

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

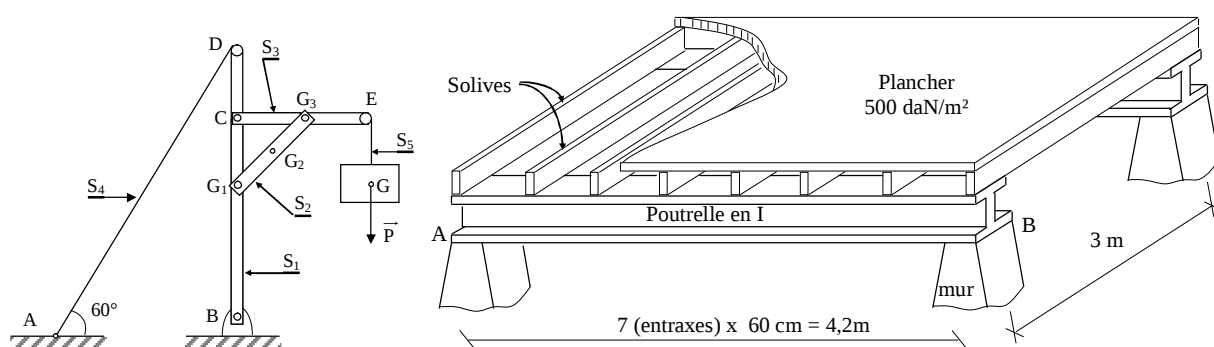
PAIX – TRAVAIL – PATRIE

MINISTERE DES TRAVAUX PUBLICS

REPUBLIC OF CAMEROON

PEACE – WORK – FATHERLAND

MINISTRY OF PUBLIC WORKS



COURS DE RESISTANCE DES MATERIAUX

Par

Valentin MAKOMRA
PLET en Construction Mécanique
DEA en Science de l'Ingénieur
Enseignant à l'ENSTP

Année Académique 2012-2013

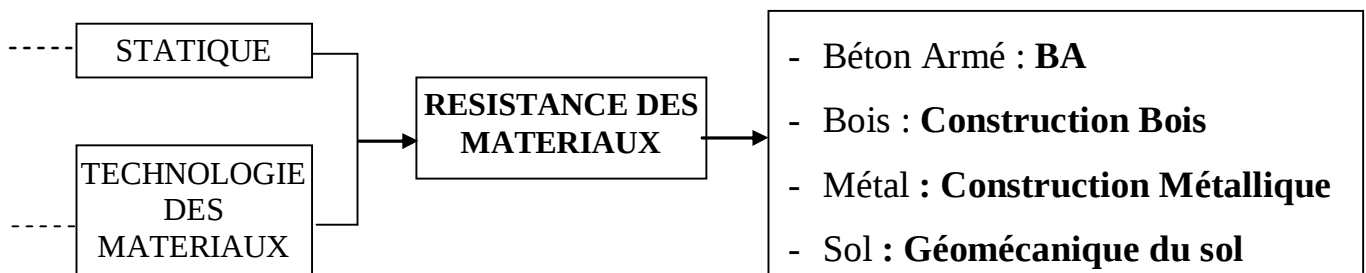
AVANT-PROPOS

Ce cours intitulé Résistance Des Matériaux (RDM) est destiné aux étudiants en Technologie des bâtiments et Travaux Publics (Architecture, Génie Civil, etc...).

Il vise à les familiariser aux dimensionnements des structures en faisant appel à des calculs qui prévoient le comportement de l'objet dont la conception doit réunir les meilleures conditions de sécurité, d'économie et d'esthétique.

Ce support de cours est en perpétuelle correction. C'est pourquoi, je serais reconnaissant aux étudiants et éventuels lecteurs de ne pas hésiter à me faire toute suggestion susceptible d'améliorer le contenu de ce document à l'adresse makomra@yahoo.fr

PLACE DU COURS DANS LE PROGRAMME GENERAL



« Se permettre de tout penser serait manquer de savoir vivre : les meilleures preuves de respect qu'on puisse donner à l'intelligence du lecteur, c'est de lui laisser quelque chose à penser. »

Lawrence Sterne

SOMMAIRE

AVANT-PROPOS 1 :	i
SOMMAIRE :	ii
LEÇON 1 : GENERALITE SUR LA RESISTANCE DES MATERIAUX	1
1-1 OBJET DE LA RDM	2
1-2 HISTORIQUE DE LA RDM	2
1-3 HYPOTHESES DE LA RDM	3
LEÇON 2 : EFFORTS DE COHESION ET NOTION DE CONTRAINTE	10
2.1 EFFORTS INTERIEURS	10
2.2 DENOMINATION DES COMPOSANTES DES EFFORTS INTERIEURS	14
2.3 DIAGRAMMES DES EFFORTS DE COHESION	16
2-4 EXERCICE DE CONSOLIDATION	17
2-5 FORMULES DES REACTIONS D'APPUI, EFFORTS TRANCHANTS ET MOMENTS FLECHISSANTS DE QUELQUES TYPES DE POUTRES SUR APPUI SIMPLE	18
2.6 NOTION DE CONTRAINTE ET VECTEUR CONTRAINTE	18
LEÇON 3 : CARACTERISTIQUES DES SECTIONS DROITES DES POUTRES	11
3.1 CALCUL D'AIRES ET DES COORDONNEES DE CENTRE DE GRAVITE DES AIRES	21
3.2 MOMENT STATIQUE	24
3.3 MOMENT QUADRATIQUE	25
3.3 MOMENT QUADRATIQUE POLAIRE	27
3.4 RAYON DE GIRATION	27
3.5 THEOREME DE HUYGENS	27
3.6 TABLEAU DES MOMENTS QUADRATIQUES DE CERTAINES SECTIONS ELEMENTAIRES	28
3.7 EXEMPLE D'APPLICATION	28
3.8 EXERCICE DE CONSOLIDATION	29
3.9 MODULE DE RESISTANCE A LA FLEXION	30
3.10 EXERCICE D'APPLICATION	30
LEÇON 4 : TRACTION ET COMPRESSION	32
INTRODUCTION	33
4.1 TRACTION	33
4.2 COMPRESSION	40
LEÇON 5 : CISAILLEMENT	32
5.1 DEFINITION	42
5.2 EFFORT DE COHESION	42
5.3 ESSAI DE CISAILLEMENT REEL	42
5.4 ETUDE DE DEFORMATION	43
5.5 ETUDE DES CONTRAINTES	43
5.6 CONDITION DE RESISTANCE	44
5.7 EXERCICE D'APPLICATION	44
LEÇON 6 : TORSION	32
6.1 DEFINITION	45
6.2 HYPOTHESE	45
6.3 ESSAI	45
6.4 ETUDE DES DEFORMATIONS	46
6.5 ETUDE DES CONTRAINTES	46
6.6 EQUATION DE LA DEFORMATION (Relation déformation et moment de torsion)	47
6.7 CONDITION THEORIQUE DE RESISTANCE	47
6.8 EXERCICE D'APPLICATION	47

