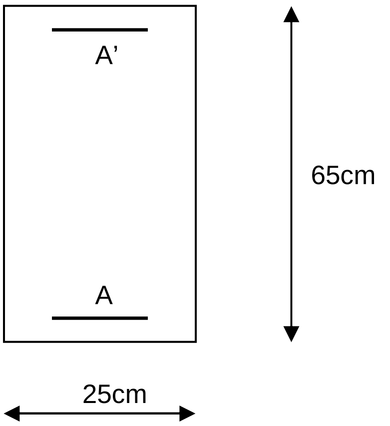
La vérification est OK.

6.4.6. Schéma de ferraillage



6.5. Exercice 2: section entièrement tendue à l'ELS

Dans cet exercice, on se propose de déterminer les armatures sur la section suivante:



- Sollicitations :
  - Ng= -250 KN et Mg= 22 KN.m
  - Nq= -230 KN et Mq= 25 KN.m
- La durée d'application des charges est supérieure à 24 heures => θ= 1,00.
- Fissuration préjudiciable.
- Matériaux :
  - Fc28= 30 Mpa
  - Fe500
- Hauteurs utiles :
  - d= 58 cm
  - d'= 5cm

6.5.1. Caractéristiques des matériaux

- La compression maxi sur le béton est de $\overline{\sigma_{bc}} = 0{,}6F_{c28} = 0{,}6 \times 30 = 18Mpa$
- Contrainte maxi sur les aciers : en fissuration préjudiciable, on a

$$\overline{\sigma_s} = \min\left\{\begin{array}{c} \frac{2}{3}F_e \\ \max\left\{\begin{array}{l} 0{,}5F_e \\ 110\sqrt{\eta \times F_{tj}} \end{array}\right. \end{array}\right\} = \min\left\{\begin{array}{c} 333{,}33 \\ \max\left\{\begin{array}{l} 250 \\ 110\sqrt{1{,}6 \times 2{,}1} = 201{,}63 \end{array}\right. \end{array}\right\} = 250Mpa$$

6.5.2. Vérification si section entièrement tendue.

On est dans le cas d'une section « entièrement tendue » si :
- N est une traction.
- Le centre de pression C est situé entre les nappes d'armatures.

La position du point C est donnée par la valeur de l'excentricité e0 :

$$e_0 = \frac{M_{g0}}{N} = \frac{(22+25)}{-(250+230)} = -0{,}098m$$

Pour que le point C soit situé entre les deux nappes d'armatures longitudinales, on doit avoir :

$$\boxed{e_0 < d - \frac{h}{2} = 0{,}58 - \frac{0{,}65}{2} = 0{,}255m}$$

On est donc bien dans le cas d'une section entièrement tendue.

6.5.3. Calcul des excentricités.

Le calcul des excentricités nous donne :

- $e_{A1} = \frac{h}{2} - d' + |e_0| = 0{,}325 - 0{,}05 + 0{,}098 = 0{,}37m$
- $e_{A2} = \frac{h}{2} - (h-d) - |e_0| = 0{,}325 - 0{,}05 - 0{,}098 = 0{,}177m$

6.5.4. Calcul des armatures

Pour la nappe supérieure :

- $A_1 = \frac{N_{ser} \times e_{A2}}{(e_{A1} + e_{A2}) \times \overline{\overline{\sigma_s}}} = \frac{0{,}480 \times 0{,}177}{(0{,}37 + 0{,}177) \times 250} = 6{,}21.10^{-4} m^2 = 6{,}21 cm^2$

Pour la nappe inférieure :

- $A_2 = \frac{N_{ser} \times e_{A1}}{(e_{A1} + e_{A2}) \times \overline{\overline{\sigma_s}}} = \frac{0{,}480 \times 0{,}37}{(0{,}37 + 0{,}177) \times 250} = 12{,}99.10^{-4} m^2 = 13 cm^2$

6.5.5. Pourcentage minimal

Il est rappelé que le % mini pour une section entièrement tendue est :

- $A\min = \frac{B \times F_{t28}}{F_e}$

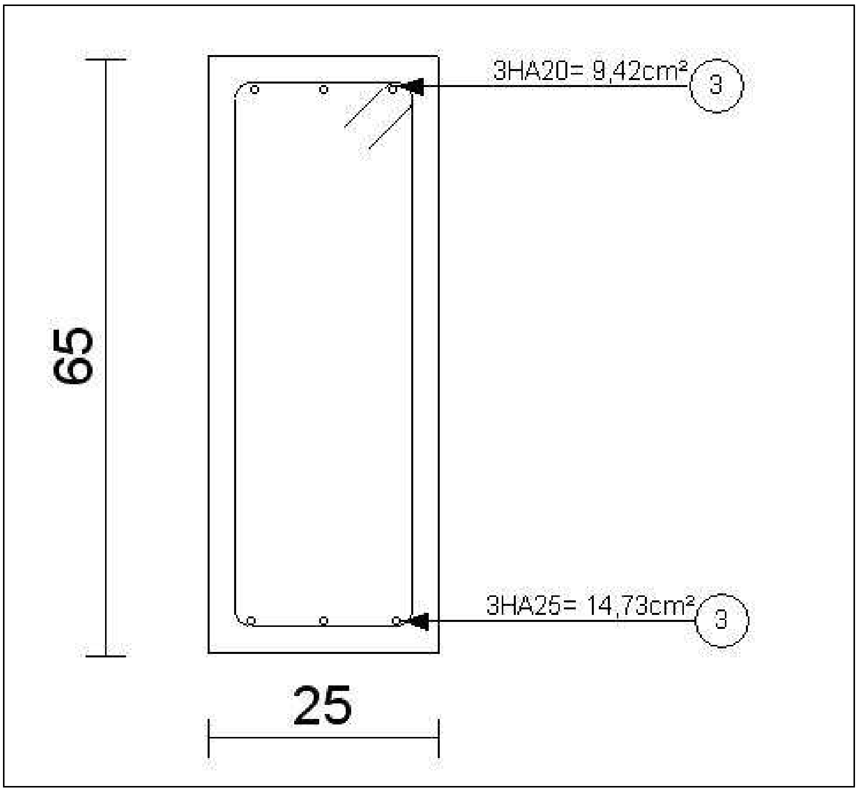
La section Amin est à comparer avec la section totale A1 + A2 car on est dans le cas d'une section entièrement tendue.

On a donc :

- $A_1 + A_2 = 6{,}21 + 13 = 19{,}21 cm^2 > A\min = \frac{(0{,}25 \times 0{,}65) \times 2{,}4}{500} = 7{,}8 cm^2$

La vérification est OK.

6.5.6. Schéma de ferraillage



6.6. Sections rectangulaires partiellement tendues

6.6.1. Définition

Les critères de détermination d'une section partiellement tendue s'expriment différemment selon que l'on est en dimensionnement E.L.U ou E.L.S.

A l'E.L.S

La section est partiellement tendue si:

a) Si N est une compression (Nser >0) => l'axe neutre de la section y1 doit être dans la section de béton, on a donc: $y_1 \le h$.

Si on note Mserlim, le moment de service qui correspond à $y_1 = h$, on peut écrire:

- $y_1 \le h \Rightarrow \; M_{serA} \le M_{ser\lim} = \frac{1}{2}\overline{\sigma_{bc}}b_0h\left(d - \frac{h}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{h}{d}\left(1 - \frac{1}{3}\times\frac{h}{d}\right)b_0d^2\overline{\sigma_{bc}}$

avec M_{serA} qui représente le moment fléchissant de service par rapport aux aciers tendus.

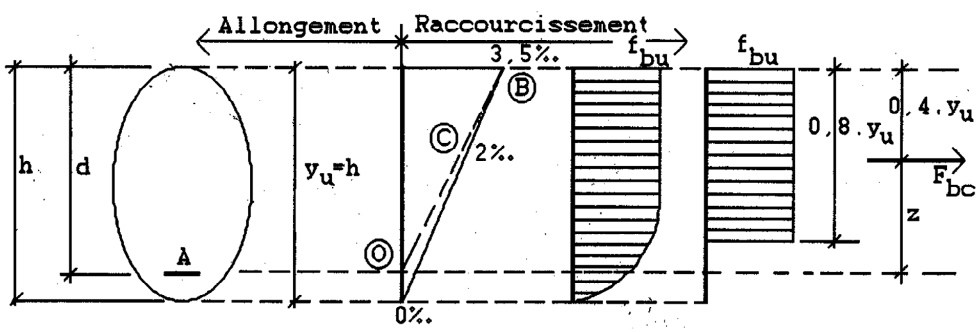
Attention, si $y_1 \le d$, cela veut dire qu'il faut mettre en place au moins un lit d'aciers tendu, ce qui s'exprime par:

- $M_{serA} \le \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)b_0d^2\overline{\sigma_{bc}} = 0{,}333b_0d^2\overline{\sigma_{bc}}$

b) Si N est une traction (Nser < 0) => le point C doit être à l'extérieur des armatures.

A l'E.L.U

a) Si N est une compression (Nu > 0), avec e0=e1 + e2, on doit avoir $y_u \le h$
De façon analogue à la justification ELS, nous allons déterminer le moment réduit qui correspond à une section $y_u = h$



En considérant la section sans acier comprimé, avec yu=h, on a:

- $F_{bc} = 0,8 \times b_0 \times h \times F_{bu}$
- $z = d - 0,4h$
- $M_{BC} = F_{bc} \times z$
- $M_{BC} = 0,8 b_0 h (d - 0,4h) F_{bu}$

Le moment Mbc correspond au moment de flexion qu'il faut appliquer à la section pour qu'elle soit entièrement comprimée (Pivot C).

On a donc:

- $M_{BC} = 0,8 \dfrac{h}{d}(1 - 0,4 \dfrac{h}{d}) b_0 d^2 F_{bu}$

d'où:

- $\mu_{BC} = \dfrac{M_{BC}}{b_0 d^2 F_{bu}} = 0,8 \dfrac{h}{d}(1 - 0,4 \dfrac{h}{d})$

En pratique, il suffit donc de calculer le moment réduit de la section et de le comparer à la valeur de μ_{BC}, pour savoir si la section est entièrement ou partiellement comprimée, ce qui se traduit par:

- $\mu_{bu} = \dfrac{M_{ua}}{b_0 d^2 F_{bu}} \leq \mu_{BC} = 0,8 \dfrac{h}{d}(1 - 0,4 \dfrac{h}{d})$

ATTENTION , pour le calcul du moment réduit, il est impératif de prendre en compte les excentricités du 1er et du 2nd ordre (car flexion composée). Avant de déterminer si la section est entièrement ou partiellement comprimée, il faut donc calculer ces excentricités.

Si $y_u \leq d$, cela veut dire qu'il faut mettre en place au moins un lit d'aciers tendu, ce qui s'exprime par:

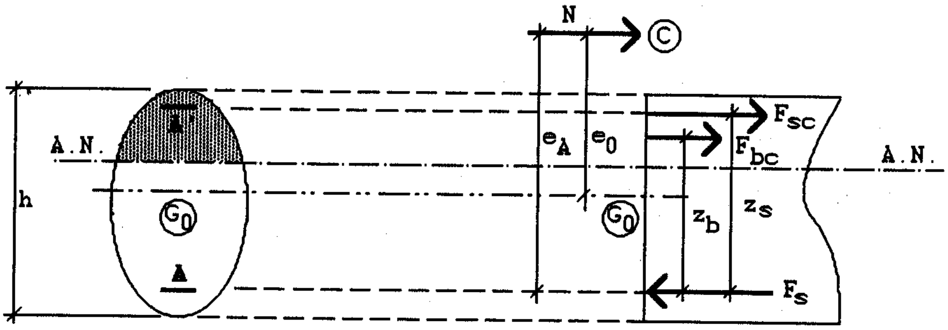
- $\mu_{bu} = \dfrac{M_{ua}}{b_0 d^2 F_{bu}} \leq \mu_{B0} = 0,8(1 - 0,4) = 0,480$

b) Si N est une traction (Nu < 0) => le point C doit être à l'extérieur des armatures.

6.6.2. Méthode de calcul des armatures

Par la suite, on supposera qu'il y a au moins une nappe d'armature tendue.