LEÇON 7 : FLEXION SIMPLE	49
7.1 DEFINITION	49
7.2 RELATION ENTRE L'EFFORT TRANCHANT ET LE MOMENT DE FLEXION	49
7.3 DETERMINATION DE L'ALLONGEMENT ε	50
7.4 RELATION CONTRAINTE NORMALE / MOMENT FLECHISSANT	51
7.5 EQUATION DE LA DEFORMEE	52
7.6 CALCUL DE LA FLECHE ET DE LA PENTE	52
7.7 CONTRAINTE TANGENTIELLE	56
7.8 COMPARAISON DES CONTRAINTES	57
7.9 CRITERE DE DIMENSIONNEMENT	57
LEÇON 8 : FLAMBEMENT	59
8-1 DEFINITION	59
8-2 HYPOTHESES	59
8-3 CHARGE CRITIQUE D'EULER : F_c	59
8-4 LONGUEUR LIBRE DE FLAMBEMENT L	60
8-5 DOMAINE D'UTILISATION DU FLAMBEMENT : ELANCEMENT	60
8-6 ELANCEMENT CRITIQUE (λ_c)	60
8-7 CALCUL DE RESISTANCE AU FLAMBEMENT	61
8-8 EXEMPLE D'APPLICATION	61
8-9 EXERCICE DE CONSOLIDATION :	62
LEÇON 9 : METHODE DE LA DEFORMEE ET DES SUPERPOSITIONS	64
9.1 PRINCIPE GENERAL DE RESOLUTION	66
9.2 METHODE PAR INTEGRATION	66
9.3 METHODE DU PRINCIPE DE SUPERPOSITION	69
LEÇON 10 : POUTRES CONTINUES	71
10-1 DEFINITIONS	71
10-2 NOTATIONS	71
10-3 DETERMINATION DES ROTATIONS D'UNE TRAVEE ISOSTATIQUE	71
10-4 THEOREME DE TROIS MOMENTS	72
10-5 EXEMPLE D'APPLICATION	74
10-6 CAS DES TRAVEES ET APPUIS DE RIVE	77
10-7 DETERMINATION DES EFFORTS DE COHESION	79
LEÇON 11 : METHODES ENERGETIQUES	82
11-1 GENERALITES SUR LES ENERGIES INTERNES	82
11-2 DETERMINATION DES ENERGIES DE DEFORMATION	83
11-3 GENERALISATION	84
11-4 THEOREME DE RECIPROCITE DE MAXWELL-BETI	84
11-5 THEOREME DE CASTIGLIANO	86
11-6 THEOREME DE MENABREA	87
LEÇON 12 : LIGNE D'INFLUENCE – CHARGES MOBILES	89
12-1 DEFINITION	Erreur ! Signet non défini.
12-2 LIGNE D'INFLUENCE AUX APPUIS	89
12-4 LIGNE D'INFLUENCE DU MOMENT FLECHISSANT	89
12-5 APPLICATION DE LA LIGNE D'INFLUENCE AUX CHARGES LOCALISEES	89
FORMULAIRES	95
BIBLIOGRAPHIE	100

I^{ère} PARTIE :

LEÇON 1 : GENERALITE SUR LA RESISTANCE DES MATERIAUX
LEÇON 2 : EFFORTS DE COHESION ET NOTION DE CONTRAINTE
LEÇON 3 : CARACTERISTIQUES DES SECTIONS DROITES DES
POUTRES

LEÇON 1 : GENERALITE SUR LA RESISTANCE DES MATERIAUX

Objectifs spécifiques : Au terme de cette leçon, l'étudiant doit être capable :

- de saisir le but de la Résistance Des Matériaux
- de saisir les Hypothèses Fondamentales de la RDM : cas des poutres droites chargées dans leur plan de symétrie.

1-1 OBJET DE LA RDM

La RDM est la science du dimensionnement ; c'est la théorie du calcul des éléments des structures. Elle découle d'une théorie plus générale appelée Mécanique des Milieux Continus (MMC). En d'autres termes, c'est la discipline qui a pour but de rechercher ou d'imaginer d'abord les meilleures formes et ensuite déterminer les quantités de matières (dimensions) nécessaires et suffisantes à donner aux éléments d'une structure pour lui permettre de résister à l'action des forces qui le sollicitent.

Ce dimensionnement fait appel à des calculs qui prévoient le comportement de l'objet dont la conception doit réunir les meilleures conditions de sécurité, d'économie et d'esthétique.

La résistance des matériaux est un outil indispensable à toute modélisation en calcul des structures. Même si d'autres méthodes (par exemple les éléments finis) sont en général utilisées, un calcul rapide de RDM permet de vérifier les ordres de grandeur et de juger de l'opportunité d'utiliser d'autres méthodes plus complexes.