L'équilibre de la section se traduit par le schéma suivant:



Si on considère le cas général d'une section ayant une section d'aciers tendus A et une section d'aciers comprimés A', l'équilibre de la section s'écrit:

- Equilibre des moments:
  - $M_{UA} = N \times e_A = A'\sigma_{sc} z_s + F_{bc} z_b$
- Equilibre des efforts:
  - $N = F_{bc} + A'\sigma_{sc} - A\sigma_s \Leftrightarrow F_{bc} + A'\sigma_{sc} - \left(A + \dfrac{N}{\sigma_s}\right)\sigma_s = 0$

Les équations d'équilibre d'une même section soumise au moment Mua en flexion simple seraient:

- Equilibre des moments:
  - $M_{UA} = A'\sigma_{sc} z_s + F_{bc} z_b$
- Equilibre des efforts:
  - $F_{bc} + A'\sigma_{sc} - A\sigma_s = 0$

Par identification, on obtient les relations suivantes:

- $A' = A'$
- $A = A - \dfrac{N}{\sigma_s}$

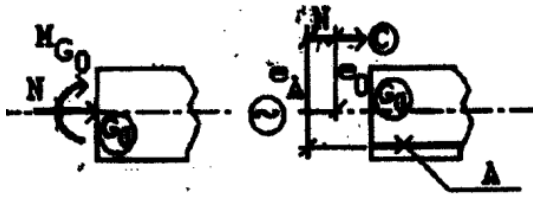
6.6.3. Valeur de Mua

Dans les formules que nous venons d'appliquer, le moment Mua est le moment par rapport au centre de gravité des aciers tendus.

Or, lorsque l'on détermine le moment Mu=(e1+e2)Nu, il s'agit d'un moment par rapport au centre de gravité de la section de béton seul.

Il est donc impératif de calculer Mua, le moment par rapport au centre de gravité des aciers

Dans le cas d'une section rectangulaire, on a:



- $M_{ua} = M_{G0} + N(d - \frac{h}{2})$
- N étant pris avec son signe.

6.6.4. Technique du calcul

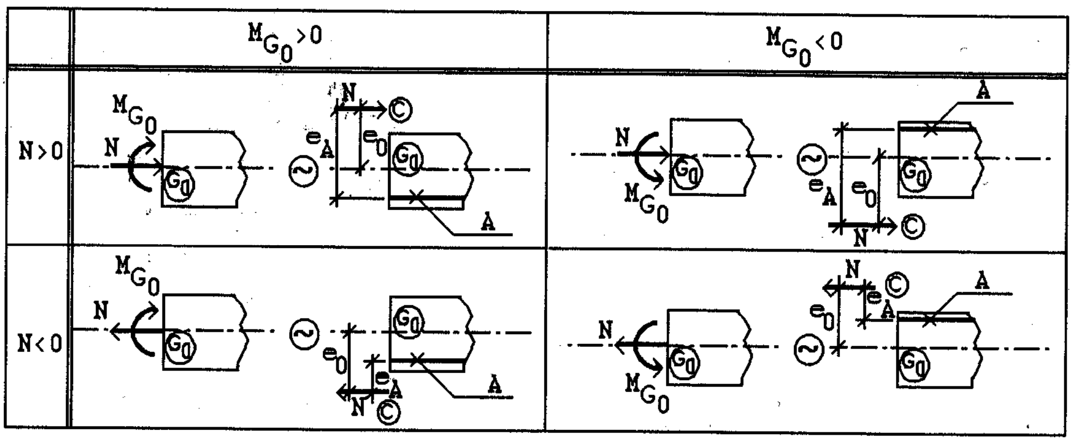
La technique de dimensionnement d'une section partiellement tendue en flexion composée est la suivante:

- On calcul le moment Ma (à l'ELU ou ELS) par rapport aux aciers tendus.
- On en déduit les sections A et A' par un dimensionnement en flexion simple.
- On détermine les aciers de flexion composée à partir de:
  - o A' = *A'*
  - o A = *A* –N/σs

ATTENTION, l'effort normal N doit être considéré avec sa valeur algébrique:

- Si N est une compression (N > 0) => on a une diminution de la section d'aciers trouvée en flexion simple, car la compression est favorable.
- Si N est une traction (N < 0) => on a une augmentation de la section d'aciers trouvée en flexion simple, car la traction est défavorable.

Position des aciers tendus

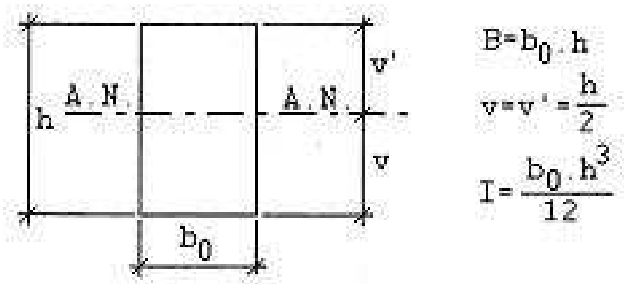


Si N est une compression ; C est à l'opposé de A (centre de gravité des aciers tendus) par rapport à G_0.

Si N est une traction ; C et A sont du même côté par rapport à G_0.

6.6.5. Pourcentage minimal d'armatures

Pour une section rectangulaire en flexion composée partiellement tendue, le pourcentage minimal d'armatures vaut:



$$A_{\min} = 0{,}23 \frac{F_{t28}}{F_e} b_0 d \frac{e - 0{,}45d}{e - 0{,}185d}$$

On remarque que si e tend vers l'infini, en flexion simple, on retrouve le pourcentage minimum de la flexion simple.

ATTENTION, l'excentricité e doit être prise en compte à l'ELS et avec le même signe que l'effort normal N.

6.7. Sections en T partiellement tendues

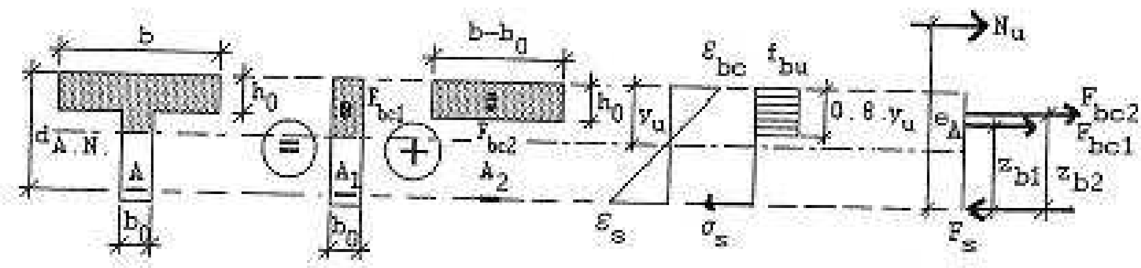
Par rapport aux sections rectangulaires, la seule nuance concerne la détermination des armatures. Les critères de vérification si la section est effectivement partiellement tendue restent inchangés et ne s'appliquent qu'à la nervure.

On a deux cas de figure possibles:

- Mua < Mtu => la table de compression est surabondante, et on se ramène au dimensionnement d'une section rectangulaire de largeur b, en flexion composée, et soumise à (Mua et Nu)
- Mua > Mtu => calcul en section en T.

6.7.1. Dimensionnement des armatures si Mua > Mtu

Le schéma d'équilibre de la section est le suivant:



L'équilibre de la section s'écrit:

- Equilibre des moments:
  - $M_{UA} = N \times e_A = F_{bc1} z_{b1} + F_{bc2} z_{b2}$
- Equilibre des efforts:
  - $N = F_{bc1} + F_{bc2} - F_s$

avec:

- $F_{bc1} = 0{,}8 b_0 y_u F_{bu}$ et $z_{b1} = d - 0{,}4 y_u$
- $F_{bc2} = (b - b_0) h_0 F_{bu}$ et $z_{b2} = d - \frac{h_0}{2}$
- $F_s = A_s \sigma_s$

d'où:

- $M_{uA} = 0{,}8 b_0 y_u F_{bu} (d - 0{,}4 y_u) + (b - b_0) h_0 F_{bu} (d - \frac{h_0}{2})$
- $N_u = 0{,}8 b_0 y_u F_{bu} + (b - b_0) h_0 F_{bu} - A\sigma_s$

On se rend compte que ces équations intègrent les termes liés à un dimensionnement en flexion simple.

Pour les mettre en évidence, on pose:

- $M_{uR} = M_{uA} - (b - b_0) h_0 F_{bu} (d - \frac{h_0}{2})$
- $N_{uR} = N_u - (b - b_0) h_0 F_{bu}$

Ce qui nous donne:

- $M_{uR} = 0{,}8 b_0 y_u F_{bu} (d - 0{,}4 y_u)$
- $N_{uR} = 0{,}8 b_0 y_u F_{bu} - A\sigma_s$

Par identification, on obtient les relations suivantes:

- $A' = A'$
- $A = A - \frac{N_{uR}}{\sigma_s}$

6.7.2. Technique du calcul

La technique de dimensionnement d'une section partiellement tendue en flexion composée est la suivante:

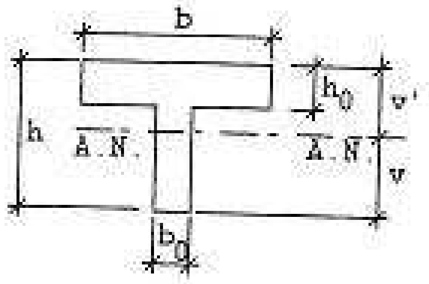
- On calcul le moment Ma (à l'ELU ou ELS) par rapport aux aciers tendus.
- On détermine si la table de compression est surabondante.
- Si non, calcul en section rectangulaire => voir paragraphe précédent.
- Si oui, on en déduit les sections A et A' par un dimensionnement en flexion simple, avec Mur et Nur.
- On détermine les aciers de flexion composée à partir de:
  - A' = *A'*
  - A = *A* –Nur/σs

ATTENTION, l'effort normal N doit être considéré avec sa valeur algébrique:

- Si Nur est une compression (Nur > 0) => on a une diminution de la section d'aciers trouvée en flexion simple, car la compression est favorable.
- Si Nur est une traction (Nur < 0) => on a une augmentation de la section d'aciers trouvée en flexion simple, car la traction est défavorable.

6.7.3. Pourcentage minimal d'armatures

Pour une section en T en flexion composée partiellement tendue, le pourcentage minimal d'armatures vaut:



$$B = b_0.h + (b - b_0)h_0$$

$$v' = \frac{b_0.h^2 + (b - b_0)h_0^2}{2.B}$$

$$v = h - v'$$

$$I = b_0\frac{h^3}{3} + (b - b_0)\frac{h_0^3}{3} - B.v'^2$$

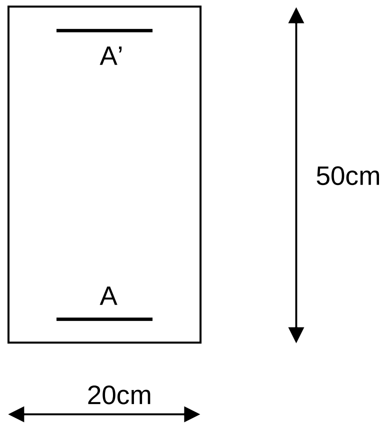
$$A_{\min} = B\frac{F_{t28}}{F_e} \times \frac{I}{d - \frac{h_0}{3}} \times \frac{e - v' + \frac{h_0}{3}}{Bev - I}$$

ATTENTION, l'excentricité e doit être prise en compte à l'ELS et avec le même signe que l'effort normal N.

6.8. Exercice 3: Section partiellement tendue avec effort de compression .

Considérons le poteau suivant :

- Poteau Encastré – Articulé.
- Hauteur libre du poteau : 3,00m
- Section du poteau : 20*50cm



- Sollicitations :
  - o Charges permanentes : Mg= 60 KN.m et Ng=110 KN
  - o Surcharges d'exploitations : Mq= 75 KN.m et Ng= 125 KN
- Durée d'application des charges : supérieure à 24h
- Matériaux :
  - o Béton: Fc28= 25Mpa
  - o Acier: Fe500
- Enrobage des armatures : 3cm
- Fissuration non préjudiciable
- Densité du béton : 25KN/m3
- Hauteurs utiles :
  - o d= 0,45m
  - o d'= 0,05m

Le but est de déterminer les armatures en pied de poteau.