1-2 HISTORIQUE DE LA RDM

Les premières recherches scientifiques connues sur la résistance d'éléments de construction ne remontent qu'à la fin du XV^{ème} siècle avec les travaux de Galilée sur la tension et la flexion des poutres. Il ne semble pas que les constructions anciennes aient fait l'objet d'études prévisionnelles concernant la résistance. Bien évidemment, les constructions qui se sont effondrées ne sont plus présentes actuellement ! La cathédrale de Prague, par exemple, s'est effondrée six fois avant que son architecte soit le seul à accepter de mettre le feu aux échafaudages pour vérifier la tenue de la septième construction : c'est actuellement un bijou. L'absence de souci d'économie de matière, le sens élevé de l'esthétique (une forme esthétique est souvent une forme optimale vis-à-vis de la résistance), des connaissances empiriques ont permis la réalisation d'ouvrages durables.

En 1678, Robert Hooke énonce les bases de la théorie de l'élasticité linéaire (réversibilité et proportionnalité des déformations par rapport aux efforts), qui rend compte des petites déformations de la plupart des corps solides. Elle est utilisée peu après par **Edme Mariotte** et **Jean Bernoulli** pour résoudre des problèmes de flexion de poutres. Après les travaux de **Charles Augustin Coulomb**, **Henri Navier**, **Augustin-Louis Cauchy**, entre autres, au milieu du XIX^{ème} siècle, la résistance des matériaux est créée en tant que science

appliquée. Son développement rapide, dû aux travaux des ingénieurs du XX^{ème} siècle, a conduit à l'élaboration de nombreuses méthodes de calcul analytique qui ont pu être érigées en règles ou règlements à l'usage des bureaux d'étude. L'avènement des ordinateurs a rendu possible l'exploitation de méthodes numériques générales qui permettent de résoudre les problèmes posés par les structures complexes (assemblages de poutres, plaques). Les recherches sont, depuis les années 1970, orientées vers le développement de ces méthodes, vers l'étude des petites et grandes déformations permanentes des matériaux, des phénomènes de rupture, de la résistance aux environnements complexes (efforts évolutifs, hautes et basses températures) et vers l'utilisation de matériaux nouveaux (superalliages, polymères, matériaux composites, céramiques).

1-3 HYPOTHESES DE LA RESISTANCE DES MATERIAUX

Etant une théorie simplifiée de la mécanique des milieux continus, La RDM ne s'intéressera qu'à l'étude des solides particuliers, considérés ici comme déformables. Ainsi un certain nombre de restrictions sont nécessaires et elles porteront sur la géométrie du solide étudié, le matériau dont il est constitué, et dans une moindre mesure les liaisons et les efforts extérieurs.

1-3-1 HYPOTHESES SUR LA GEOMETRIE DU SOLIDE A ETUDIER

Une poutre est un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre d'inertie géométrique G décrit une courbe G_0G_1 (appelée ligne ou fibre moyenne), le plan (P) de (S) restant normal à la courbe G_0G_1 (Figure.1.1). Le centre d'inertie peut dans de nombreux cas être confondu avec le centre de gravité.

Si l'aire (S) est constante, la poutre est dite de **section constante** (fig. 1.1). Mais très souvent, en vue de proportionner les dimensions de la poutre aux efforts qu'elle doit supporter, l'aire (S) varie lorsque son centre de gravité décrit la fibre moyenne ; la poutre est alors dite de **section variable**, et l'on supposera que la section varie continûment le long de la fibre neutre (fig. 1.2 et fig. 1.3). La figure 1.4 donne un contre exemple de poutre.

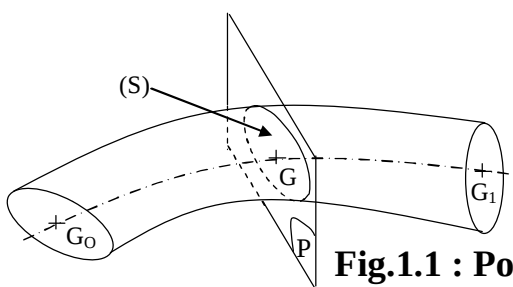


Fig.1.1 : Poutre

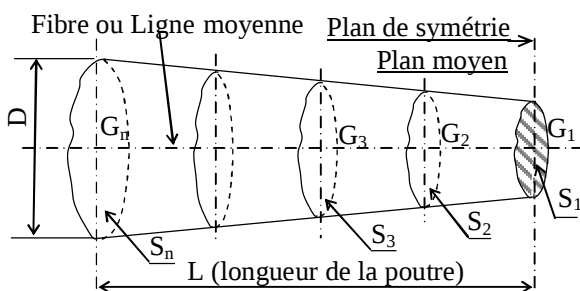


Fig. 1.3 : Poutre droite à section variable

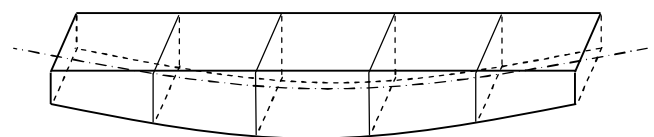


Fig. 1.2 : Poutre à section variable

Contre exemple :

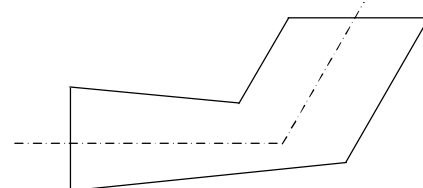


Fig. 1.4 : Contre exemple de poutre

Ainsi, on définit :

- une poutre gauche est une poutre dont la fibre moyenne **est une courbe gauche** ;
- une poutre plane est une poutre dont la fibre moyenne **est une courbe plane** ;
- une poutre droite est une poutre dont la fibre moyenne **est un segment de droite orienté**
- Une poutre à plan moyen est une poutre plane dont un plan de la fibre moyenne **est un plan de symétrie appelé plan moyen**.