6.8.1. Caractéristiques des matériaux

- Béton:
  - o Fc28= 25 Mpa => $Fbu = 0{,}85\dfrac{F_{c28}}{\theta \times \gamma_b} = 0{,}85\dfrac{25}{1{,}5} = 14{,}17 Mpa$
  - o Ft28= 0,6 + 0,06Fc28= 0.6 + 0.06 x 25= 2.1 Mpa
- Acier Fe500 : $Fed = \dfrac{Fe}{\gamma_s} = \dfrac{500}{1{,}15} = 434{,}78 Mpa$

6.8.2. Calcul des sollicitations

ELU

- Mu=1,35*60 + 1,50*75= 193,5 KN.m= 0,194MN.m
- Nu= 1,35*110 + 1,50*125= 0,336 MN.

ELS

- Mser= 60 + 75= 0,135 MN.m
- Nser= 110 + 125= 0,235 MN

6.8.3. Détermination des excentricités et sollicitations corrigées ELU.

A l'ELU, les sollicitations sont les suivantes :

- Mu= 0,194MN.m
- Nu= 336 KN.

Il nous faut donc déterminer :

- Excentricité additionnelle ea.
- Excentricité du 1er ordre à l'ELU.
- Excentricité du second ordre e2 (par la méthode forfaitaire).

Excentricité additionnelle

- $$e_a = \max\left\{\begin{matrix} 2cm \\ \dfrac{l}{250} = \dfrac{300}{250} = 1{,}2cm \\ 1cm \end{matrix}\right\} = 2cm$$

Excentricité du 1er ordre

- $$e_1 = \frac{Mu}{Nu} + e_a = \frac{0{,}194}{0{,}336} + 0{,}02 = 0{,}60m \text{ à l'ELU}$$

Calcul de lf/h

Dans le cas d'un poteau encastré-articulé, la longueur de flambement vaut lf=0,7l

Dans notre cas, on a lf=0,70*3=2,10m

On doit vérifier $\dfrac{l_f}{h} = \dfrac{2{,}10}{0{,}50} = 4{,}20 \le \max\left[15; \dfrac{20e_1}{h} = \dfrac{20\times 0{,}60}{0{,}50} = 24\right] = 24$

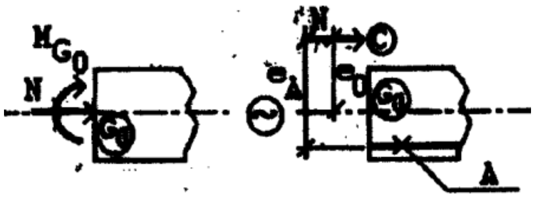
La vérification est OK, on peut donc estimer forfaitairement l'excentricité du second ordre.

- $$e_2 = \frac{3\times l_f^2}{10^4 h}\left[2 + \alpha\times\varphi\right]$$
- $$\alpha = \frac{M_G}{M_G + M_Q} = \frac{60}{60+75} = 0{,}444$$
- $$\varphi = 2$$
- $$e_2 = \frac{3\times 2{,}10^2}{10^4\times 0{,}50}\left[2 + 0{,}444\times 2\right] = 0{,}0076m$$

Sollicitations corrigées.

Les sollicitations corrigées, à prendre en compte pour le calcul en flexion composée, sont :
Nu= 0,336MN
Mu= (e1 + e2) * Nu= (0,60 + 0,0076) * 0,336= 0,204 MN.m

ATTENTION, ces valeurs sont calculées par rapport au centre de gravité de la section de béton seule, il est impératif de ramener le moment au centre de gravité des aciers tendus pour pouvoir dimensionner les armatures:



Le moment Mua vaut donc :

- Mua= Nua *eA
- Avec eA= (e1 + e2) + (d-h/2)= (0,60 + 0,0076) + (0,45 – 0,50/2)= 0,81m
- Et Mua= 0,336*0,81=0,272MN.m

Les sollicitations corrigées (ELU) sont donc:

Nu= 0,336 MN
Mu= 0,272 MN.m

6.8.4. Détermination des excentricités et sollicitations corrigées ELS.

A l'ELS, on a :
- Mser= 60 + 75= 0,135 MN.m
- Nser= 110 + 125= 0,235 MN
- e_{0ser}= 0,135/0,235= 0,574m

Il faut également ramener cette excentricité au centre de gravité des aciers tendus:

- $e_{Aser} = e_{0ser} + (d - \frac{h}{2}) = 0{,}574 + (0{,}45 - \frac{0{,}50}{2}) = 0{,}774m$

et donc M_{aser}= 0,235 * 0,774= 0,182 MN.m

Les sollicitations corrigées (ELS) sont donc :

Nser= 0,235 MN
Mser= 0,182 MN.m

6.8.5. Vérification si section partiellement tendue

On calcul le moment réduit :

- $\mu_{bu} = \dfrac{Mu}{bd^2F_{bu}} = \dfrac{0{,}272}{0{,}20 \times 0{,}45^2 \times 14{,}17} = 0{,}474$

Puis on calcul μ_{BC} :

- $\boxed{\mu_{BC} = 0{,}8\dfrac{h}{d}(1-0{,}4\dfrac{h}{d}) = 0{,}8\dfrac{0{,}50}{0{,}45}(1-0{,}4\dfrac{0{,}50}{0{,}45}) = 0{,}494}$

On est donc bien en section partiellement tendue.

6.8.6. Dimensionnement des armatures en flexion simple

On est en fissuration peu préjudiciable, on fait donc un dimensionnement à l'E.L.U.

- Hauteur utile : d=0,45m
- Moment réduit : $\mu_{bu} = 0{,}474$

Pour vérifier la présence ou non d'aciers comprimés, il est nécessaire de calculer la valeur de µlim qui est fonction de fc28, θ et γ.

Cette valeur peut être déterminée à partir des tables ou des formules approchées si Fc28 ≤ 30 Mpa.

Dans notre cas (acier Fe500), on peut utiliser la formule :

- $10^4 \mu_{\lim} = 3220 \times \theta \times \gamma + 51\dfrac{F_{C28}}{\theta} - 3100$ avec $\gamma = \dfrac{Mu}{Mser}$

On a donc :

- $\gamma = \dfrac{0{,}272}{0{,}182} = 1{,}49$ => $\mu_{\lim} = 0{,}297$

On a donc $\mu_{bu} > \mu_{\lim}$ => mise en place d'aciers comprimés.

<u>**Calcul des aciers tendus (section A1)**</u>

- Le calcul des aciers tendus doit être mené avec un moment correspond à µlim :
  $\mu_{\lim} = \dfrac{M_{\lim}}{bd^2F_{bu}}$ => $M_{\lim} = \mu_{\lim}bd^2F_{bu} = 0{,}297 \times 0{,}20 \times 0{,}45^2 \times 14{,}17 = 0{,}170 MN.m$
- Calcul de $\alpha_{\lim}$:
  - $\alpha_{\lim} = 1{,}25\left[1-\sqrt{(1-2\times 0{,}297)}\right] = 0{,}449$
- Calcul du bras de levier zb :
  - $z_b = d(1-0{,}4\alpha) = 0{,}45(1-0{,}4\times 0{,}449) = 0{,}369m$

- Calcul de la section d'armatures :
  - o $A_1 = \dfrac{M_{\lim}}{z_b F_{ed}} = \dfrac{0{,}170}{0{,}369 \times 434{,}78} = 10{,}60 cm^2$

Calcul des aciers comprimés (section A')

- Calcul de l'allongement des aciers comprimés :

$$\varepsilon_{sc} = \frac{3{,}5}{1000 \times \alpha_{lu} \times d}(\alpha_{lu} d - d') = \frac{3{,}5}{1000 \times 0{,}449 \times 0{,}45}(0{,}449 \times 0{,}45 - 0{,}05) = 0{,}0026$$

- On est dans le cas $\varepsilon_{sc} > \dfrac{F_{ed}}{E} = \dfrac{434{,}78}{200000} = 0{,}00217$

- On prend donc $\sigma_{sc} = F_{ed} = 434{,}78 Mpa$

- Calcul des aciers comprimés :
  - o $A' = \dfrac{M_u - M_{ul}}{(d - d')\sigma_{sc}} = \dfrac{0{,}272 - 0{,}170}{(0{,}45 - 0{,}05) \times 434{,}78} = 5{,}86 cm^2$

- Calcul des aciers A2 pour équilibrer A' :
  - o $A_2 = A' \dfrac{\sigma_{sc}}{\sigma_e} = 7{,}08 \dfrac{434{,}78}{434{,}78} = 5{,}86 cm^2$

- Section totale à mettre en œuvre
  - o A=A1+A2=16,46cm² en partie inférieure (aciers tendus)
  - o A'=5,86cm² en partie supérieure (aciers comprimés)

6.8.7. Armatures en flexion composée

En flexion composée, on a donc :

- A'= *A'*
- A= *A* – N/Fed= $16{,}46.10^{-4}$ – 0,336/434,78= 8,73 cm²

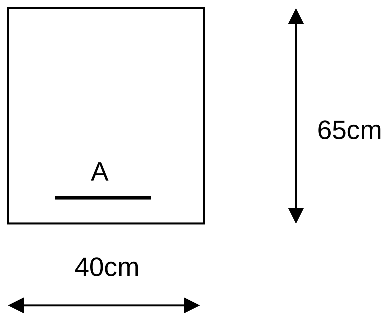
- A'= 5,86cm²
- A= 8,73cm²

6.8.8. Vérification du pourcentage minimum

- $A_{\min} = 0{,}23 \dfrac{F_{t28}}{F_e} b_0 d \dfrac{e - 0{,}45d}{e - 0{,}185d}$
- $A_{\min} = 0{,}23 \dfrac{2.1}{500} 0.20 \times 0.45 \dfrac{0.574 - 0.45 \times 0.45}{0.574 - 0{,}185 \times 0.45} = 0{,}66 cm^2$

6.9. Exercice 4: Section partiellement tendue avec effort de traction .

Considérons la section de poutre suivante:



- Sollicitations :
  - Charges permanentes : Mg= 90 KN.m et Ng=-190 KN
  - Surcharges d'exploitations : Mq=70 KN.m et Ng= -145 KN
- Durée d'application des charges : supérieure à 24h
- Matériaux :
  - Béton: Fc28= 25Mpa
  - Acier: Fe500
- Enrobage des armatures : 3cm
- Fissuration non préjudiciable
- Densité du béton : 25KN/m3
- Hauteurs utiles :
  - d= 0,60m
  - d'= 0,05m

On souhaite dimensionner les armatures tendues de la poutre, à l'ELU.

6.9.1. Caractéristiques des matériaux

- Béton:
  - Fc28= 25 Mpa => $Fbu = 0{,}85\dfrac{F_{c28}}{\theta \times \gamma_b} = 0{,}85\dfrac{25}{1{,}5} = 14{,}17Mpa$
  - Ft28= 0,6 + 0,06Fc28= 0.6 + 0.06 x 25= 2.1 Mpa
- Acier Fe500 : $Fed = \dfrac{Fe}{\gamma_s} = \dfrac{500}{1{,}15} = 434{,}78Mpa$

6.9.2. Calcul des sollicitations

ELU

- Mu=1,35*90 + 1,50*70= 226.5 KN.m= 0,227 MN.m
- Nu= 1,35*(-190) + 1,50*(-145)= -474 KN= -0,474 MN.

ELS

- Mser= 90 + 70= 160 KN.m= 0,160 MN.m
- Nser= -190 - 145= -335 KN= -0,335 MN

6.9.3. Détermination des excentricités et sollicitations corrigées ELU.

A l'ELU, les sollicitations sont les suivantes :

- Mu= 0,227 MN.m
- Nu= -0.474 MN

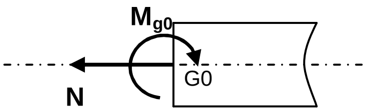
On est dans le cas du dimensionnement d'une poutre, par conséquent, on ne prendra pas en compte les excentricités ea, et e2.