1-3-2 HYPOTHESES SUR LE MATERIAU DU SOLIDE A ETUDIER

Pour toutes les études que nous mènerons en RDM, nous allons considérer que le matériau dont est constituée la poutre est : **homogène, isotrope et élastique linéaire**.

1-3-2-1 Homogénéité

Un milieu est dit **homogène**, lorsqu'il est constitué **de mêmes particules**. Un milieu, quel qu'il soit, ne peut être considéré comme homogène qu'au dessus d'une certaine échelle dimensionnelle qui lui est propre.

Prenons l'exemple d'un matériau très courant comme le béton : lorsqu'on regarde un poteau suffisamment loin, on voit le béton comme matériau homogène. Pourtant, à l'échelle microscopique, le béton est un matériau composite de granulats, de ciment, d'eau et d'adjuvants d'où hétérogène. Ainsi en est-il des aciers.

Il est aussi important de s'intéresser à la répartition spatiale des hétérogénéités dans le matériau. En effet si cette répartition est régulière (périodique par exemple), on pourra se ramener plus facilement à un matériau homogène équivalent.

Ainsi, pour l'étude des poutres, il faudra que la plus grande **dimension transversale** soit grande (supérieure à 10 fois) par rapport à la **dimension de la plus grande hétérogénéité** présente dans le matériau (taille des granulats du béton par exemple).

On peut aussi ajouter qu'en pratique c'est souvent un choix de modélisation de considérer qu'un matériau est homogène.

1-3-2-2 Isotropie

Un matériau est dit **isotrope s'il présente les mêmes propriétés dans toutes les directions de l'espace**.

S'agissant des caractéristiques mécaniques des matériaux, il est parfois assez intuitif de dire si un matériau est isotrope ou non. Si l'on considère un matériau qui possède des fibres ayant une direction privilégiée (comme le bois), du fait de l'orientation particulière de ces fibres, le bois ne sera pas isotrope.

Une expérience simple menée avec une peau de banane permet facilement de se rendre compte qu'il est plus facile de déchirer la peau en tirant dans la direction perpendiculaire à la plus grande direction (direction orthogonale aux fibres de la peau) qu'en tirant dans la direction des fibres.

1-3-2-3 Élasticité linéaire

Un matériau est dit **élastique** s'il retrouve entièrement sa forme ou son volume après avoir subi un cycle de charge/décharge quelconque.

1-3-3 HYPOTHESES SUR LA DEFORMATION

1-3-3-1 Déformations

Les poutres sont étudiées dans l'Hypothèse des Petites Perturbations (HPP). Les déformations sont supposées très petites afin de rester dans le domaine d'élasticité linéaire de la matière.

1-3-3-2 Hypothèse de Navier-Bernoulli

Hypothèse de Navier-Bernoulli : **les sections normales à la ligne moyenne restent planes et normales à la ligne moyenne pendant la déformation de la poutre**. Un énoncé souvent plus répandu est de dire que toute section droite (i.e. plane et perpendiculaire à la ligne moyenne) avant déformation reste **droite** après déformation. (figure 1.5)

Cette hypothèse est bien vérifiée dans de nombreux cas de sollicitations simples.

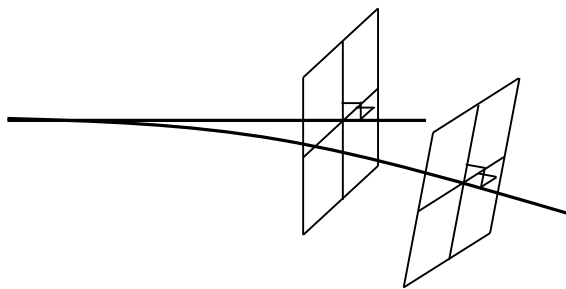


Fig. 1.5 : Visualisation de l'hypothèse de Navier-Bernoulli

1-3-4 CONDITIONS AUX LIMITES

Les conditions aux limites qui s'appliquent sur une poutre sont de deux natures. Celles constituées par les **liaisons** avec l'extérieur, et celles liées à la présence du **chargement**.

1-3-4-1 Efforts liés aux chargements

Les charges qui s'appliquent au modèle poutre sont principalement de deux types : les charges **concentrées ou réparties de façon continue**.

1-3-4-1-1 Charges concentrées

Le contact entre deux solides se fait en un point.

Exemple : Bille sur un plan.

L'action du plan sur la bille peut être représentée par une force $\vec{F}_{0/1}$.

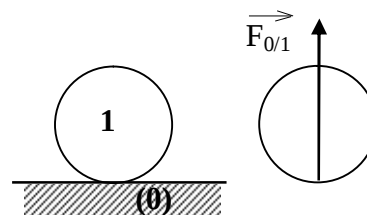


Fig.1.6

1-3-4-1-2 Charges réparties

On parle de charges réparties lorsque le contact entre deux solides se fait en plusieurs points. Elles peuvent être réparties suivant une ligne : **charges linéaires**, soit suivant une surface : **charge surfacique**.

Elles peuvent être soit à répartition uniforme réparties, soit à répartition variables.

1-3-4-1-2-1 Charge linéaire

Exemple 1: cylindre1 (un fût) sur un plan 0

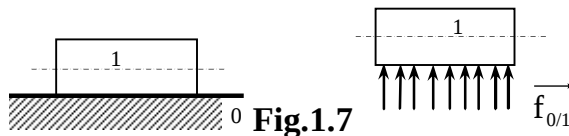


Fig.1.7

L'action du plan sur le cylindre peut être représentée par une force linéique uniformément répartie (force répartie uniformément le long d'une ligne) $\vec{f}_{0/1} \text{ (N.m}^{-1}\text{)}$.

La charge ici étant uniforme, l'ensemble de la charge linéique est équivalent à une force $\vec{F}_{0/1}$ située au centre de la ligne de contact

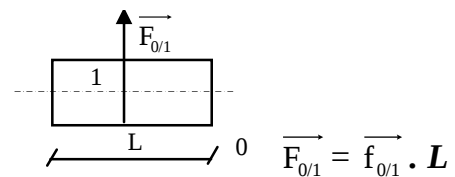
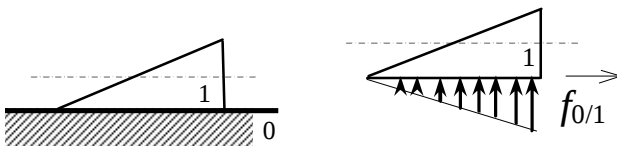


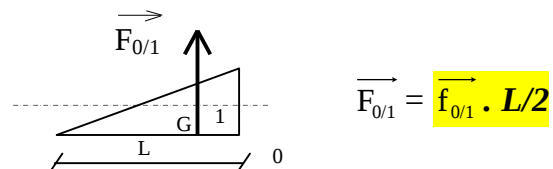
Fig.1.8

$$\vec{F}_{0/1} = \vec{f}_{0/1} \cdot L$$

Exemple 2: Demi cylindre1 sur un plan 0



La charge ici n'étant pas uniforme, l'ensemble de la charge linéique est équivalent à une force $\vec{F}_{0/1}$ située **au centre du triangle de la ligne de contact** (Représenter-la sur la figure ci-dessous)



$$\vec{F}_{0/1} = \vec{f}_{0/1} \cdot L/2$$

L'action du plan sur le cylindre peut être représentée par une force linéique à répartition variable (force variablement répartie le long d'une ligne) $\vec{f}_{0/1} \text{ (N.m}^{-1}\text{)}$.

1-3-4-1-2-2 Charge surfacique

Exemple: Boîte sur un plan.

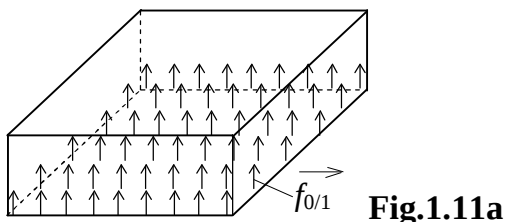


Fig.1.11a

L'action du plan sur la boîte peut être représentée par une force surfacique (force répartie sur une surface, équivalente à une pression) $\vec{f}_{0/1} \text{ (N.m}^{-2}\text{)}$. (fig.1.11)

Si la charge est uniforme, alors l'ensemble de la charge surfacique est équivalent à une force $\vec{F}_{0/1} = \vec{f}_{0/1} \cdot S$ située **au centre de la surface de contact G**. (figure 1.11b)

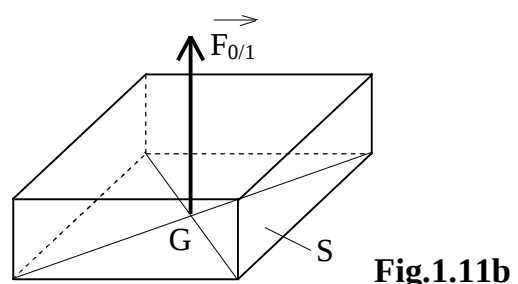
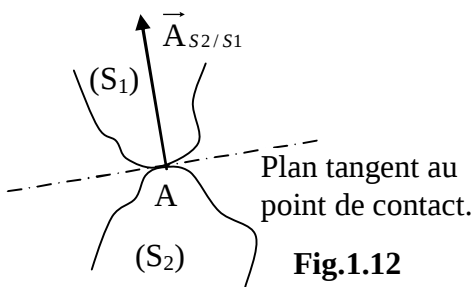


Fig.1.11b

1-3-4-2 Efforts au niveau des Liaisons

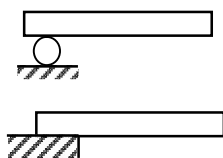
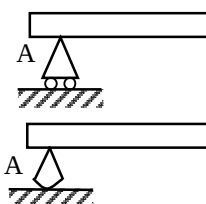
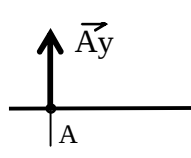
Les liaisons que l'on rencontre sont déjà connues (liaisons classiques). Néanmoins, le fait que l'on se borne aux poutres à plan moyen chargées dans leur plan, amène usuellement à distinguer les différents types de liaisons imposées aux poutres (on se place dans le cas de liaisons parfaites)

1-3-4-2 -1 Appui simple

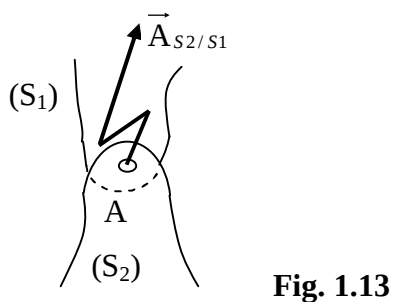


La force $\vec{A}_{S2/S1}$ résultant de l'appui simple (système (S_1) sur le système (S_2) est caractérisée par :

- Point d'application (**connu**) : **point de contact A.**
- Direction (**connue**) : **Normale au plan tangent en A**
- Sens (**connu**) : **dirigé vers le système (S_1) .**
- Intensité (**inconnue**) : **à déterminer.**

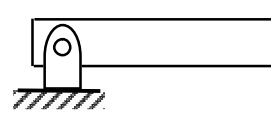
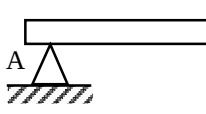
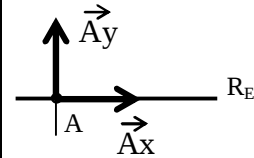
Exemple	Schématisation	Actions mécaniques
		

1-3-4-2-2 Appui double

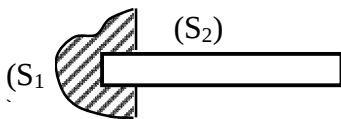


La force $\vec{A}_{S2/S1}$ résultant de l'appui simple du système (S_1) sur le système (S_2) est caractérisée par :

- Point d'application (**connu**) : **point de contact A.**
- Direction (**inconnue**) : **à déterminer**
- Sens (**inconnu**) : **à déterminer.**
- Intensité (**inconnue**) : **à déterminer.**

Exemple	Schématisation	Actions mécaniques
		

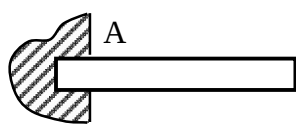
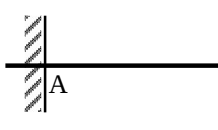
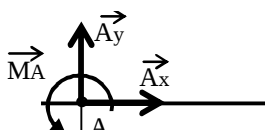
1-3-4-2-3 Appui triple (Encastrement ou appui fixe)



On dit que le système (S_2) est encasté dans (S_1) lorsque tout déplacement de l'un par rapport à l'autre est impossible.