On a donc:

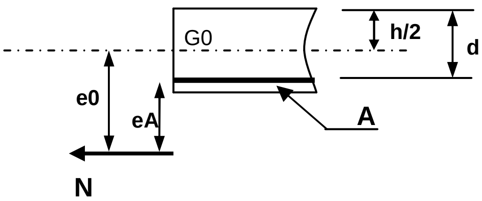
$$e_0 = \frac{Mu}{Nu} = \frac{0{,}227}{-0.474} = -0{,}479m$$

Sollicitations corrigées.

ATTENTION, les valeurs précédemment déterminées sont calculées par rapport au centre de gravité de la section de béton seule, il est impératif de ramener le moment au centre de gravité des aciers tendus pour pouvoir dimensionner les armatures:



≈



Le moment Mua vaut donc :

- $M_{uA} = N_u \times e_A = N_u \times (|e_0| - (d - \frac{h}{2}))$
- Mua= 0.474 x (0.479 – 0.60 + 0.65/2)= 0,097 MN.m

Les sollicitations corrigées (ELU) sont donc:

NuA= - 0,474 MN
MuA= 0, 097MN.m

6.9.4. Détermination des excentricités et sollicitations corrigées ELS.

A l'ELS, on a :
- Mser= 0,160 MN.m
- Nser= -0,335 MN
- e_{0ser}= 0,160/- 0,335= 0,478 m

Il faut également ramener cette excentricité au centre de gravité des aciers tendus:

- $M_{serA} = N_{ser} \times e_A = N_{ser} \times (|e_{0ser}| - (d - \frac{h}{2}))$
- Mua= 0.335 x (0.478 – 0.60 + 0.65/2)= 0,068 MN.m

Les sollicitations corrigées (ELS) sont donc :

Nser= - 0,335 MN
Mser= 0,068 MN.m

6.9.5. Vérification si section partiellement tendue

On calcul le moment réduit :

- $\mu_{bu} = \frac{Mu}{bd^2 F_{bu}} = \frac{0{,}097}{0{,}40 \times 0{,}60^2 \times 14{,}17} = 0{,}0475$

Puis on calcul μ_{BC} :

- $\boxed{\mu_{BC} = 0{,}8\frac{h}{d}(1 - 0{,}4\frac{h}{d}) = 0{,}8\frac{0{,}65}{0{,}60}(1 - 0{,}4\frac{0{,}65}{0{,}60}) = 0{,}491}$

On est donc bien en section partiellement tendue.

6.9.6. Dimensionnement des armatures en flexion simple

On est en fissuration peu préjudiciable, on fait donc un dimensionnement à l'E.L.U.

- Hauteur utile : d=0,60m
- Moment réduit : $\mu_{bu} = 0{,}0475$

Pour vérifier la présence ou non d'aciers comprimés, il est nécessaire de calculer la valeur de µlim qui est fonction de fc28, θ et γ.

Cette valeur peut être déterminée à partir des tables ou des formules approchées si Fc28 ≤ 30 Mpa.

Dans notre cas (acier Fe500), on peut utiliser la formule :

- $10^4 \mu_{\lim} = 3220 \times \theta \times \gamma + 51 \dfrac{F_{C28}}{\theta} - 3100$ avec $\gamma = \dfrac{Mu}{Mser}$

On a donc :

- $\gamma = \dfrac{0{,}097}{0{,}068} = 1{,}43$ => $\mu_{\lim} = 0{,}278$

On a donc $\mu_{bu} < \mu_{\lim}$ => pas d'aciers comprimés.

<u>Calcul des aciers tendus</u>

- $\mu_u = 0{,}0475$
- Calcul de α :
  - o $\alpha = 1{,}25\left[1 - \sqrt{(1 - 2 \times 0{,}0475)}\right] = 0{,}061$
- Calcul du bras de levier zb :
  - o $z_b = d(1 - 0{,}4\alpha) = 0{,}60(1 - 0{,}4 \times 0{,}061) = 0{,}585m$
- Calcul de la section d'armatures :
  - o $A_u = \dfrac{M_{uA}}{z_b F_{ed}} = \dfrac{0{,}097}{0{,}585 \times 434{,}78} = 3{,}81cm^2$

6.9.7. Armatures en flexion composée

En flexion composée, on a donc :

- A'= *A'*= 0
- A= *A* – N/Fed= 3.81.10^{-4} + 0.474 / 434.78= 14.71 cm²

- A'= 0 cm²
- A= 14.71 cm²

6.9.8. Vérification du pourcentage minimum

- $A_{\min} = 0.23 \dfrac{F_{t28}}{F_e} b_0 d \dfrac{e - 0.45d}{e - 0.185d}$
- $A_{\min} = 0.23 \dfrac{2.1}{500} 0.40 \times 0.60 \dfrac{-0.478 - 0.45 \times 0.60}{-0.478 - 0.185 \times 0.60} = 2.94cm^2$

6.10. Sections entièrement comprimées

6.10.1. Définition

Nous avons vu précédemment qu'une section rectangulaire peut être considérée partiellement tendue (ou partiellement comprimée) si le point C se trouvait à l'extérieur des armatures.

Cette condition s'est traduite de la façon suivante:

- A l'E.L.S: $M_{serA} \leq M_{ser\lim} = \frac{1}{2}\overline{\sigma_{bc}}b_0 h\left(d - \frac{h}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{h}{d}\left(1 - \frac{1}{3}\times\frac{h}{d}\right)b_0 d^2\overline{\sigma_{bc}}$
- A l'E.L.U: $M_{uA} \leq 0{,}8\frac{h}{d}(1-0{,}4\frac{h}{d})b_0 d^2 F_{bu}$

Par conséquent, le critère qui permet de dire qu'une section est entièrement comprimée est le critère inverse, à savoir que le point C doit se trouver à l'intérieur des armatures.

<u>A l'E.L.S:</u>

- Nser est une compression: Nser > 0
- $M_{serA} - A'\sigma_{sc}(d-d') > \frac{1}{2}\frac{h}{d}(1-\frac{1}{3}\times\frac{h}{d})b_0 d^2\overline{\sigma_{bc}}$
- avec: $\sigma_{sc} = 15\overline{\sigma_{bc}}\frac{h-d'}{h}$

<u>A l'E.L.U:</u>

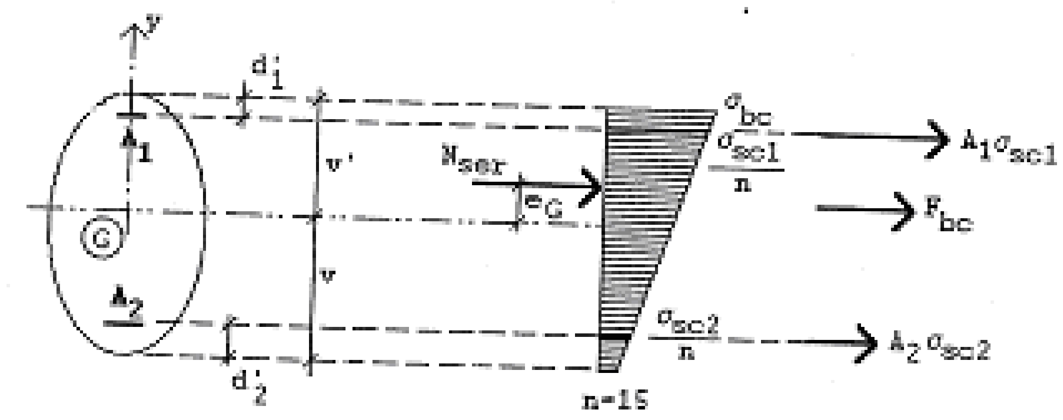
- Nu est une compression: Nu > 0
- $M_{uA} - A'F_{ed}(d-d') > 0{,}8\frac{h}{d}(1-0{,}4\frac{h}{d})b_0 d^2 F_{bu}$

Dans les deux critères précédents, on retranche le moment du aux aciers comprimés de façon à pouvoir comparer directement le moment sollicitant et le moment ultime d'une section entièrement comprimée.

Dans ce cas, le dimensionnement des armatures est assez complexe et itératif. Pour simplifier les choses, de nombreuses d'abaques de dimensionnement ont été établies pour des géométries données => on appelle ces abaques les « diagrammes d'interaction ».

6.10.2. Calcul des armatures à L'E.L.S

L'équilibre, à l'E.L.S, d'une section en flexion composé entièrement comprimée, est défini par le schéma suivant:



Le dimensionnement à l'E.L.S est mené par itération sur les sections d'aciers A1 et A2, de façon à respecter deux conditions:

- La contrainte maximum sur le béton doit respecter: $\sigma_{bc\max} \leq \overline{\sigma_{bc}}$.
- Le centre de poussée C doit rester dans le noyau central.

La contrainte maximum sur le béton est calculée à partir de la formule:

- $\sigma_{bc\max} = \dfrac{N_{ser}}{B_0} + \dfrac{M_{serG} \times v'}{I_0} \leq \overline{\sigma_{bc}}$

B0 et I0 représentent les caractéristiques géométriques de la section homogène:

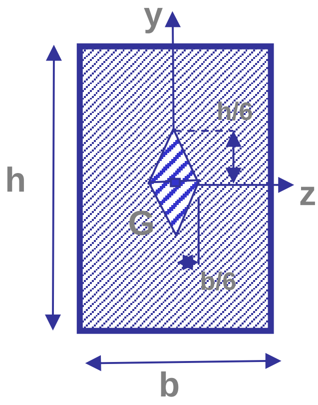
- $B_0 = B + 15(A_1 + A_2)$
- I_0: inertie de la section B_0 par rapport à G.

B représente la section de béton.

Pour la 1ère itération, on se fixe A1 + A2= Amin, avec:

- $A\min = \max\begin{cases} 4cm^2/m \text{ } \textit{de périmètre} \\ 0,2\dfrac{B}{100} \end{cases}$

Pour rappel, dans le cas d'une section rectangulaire, le noyau central correspond à un losange de hauteur h/6 de part et d'autre de l'axe de symétrie de la section de béton.



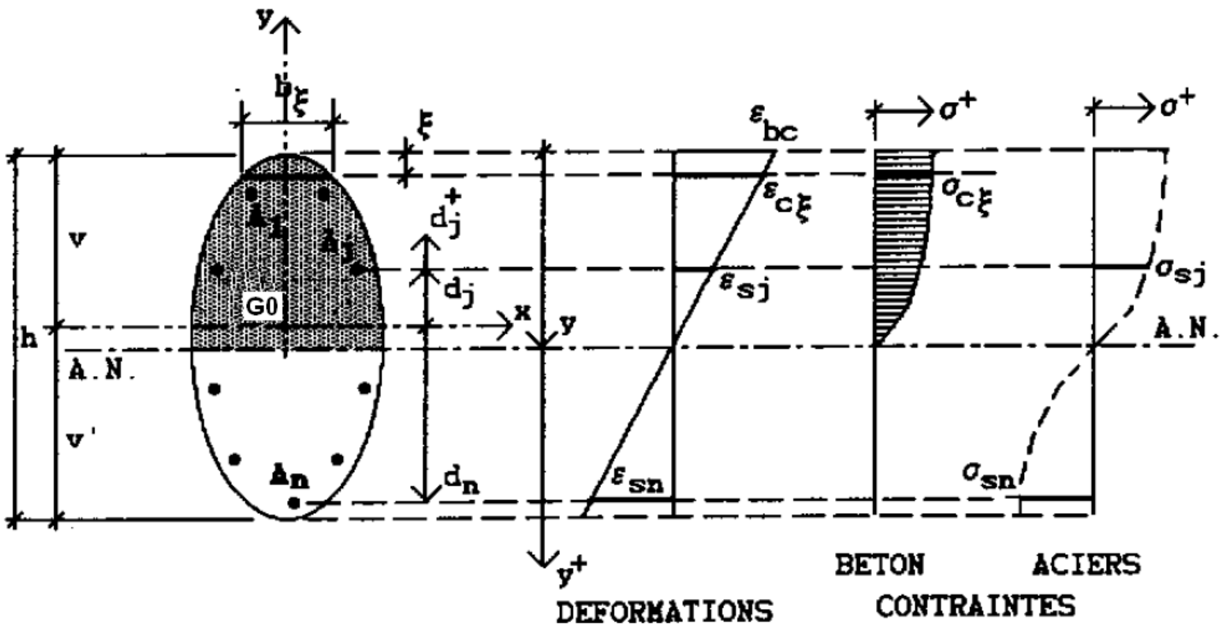
On voit bien qu'un dimensionnement à l'E.L.S présente donc une infinité de solutions. L'utilisation des abaques de dimensionnement permet un dimensionnement plus rapide.