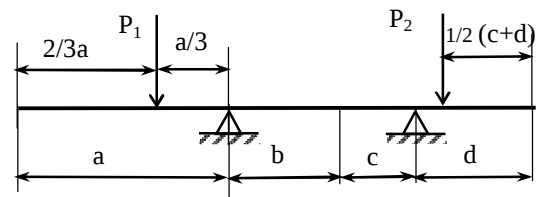
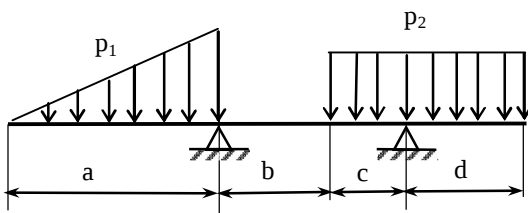
La force $\vec{A}_{S2/S1}$ résultant de l'appui simple du système (S_1) sur le système (S_2) est caractérisée par :

- Point d'application (**inconnu**) : **à déterminer**.
- Direction (**inconnue**) : **à déterminer**
- Sens (**inconnu**) : **à déterminer**.
- Intensité (**inconnue**) : **à déterminer**.

Exemple	Schématisation	Actions mécaniques
		

1-3-4-3 Exemple d'application

Soit la modélisation d'un système en équilibre ci-dessous. Représenter les charges équivalentes a P_1 et P_2 .



1-3-5 PRINCIPE DE SAINT-VENANT ET CONSEQUENCES

Nous exploiterons le principe de Saint-Venant dont voici l'énoncé :

Etant donné un solide déformable, si sur une partie (Σ) de sa frontière on remplace une distribution de forces appliquées par une autre distribution équivalente et agissant également sur (Σ) , les sollicitations restent inchangées dans toute région du solide suffisamment éloignée de (Σ) .

La conséquence directe de ce principe est que les résultats obtenus par un calcul de RDM sur une poutre ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des actions mécaniques extérieures concentrées et des liaisons. En pratique on peut considérer que les résultats sont valables à partir d'une distance égale à 2 fois la plus grande dimension transversale.

CE QU'IL FAUT RETENIR (CQFR):

1- **Définition** *La RDM est la discipline qui a pour but de rechercher ou d'imaginer d'abord les meilleures formes et ensuite déterminer les quantités de matières (dimensions) nécessaires et suffisantes à donner aux éléments d'une structure pour lui permettre de résister à l'action des forces qui le sollicitent.*

2- **Géométrie** : Le solide étudié est une poutre **droite** :

- dont le rayon de courbure de la ligne moyenne **est grand par rapport à la plus grande dimension transversale de la section droite ($R_C > 5D$)** ;
- dont les dimensions longitudinales **sont élevées par rapport aux dimensions transversales ($L > 5D$)**.
- dont la section droite est **constante** ou **variant progressivement**.
- qui a un plan de symétrie

3- **Matériau** : la poutre est constituée **d'un matériau homogène, élastique linéaire et isotrope**.

4- **Déformation** : On se place dans **l'hypothèse des petites perturbations (H.P.P.)**.

5- **Hypothèse de Navier-Bernoulli** : **les sections normales à la ligne moyenne restent planes et normales à la ligne moyenne pendant la déformation de la poutre**.

6- **Modélisation et conditions aux limites** :

- On peut modéliser une poutre droite uniquement **par sa ligne moyenne et sa section droite**.

Les conditions aux limites qui s'appliquent sur une poutre sont de deux natures. Celles constituées par les **liaisons** avec l'extérieur, et celles liées à la présence du **chargement**

- Les poutres sont chargées dans leur plan moyen par des actions mécaniques qui peuvent être **concentrées ou réparties**.

LEÇON 2: EFFORTS DE COHESION ET CONTRAINTES DANS LES POUTRES

Objectif spécifique : Au terme de cette leçon, l'étudiant doit être capable :

- de déterminer les efforts de cohésions d'une poutre sollicités et les nommer;
- de tracer les diagrammes de ces efforts
- de déterminer les contraintes normale et tangentielle d'une poutre sollicitée.

INTRODUCTION

Les efforts intérieurs représentent les actions mécaniques de cohésion au niveau de toute la section de la poutre alors que la notion de contrainte représente les actions mécaniques de cohésion au niveau de l'élément de surface de la section de la poutre.

On introduit dans un premier temps en utilisant la statique les efforts intérieurs, puis en se plaçant à l'échelle de l'élément de surface, la notion de contraintes.

2.1 EFFORTS INTERIEURS

Considérons une poutre $\{E\}$ (Fig. 2.1) que nous séparons fictivement en deux parties nommées $\{E_1\}$ et $\{E_2\}$, telles que :

$$\{E\} = \{E_1\} + \{E_2\}.$$

La séparation fictive introduite est une coupure au point G par une section droite (S). On note E_1 la partie gauche et E_2 la partie droite. On suppose que cette poutre est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ et $\vec{F}_4$.

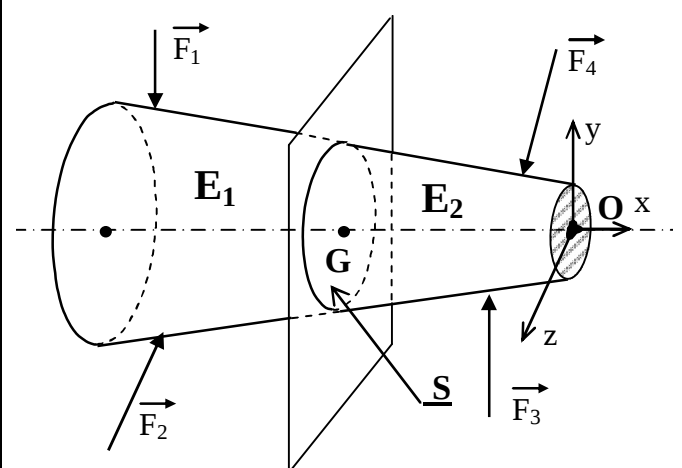


Fig. 2.1 : Poutre $\{E\}$

En isolant la poutre E et en appliquant le principe fondamental de la statique, nous avons donc : $\sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E} = \vec{0}$ et $\sum \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E}) = \vec{0}$.

Puis que : $\{E\} = \{E_1\} + \{E_2\}$ on peut écrire :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E} = \sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_1} + \sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_2} = \vec{0} \text{ et } \sum \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E}) = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_1}) + \sum \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_2})$$

A partir de la coupure fictive de la poutre définie précédemment, on peut représenter les deux parties de la poutre comme l'indique la figure fig.2.2.

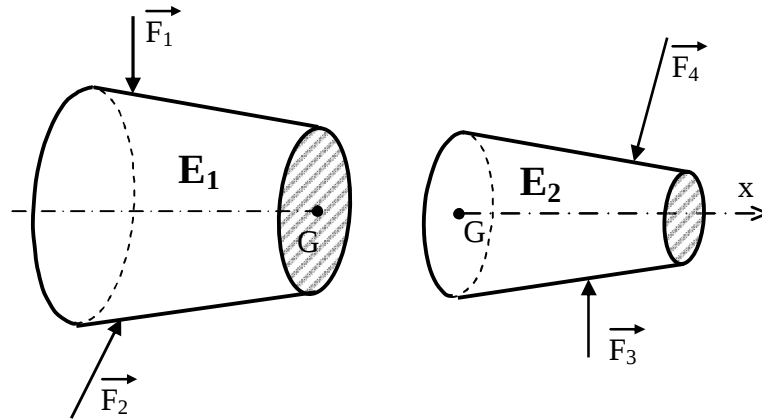


Fig. 2.2 : Poutre {E} séparée en deux parties

Isolons la partie ou le tronçon $\{E_1\}$ de la poutre. Les actions mécaniques qui s'appliquent à $\{E_1\}$ sont : les forces extérieures : $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ et celle due au système $\{E_2\}$ au niveau de la section (S).

Nous ignorons a priori la nature de ces actions mécaniques, cependant la liaison entre E_1 et E_2 peut transmettre toutes les composantes des actions mécaniques de E_2 sur E_1 , elle peut donc être modélisée par la liaison encastrement. Ainsi, les efforts possibles dans cette section en considérant le tronçon E_1 sont :

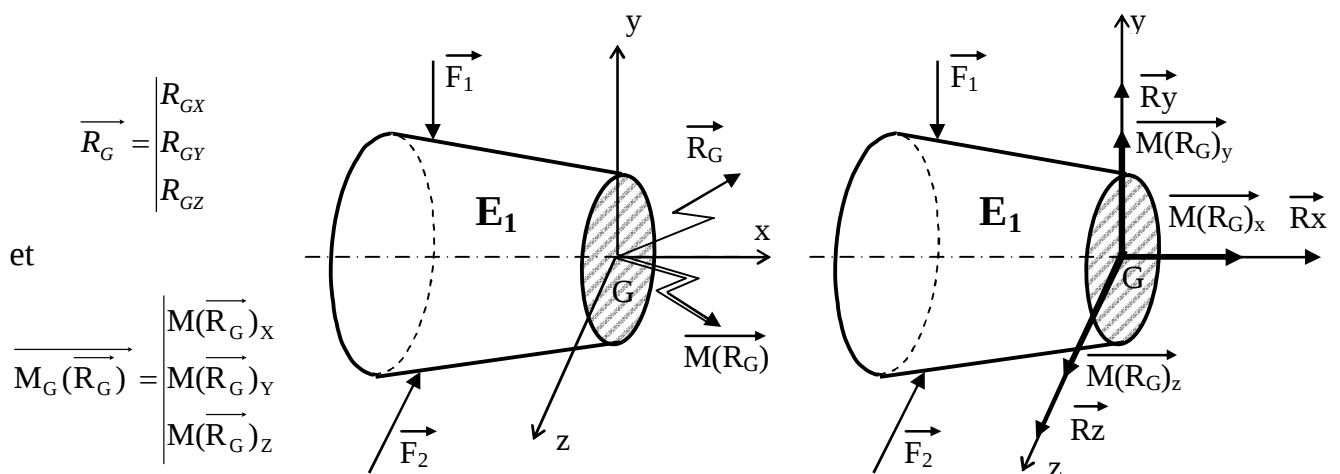


Fig. 2.3

Par définition, les actions mécaniques de E_2 sur E_1 sont appelées les actions intérieures ou actions de cohésion. C'est en effet cette liaison (les efforts et moments qu'elle transmet) qui assure la cohésion des deux éléments E_1 et E_2 de la poutre E.

$$\text{On notera : } \vec{R}_G = \sum \vec{F}_{\text{int}} \quad \text{et} \quad \vec{M}_G(\vec{R}_G) = \sum \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{int}})$$

NB : Le choix de prendre les actions de la partie droite E_2 sur la partie gauche E_1 est une convention.