6.10.3. Définition des courbes d'interactions à l'E.L.U

Les courbes d'interactions sont des diagrammes d'interaction « moment-effort normal » qui permettent de dimensionner ou de vérifier rapidement une section dont les dimensions et les armatures sont connues.

De façon générale, les diagrammes d'interactions sont fixés à l'E.L.U, mais rien n'empêche de les établir à l'E.L.S.

Pour définir l'équilibre d'une section en flexion composée, on part du schéma suivant :



Les notations de ce schéma sont les suivantes:

- G0: centre de gravité de la section de béton seule.
- x et y sont des axes de symétrie de la section.
- dj: distance au centre de gravité de l'armature considérée. Cette distance est comptée positive dans le sens ascendant.
- v': fibre extrême comprimée de la section.
- v: fibre extrême tendue de la section.
- B: aire de la section de béton seule.
- An : armature la plus éloignée de la zone comprimée.

Lorsque l'on fixe arbitrairement une valeur de y, on obtient un diagramme des déformations qui suit un des 3 pivots (voir cours de flexion simple) :

- Si $y \leq 0{,}259(v - d_n)$ => pivot A
- Si $0{,}259(v - dn) < y \leq h$ => pivot B
- Si y > h => pivot C

L'expression « $y \leq 0{,}259(v - d_n)$ » vient de l'expression y=0.259d vue en flexion simple en considérant une valeur négative pour « dn ».

Pour une section donnée d'armatures, si on fait varier l'axe neutre y, on obtiendra les déformations suivantes :

- $\varepsilon c\xi$ = raccourcissement de la fibre de béton à la profondeur ξ.
- εsj = déformation de l'armature Aj.

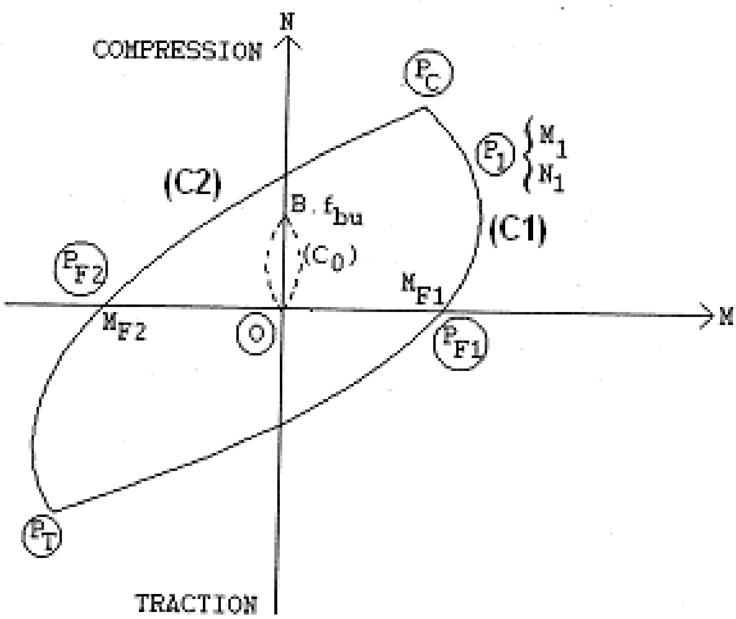
A partir de ces déformations, on en déduit les contraintes suivantes:

- $\sigma c\xi$ = contrainte de la fibre de béton à la profondeur ξ.
- σsj = contrainte de l'armature Aj

La résultante en force et en moment de ces forces par rapport à G0 nous donne:

$$\begin{cases} N_1(y) = \int_0^Y b_\xi \sigma_{c\xi} d\xi + \sum_1^N A_j \sigma_{sj} \\ M_1(y) = \int_0^Y b_\xi \sigma_{c\xi} (v' - \xi) d\xi + \sum_1^N A_j \sigma_{sj} d_j \end{cases}$$

Lorsque « y » varie, le point de coordonnées N1(y) et M1(y) décrit une courbe C1 appelée courbe d'interaction.



En changeant le sens des moments, on inverse le sens de la flexion et on obtient la courbe C2.

Les deux courbes C1 et C2 forment un contour fermé appelé courbes d'interaction.

Ce contour représente une multitude d'efforts résistants, pour une section d'armatures imposées, pour plusieurs valeurs de y. Il constitue le "domaine de sécurité" dans lequel doit se trouver le point représentatif des sollicitations agissantes.

Si la section ne comporte pas d'armatures :

$$\text{Aj=0 quelque soit j} \Rightarrow \begin{cases} P_T = \begin{cases} M_T = 0 \\ N_T = 0 \end{cases} \\ P_C = \begin{cases} M_C = 0 \\ N_C = Bf_{bu} \end{cases} \end{cases}$$

En faisant varier le contour C0, on obtient le contour C0 définissant le domaine de sécurité d'une section sans armature.

Cette méthode se prête très bien au développement informatique et permet facilement d'obtenir, par itération, la section d'armature nécessaire pour que le torseur soit situé à l'intérieur de ces courbes.
En général, on part de la section minimum d'armatures puis on itère pour satisfaire la condition précédente.
Par contre, manuellement, le calcul est long et fastidieux. Tout au plus, peut-on vérifier certains points particuliers.

Points particuliers de ces courbes

Cette courbe présente un certain nombre de caractéristiques et points particuliers intéressants.

Cas où on a y= -∞

Dans ce cas, la section est entièrement tendue et on est à la verticale du pivot A (traction simple). Le point correspondant sur la courbe Pt a les coordonnées suivantes:

$$\begin{cases} N_1(-\infty) = N_T = \sum_1^N A_j \sigma_{sj} = -F_{ed} \sum_1^N A_j \\ M_1(-\infty) = M_T = \sum_1^N A_j \sigma_{sj} d_J = -F_{ed} \sum_1^N A_j d_j \end{cases}$$

Cas où on a y= +∞

Dans ce cas, la section est entièrement comprimée et on est à la verticale du pivot C (compression simple).

On a donc:

- $\varepsilon_{sj} = 2/1000 \Rightarrow \sigma_{sj} = E_s \times \varepsilon_{sj} \leq Fed$
- $\sigma_{c\xi} = Fbu$

Le point correspondant sur la courbe Pc a les coordonnées suivantes:

$$\begin{cases} N_1(+\infty) = N_C = \int_0^Y b_\xi \sigma_{c\xi} d\xi + \sum_1^N A_j \sigma_{sj} = B \times F_{bu} + F_{ed} \sum_1^N A_j \\ M_1(+\infty) = \int_0^Y b_\xi \sigma_{c\xi} (v' - \xi) d\xi + \sum_1^N A_j \sigma_{sj} d_j = F_{ed} \sum_1^N A_j d_j \end{cases}$$

Cas ou Ni=0

Dans ce cas, on obtient le point P_{MF1} qui correspond au moment de flexion simple.

6.10.4. Dimensionnement des aciers E.L.U par les diagrammes d'interactions.

Pour dimensionner manuellement une section en flexion composée, on utilisera des diagrammes d'interactions.

Chaque diagramme est défini pour une section donnée (béton, armatures, position des aciers).

On calcul les sollicitations Ni et Mi (sollicitations au centre de gravité) en partant des formules que nous avons vu précédemment:

$$\begin{cases} N_1(y) = \int_0^Y b_\xi \sigma_{c\xi} d\xi + \sum_1^N A_j \sigma_{sj} \\ M_1(y) = \int_0^Y b_\xi \sigma_{c\xi} (v' - \xi) d\xi + \sum_1^N A_j \sigma_{sj} d_j \end{cases}$$

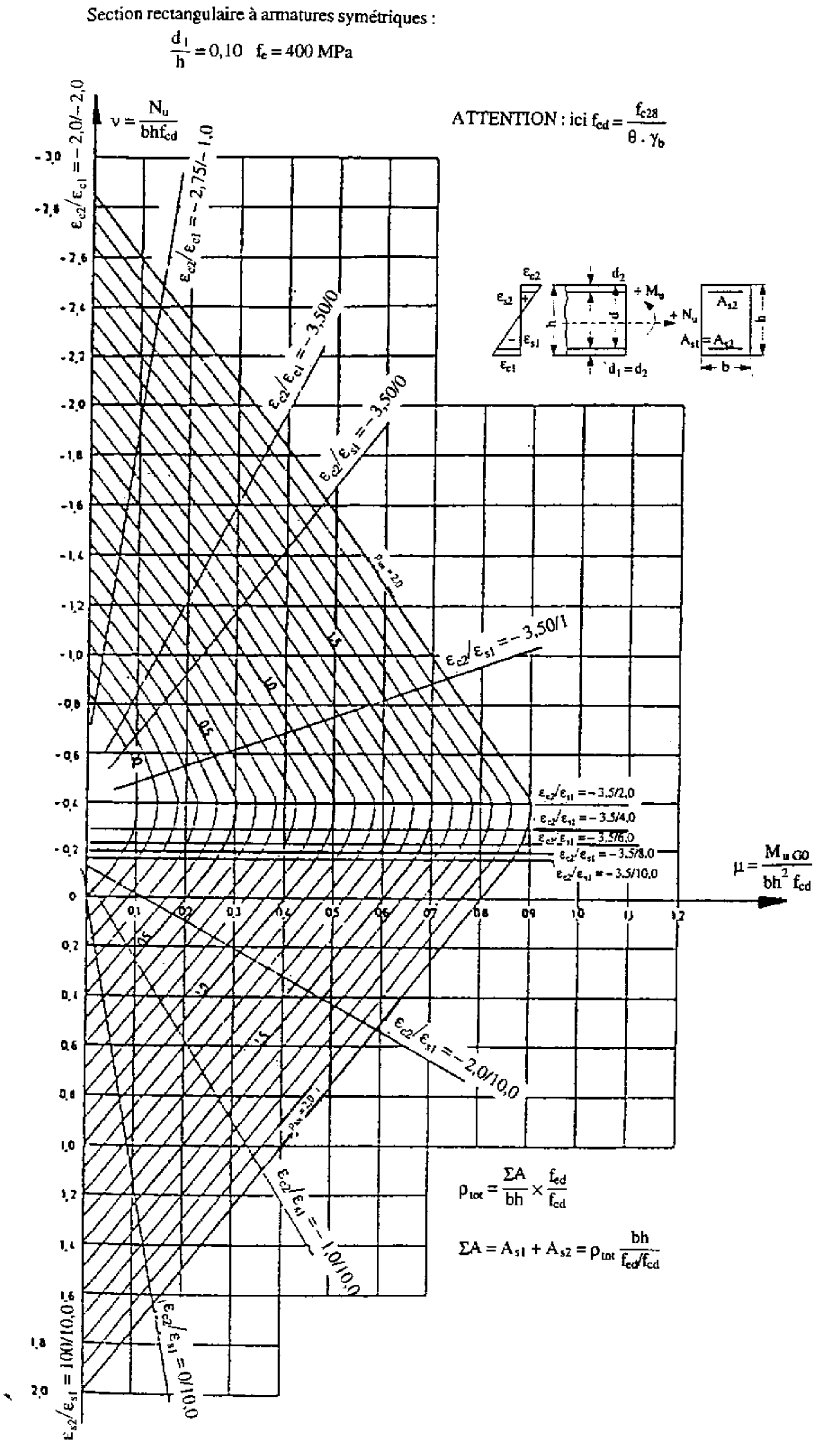
A partir des ces sollicitations Ni et Mi, on définit les paramètres suivants:

- $v = \dfrac{Ni}{B \times F_{bu}}$: effort normal réduit.
- $\mu = \dfrac{Mi}{BhF_{bu}}$: moment fléchissant réduit en G0 (h représente la hauteur de la section dans le plan de flexion).
- $\rho = \dfrac{(\sum A_j) F_{ed}}{BF_{bu}}$: pourcentage mécanique des armatures.

ATTENTION, il est rappelé qu'une valeur positive de $v = \dfrac{Ni}{B \times F_{bu}}$ correspond à un effort de compression.

Pour une position donnée des armatures, on fait varier leur sections, ce qui fait varier ρ et nous permet d'obtenir un réseau de courbes appelées diagrammes d'interactions.

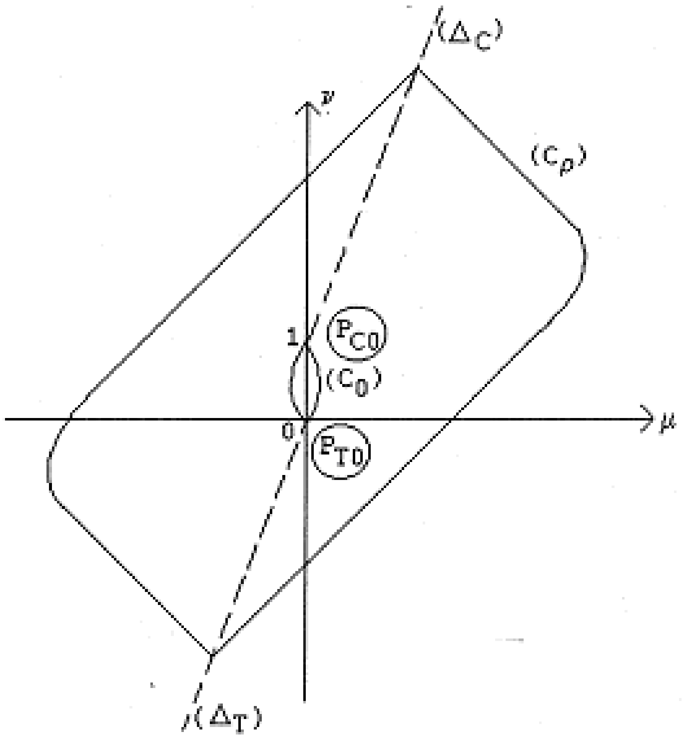
Voici un exemple de diagramme d'interaction, pour une section rectangulaire armée symétriquement (issu des abaques de dimensionnement du CEB) :



Les différentes courbes, correspondant à différentes valeurs de ρ, sont disposés à intervalle constant suivant les droites correspondantes à un rapport de déformations et donc une valeur constante de y.

En effet, lorsque l'on fait varier la section d'armature, on le fait proportionnellement pour toutes les armatures Aj.

Isolons une de ces courbes :



Si on prend le point P_{T0} correspondant à la traction pure, on a:

$$\begin{cases} M_T = -F_{ed}\sum A_j d_j \\ N_T = -F_{ed}\sum A_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -\dfrac{F_{ed}}{BhF_{bu}}\sum A_j d_j \\ \nu = -\dfrac{F_{ed}}{BF_{bu}}\sum A_j \end{cases} \Rightarrow \frac{\mu}{\nu} = \frac{\sum A_j d_j}{h\sum Aj} = K$$

On se rend compte que le point P_T se déplace sur une droite ΔT, passant par le point P_{T0}, d'origine (0,0) et de pente K.

Il faut donc faire l'interpolation linéaire en direction de ces droites.

Si on prend le point P_C correspondant à la compression pure, on a:

$$\begin{cases} M_C = F_{ed}\sum A_j d_j \\ N_C = BF_{bu} + F_{ed}\sum A_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \dfrac{F_{ed}}{BhF_{bu}}\sum A_j d_j \\ v = \dfrac{BF_{bu+}F_{ed}\sum A_j}{BF_{bu}} = 1 + \dfrac{F_{ed}\sum A_j}{BF_{bu}} \end{cases}$$

d'où:

$\dfrac{\mu}{v-1} = \dfrac{\sum A_j d_j}{h\sum A_j} = K$ et le point P_C se déplace sur une droite ΔC passant par le point P_{C0} de coordonnée (0,1) et de pente K

L'interpolation linéaire doit donc se faire entre les différentes valeurs de ρ, et en suivant la direction des droites Δ.

Pour la suite, il est important de retenir que pour une section entièrement comprimée, on a les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} N_1(y) = \int_0^Y b_\xi \sigma_{c\xi} d\xi + \sum_1^N A_j \sigma_{sj} = BF_{bu} + F_{ed}\sum_1^N A_j \\ M_1(y) = \int_0^Y b_\xi \sigma_{c\xi}(v'-\xi) d\xi + \sum_1^N A_j \sigma_{sj} d_j = F_{ed}\sum_1^N A_j d_j \end{cases}$$

puis

- $v = \dfrac{Ni}{B \times F_{bu}} = \dfrac{BF_{bu} + \sum_1^N A_j \sigma_{sj}}{BF_{bu}} = 1 + \dfrac{F_{ed}\sum_1^N A_j}{BF_{bu}}$.
- $\mu = \dfrac{Mi}{BhF_{bu}} = \dfrac{F_{ed}}{BhF_{bu}}\sum_1^N A_j d_j$
- $\rho = \dfrac{(\sum A_j)F_{ed}}{BF_{bu}}$: pourcentage mécanique des armatures.

Ces diagrammes d'interactions peuvent être utilisés soit en vérification de sections, soit en dimensionnement.

Utilisation des diagrammes d'interactions en dimensionnement d'une section

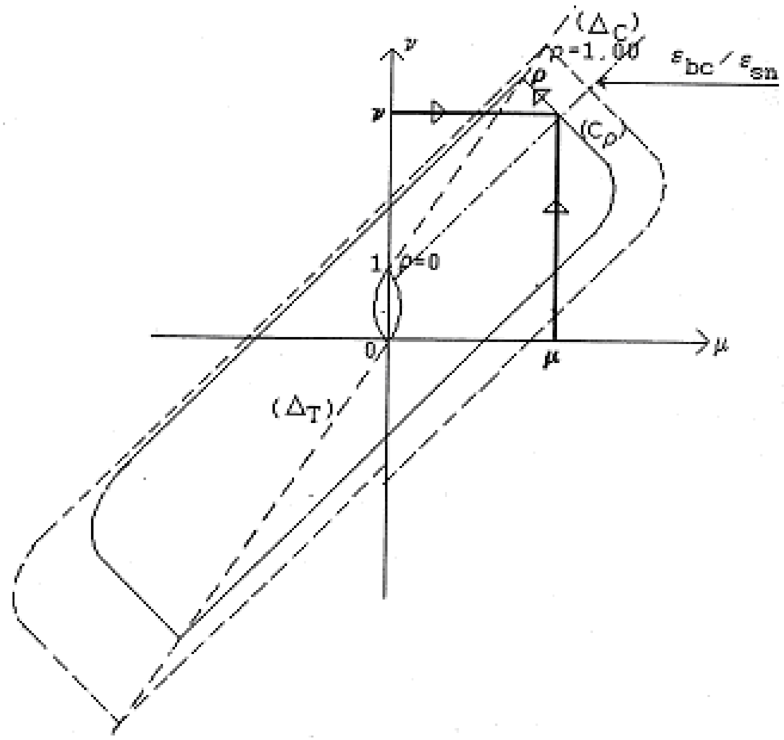
Les données du problème sont:

- Caractéristiques des matériaux: $F_{bu} = \dfrac{0,85F_{c28}}{\theta\gamma_b}$ et $F_{ed} = \dfrac{Fe}{\gamma_s}$
- Nu et M_{uGo} (MuG0=Nu(e1 + e2))
- Dimensions de la section de béton: b0 et h

On calcul les quantités suivantes:

- $v = \dfrac{Nu}{b0 \times h \times F_{bu}}$
- $\mu = \dfrac{M_{uG0}}{b_0 \times h^2 \times F_{bu}}$

On détermine ensuite, sur le diagramme d'interaction correspondant aux couples εbc et εs, le pourcentage mécanique d'armatures ρ.



Puis on calcul les armatures nécessaires en les disposant symétriquement:

$$\rho = \frac{(\sum A)F_{ed}}{b_0 h F_{bu}} \Rightarrow \boxed{\sum A = \rho \frac{F_{bu}}{F_{ed}} b_0 h}$$

Utilisation des diagrammes d'interactions en dimensionnement d'une section

Les données du problème sont:

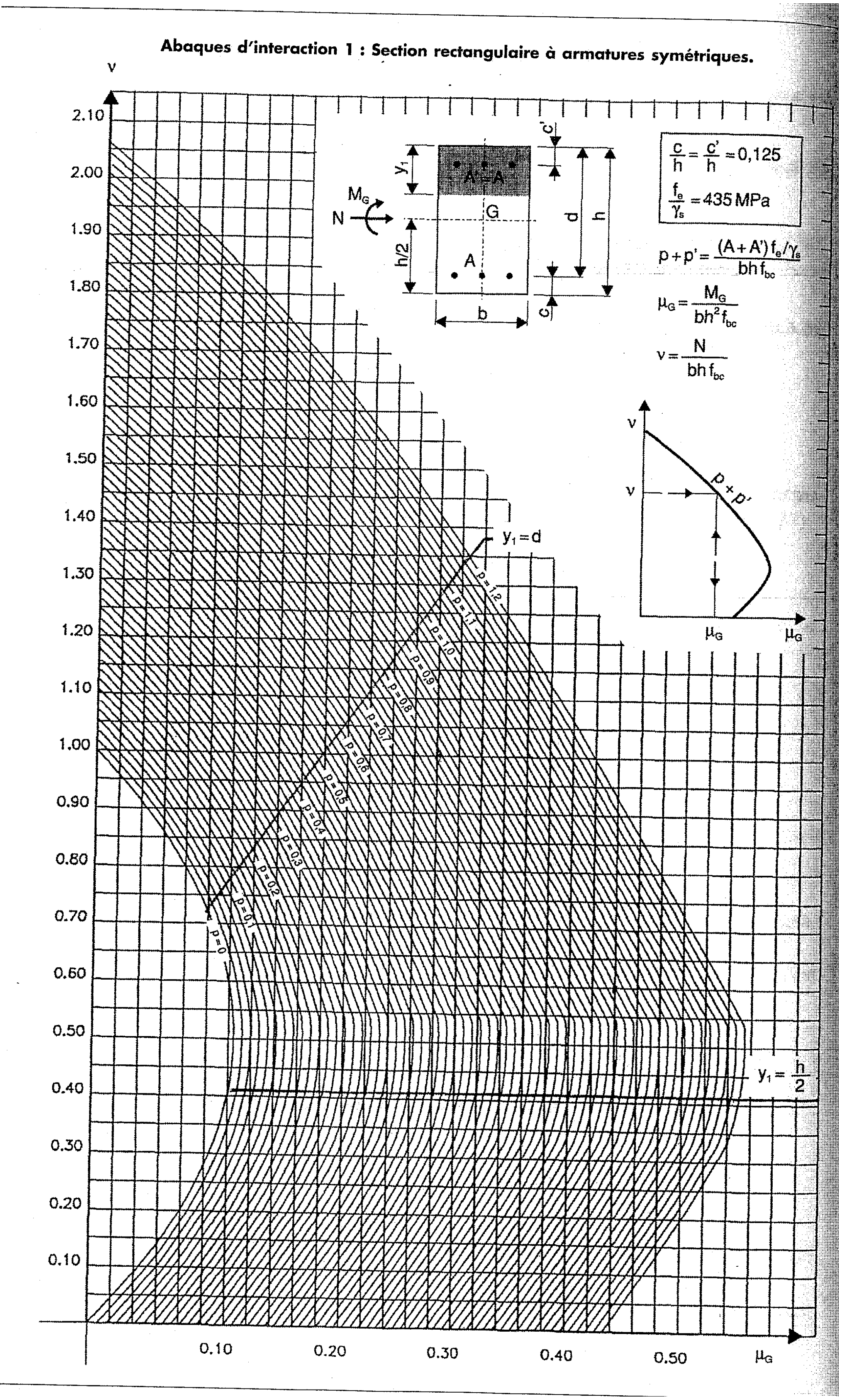
- Caractéristiques des matériaux: $F_{bu} = \dfrac{0{,}85F_{c28}}{\theta\gamma_b}$ et $F_{ed} = \dfrac{Fe}{\gamma_s}$
- Nu et M_{uGo} (MuG0=Nu(e1 + e2))
- Dimensions de la section de béton:b0 et h
- Quantités et position des armatures: $\sum A$

On calcul les quantités:

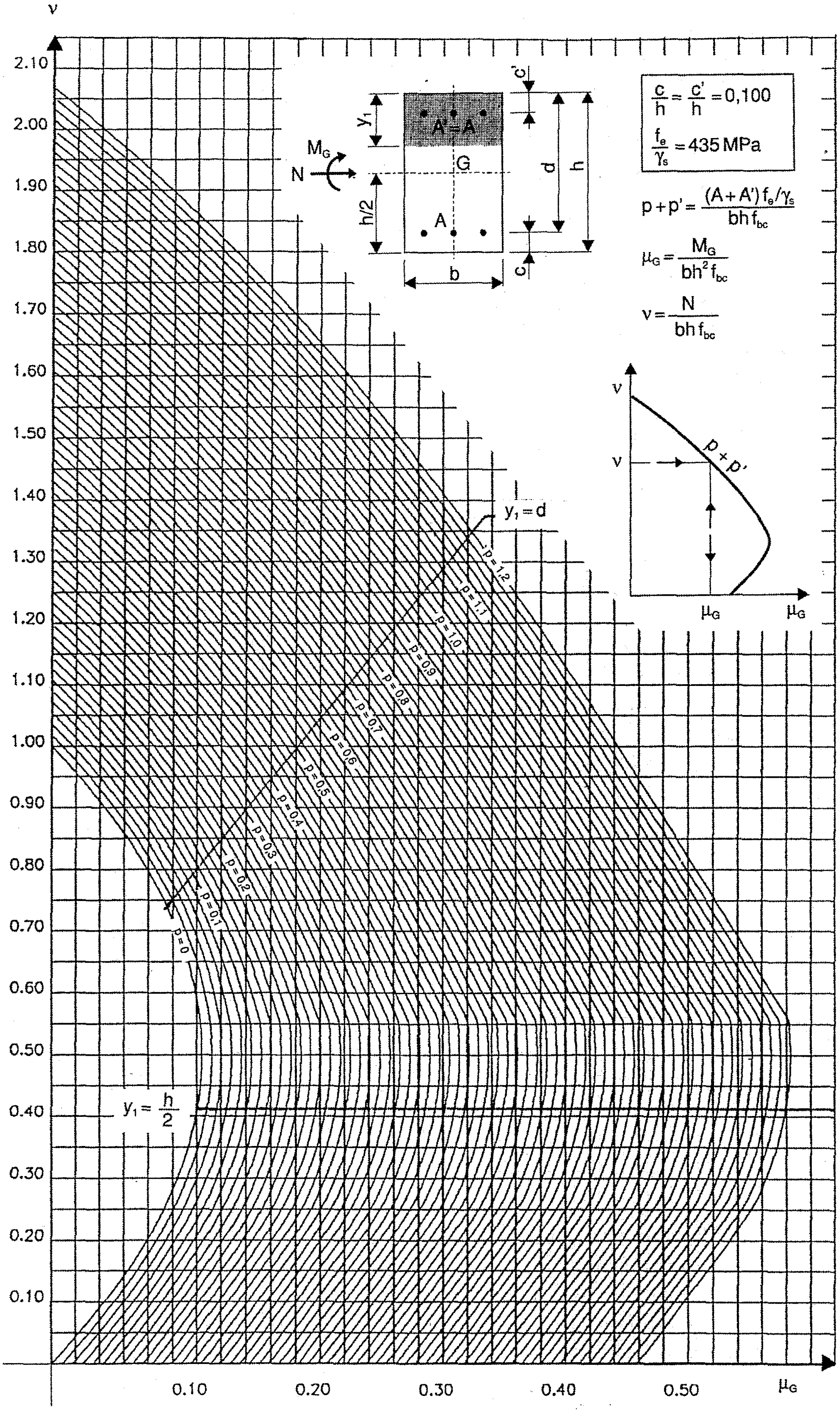
- $\nu = \dfrac{Nu}{b_0 \times h \times F_{bu}}$
- $\mu = \dfrac{M_u}{b_0 \times h^2 \times F_{bu}}$
- $\rho = \dfrac{(\sum A)F_{ed}}{b_0 h F_{bu}}$

On vérifie sur le diagramme que le point se trouve à l'intérieur ou sur la courbe correspondante au pourcentage d'armature.

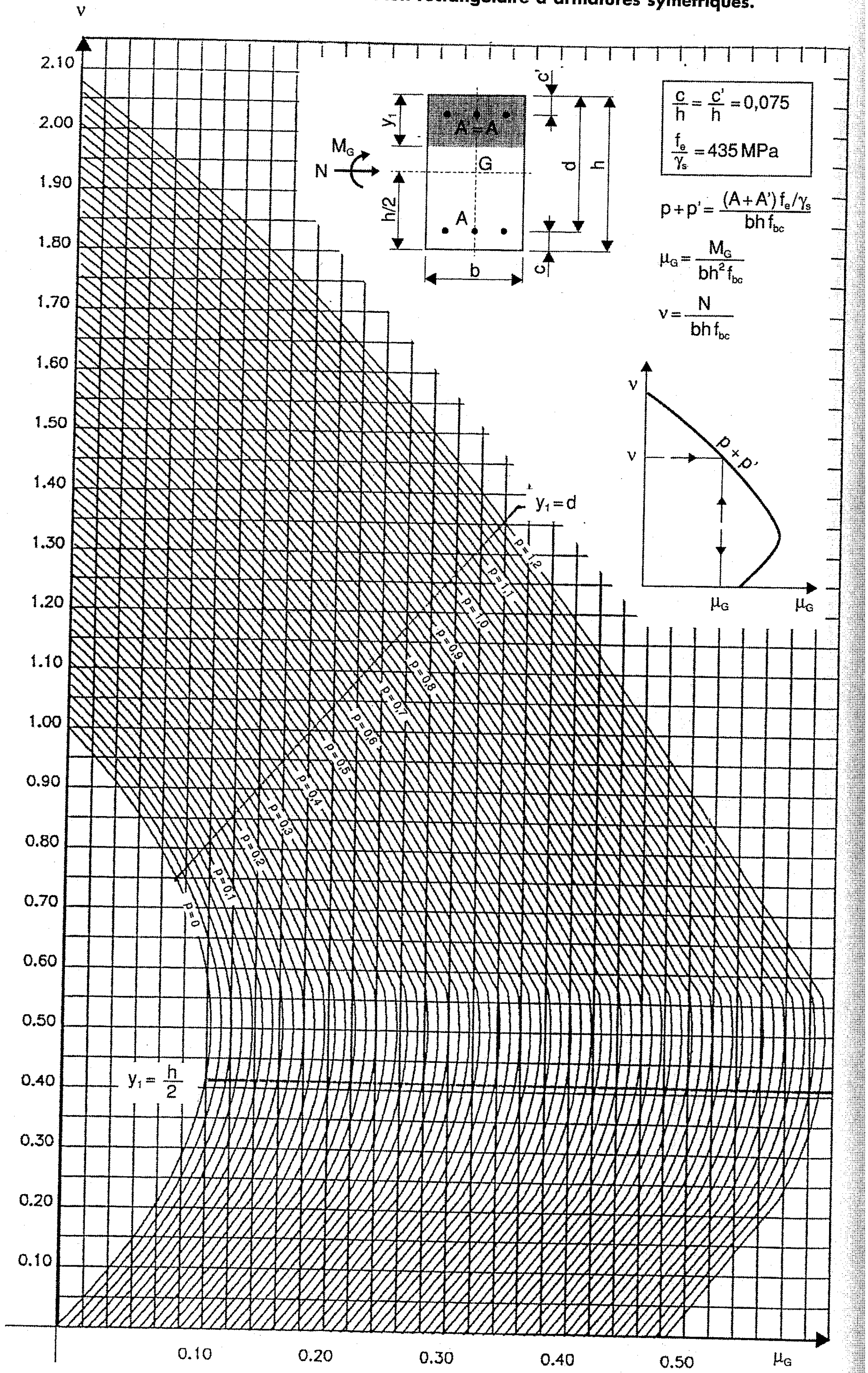
6.10.5. Exemples d'abaques.



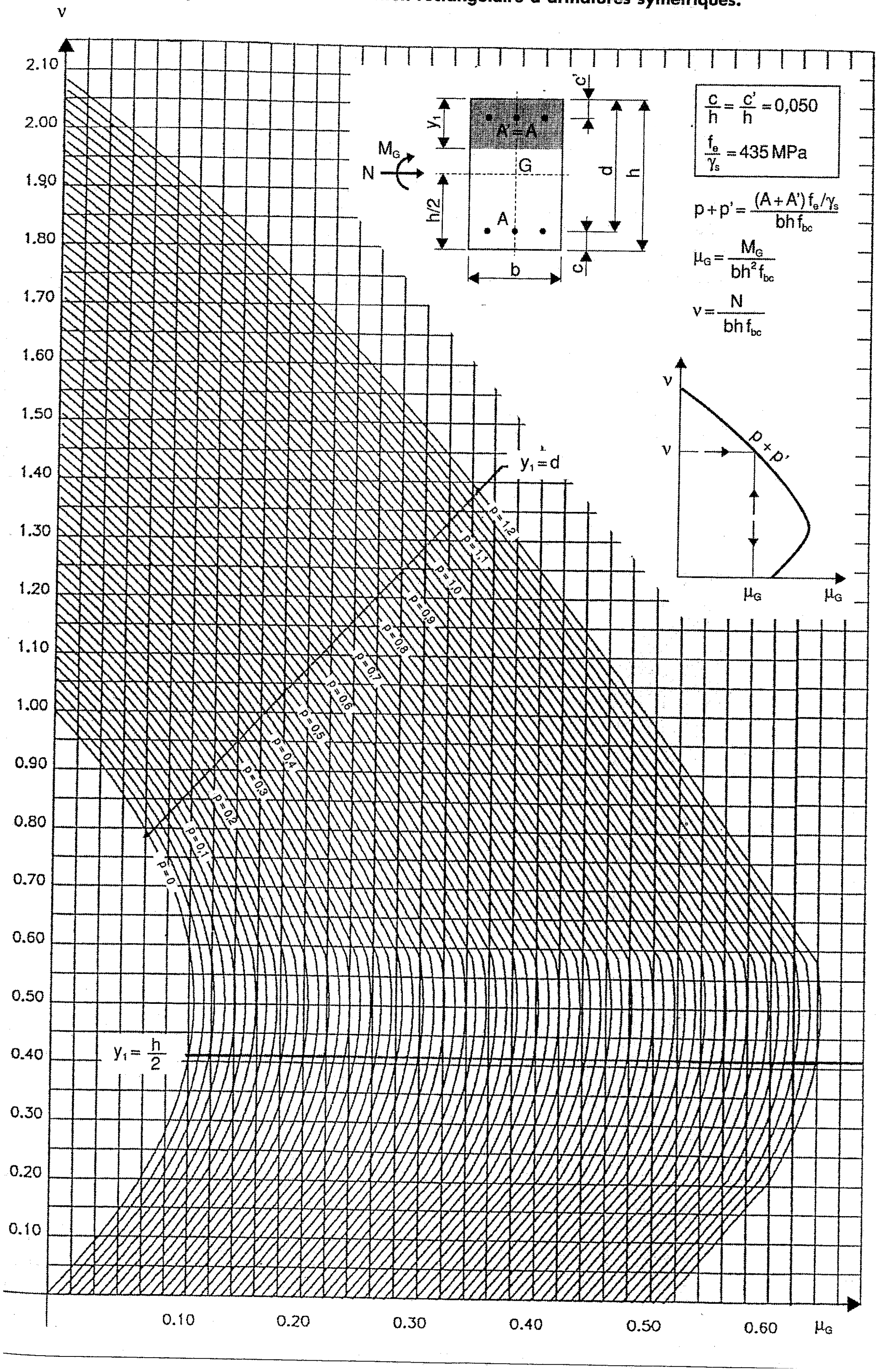
Abaque d'interaction 2 : Section rectangulaire à armatures symétriques.



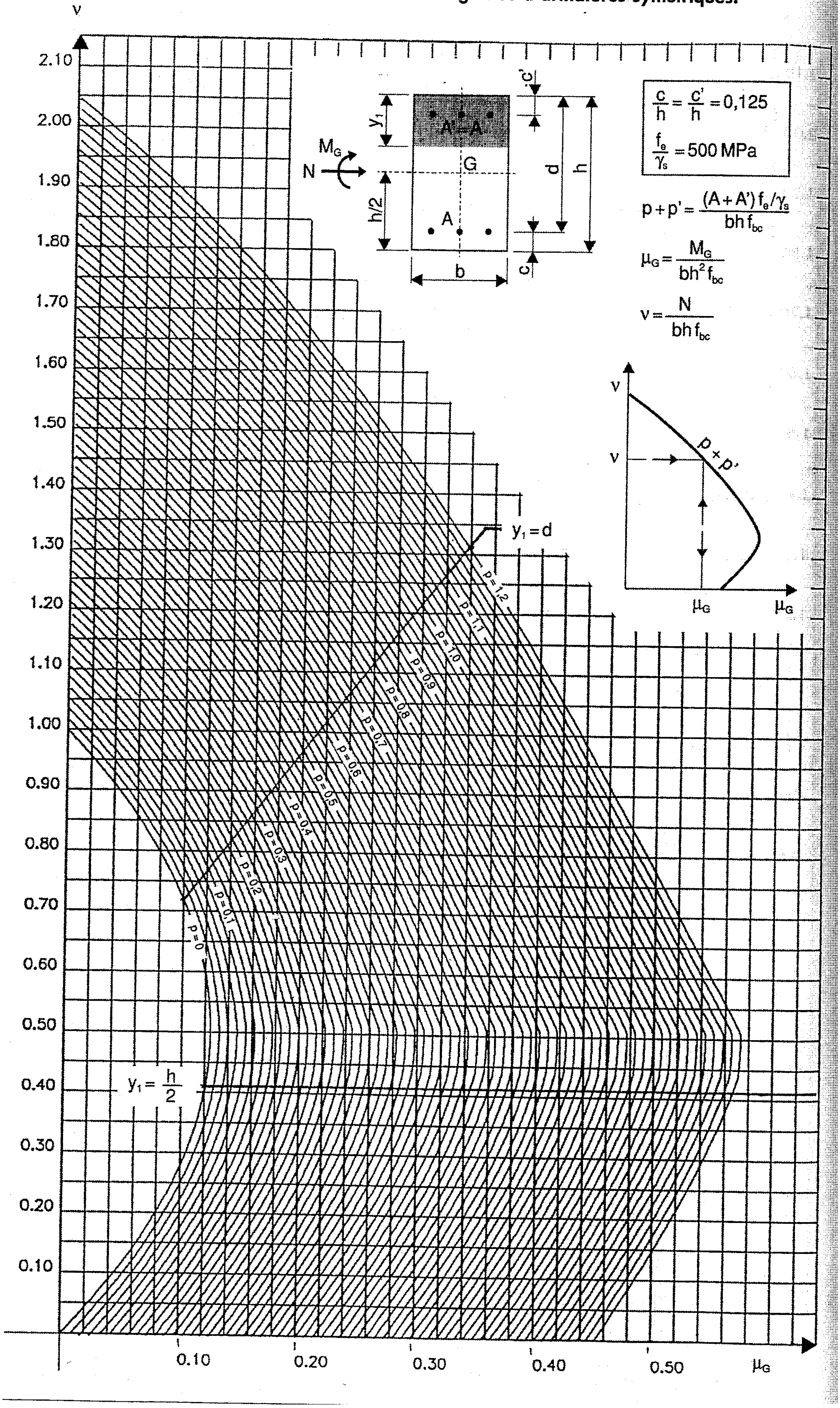
Abaque d'interaction 3 : Section rectangulaire à armatures symétriques.



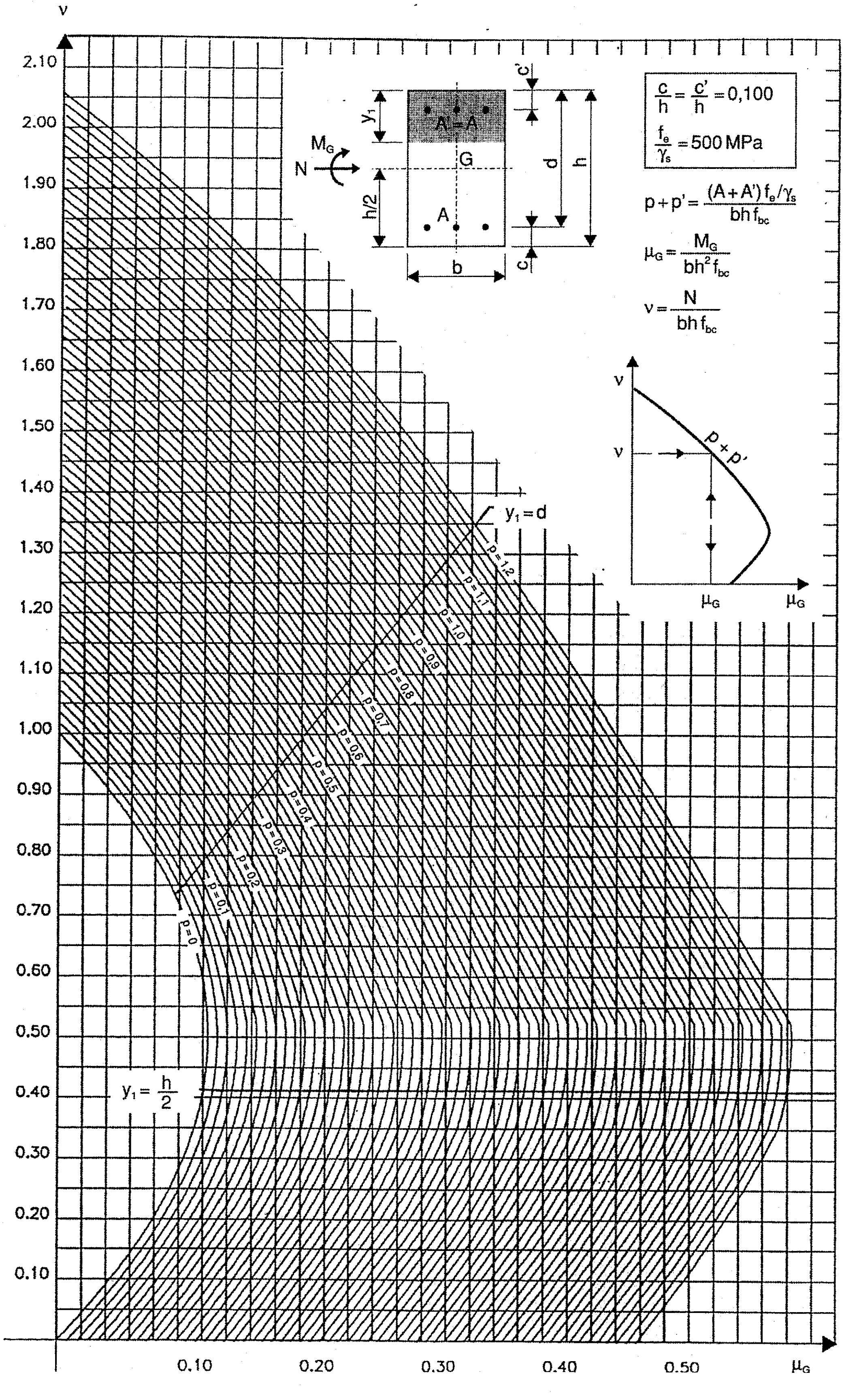
Abaque d'interaction 4 : Section rectangulaire à armatures symétriques.



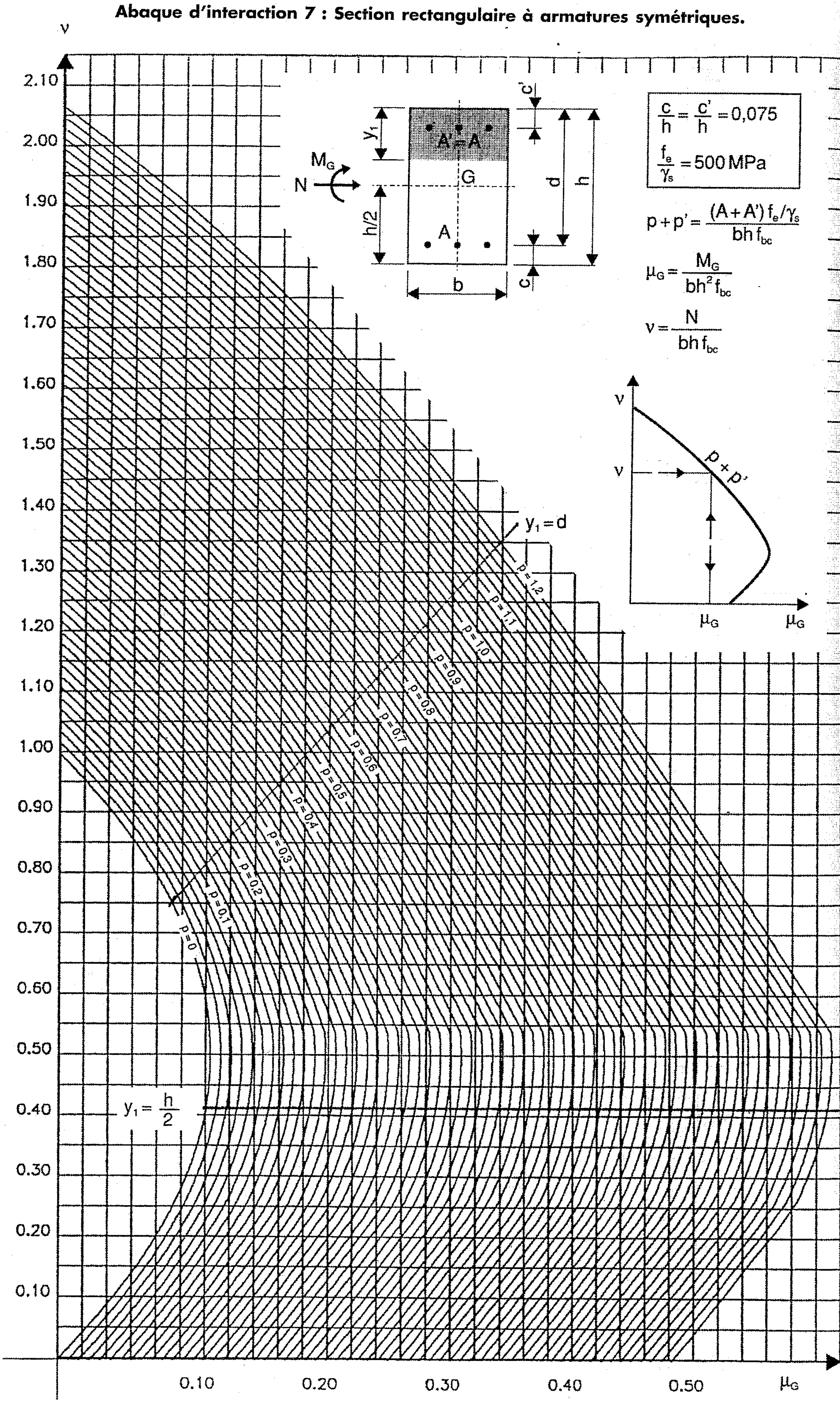
Abaque d'interaction 5 : Section rectangulaire à armatures symétriques.



Abaque d'interaction 6 : Section rectangulaire à armatures symétriques.



Abaque d'interaction 7 : Section rectangulaire à armatures symétriques.



Abaque d'interaction 8 : Section rectangulaire à armatures symétriques.