$$\text{Nous avons donc : } \sum \vec{F}_{\text{int}} = \sum \vec{F}_{E_2 \rightarrow E_1} \quad \text{et} \quad \sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = \sum M_G(\vec{F}_{E_2 \rightarrow E_1})$$

On peut maintenant appliquer le principe fondamental de la statique au tronçon de poutre E_1 : $\sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_1} + \sum \vec{F}_{\text{int}} = \vec{0}$ et $\sum M_O(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_1}) + \sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = \vec{0}$: Ceci permet donc de donner un moyen de calculer les actions mécaniques de cohésion à partir des actions extérieures exercées sur le tronçon E_1 ; Soit:

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = - \sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_1} \quad \text{et} \quad \sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = - \sum M_O(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_1})$$

Isolons maintenant le tronçons E_2 : Le bilan des actions mécaniques est le suivant :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_2} + \sum \vec{F}_{E_1 \rightarrow E_2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum M_G(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_2}) + \sum M_G(\vec{F}_{E_1 \rightarrow E_2}) = \vec{0} :$$

$$\sum \vec{F}_{E_1 \rightarrow E_2} = - \sum \vec{F}_{E_2 \rightarrow E_1} \quad \text{et} \quad \sum M_G(\vec{F}_{E_1 \rightarrow E_2}) = - \sum M_G(\vec{F}_{E_2 \rightarrow E_1}) \Rightarrow$$

L'écriture du principe fondamental de la statique appliqué au tronçon E_2 donne donc :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_2} - \sum \vec{F}_{\text{int}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum M_O(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_2}) - \sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = \vec{0} :$$

Ceci permet de donner un autre moyen de calculer le torseur de cohésion à partir des actions extérieures exercées sur le tronçon E_2 :

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = \sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_2} \quad \text{et} \quad \sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = \sum M_G(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_2})$$

2.1.1 Principe de calcul

Par convention, les efforts intérieurs représentent les actions mécaniques exercées à travers une coupure par la partie située à droite (E_2) de la coupure sur la partie située à gauche (E_1) de la coupure (l'axe étant supposé orienté de gauche à droite).

Le torseur s'exprime au point G et peut, dans le cas d'un système isostatique, se calculer indifféremment à partir des actions mécaniques de l'extérieur sur E_2 ou à partir des actions mécaniques de l'extérieur sur E_1 .

On verra dans les applications qu'il existe souvent un choix plus judicieux que l'autre pour aboutir à la détermination des efforts intérieurs.

$$\text{On peut donc écrire : } \sum \vec{F}_{\text{int}} = \sum \vec{F}_{E_2 \rightarrow E_1} = \sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_2} = - \sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_1}$$

Note : Les efforts de cohésion sont modifiés lorsque l'on déplace la coupure le long de la poutre. On peut être amené à distinguer plusieurs coupures en particulier lorsqu'on rencontre une discontinuité liée à des efforts concentrés ou à une liaison.

2.1.2 Exemple d'application:

Soit une poutre droite à plan moyen reposant sur deux appuis A et B comme l'indique la figure ci-contre :

- 1-Schématiser les liaisons mécaniques en A et en B.
- 2-Déterminer les actions mécaniques extérieures sur la poutre en A et B..
- 3-Déterminer les efforts de cohésion de la poutre dans les tronçons [AC] et [CB].

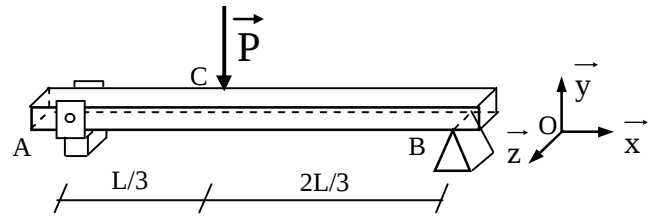


Fig. 2.4 : Poutre droite à plan moyen

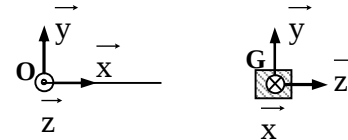
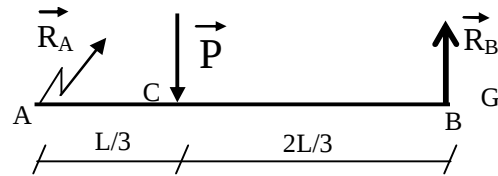
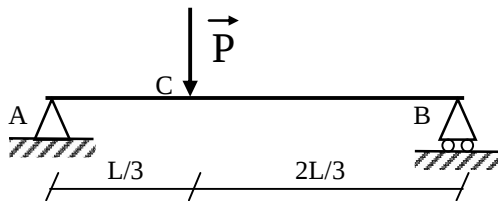


Fig. 2.5 : Ligne moyenne et repère

SOLUTION

1- Schématisation



2- Détermination de R_A et R_B :

$$R_A = \frac{2P}{3} \text{ et } R_B = \frac{P}{3}$$

3- Détermination des efforts intérieurs

Pour déterminer les efforts intérieurs il faut, compte tenu des efforts appliqués et des liaisons, réaliser ici deux coupures : $x \in [0, L/3]$ et $x \in [L/3, L]$

- Premier tronçon de la poutre $x \in [0, L/3]$:

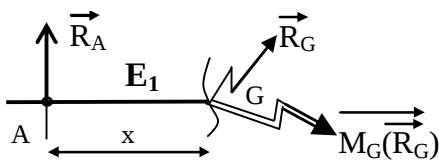


Fig. 2.7: Premier tronçon isolé

Le bilan des actions mécaniques qui s'exercent sur ce tronçon donne :

$$\vec{R}_G = \sum \vec{F}_{\text{int}} = - \sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_1} = -\vec{R}_A$$

$$\vec{M}_G(\vec{R}_G) = \sum \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{int}}) = - \sum \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_1}) = -\vec{M}_G(\vec{R}_A)$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{\text{int}} = \vec{R}_G \begin{vmatrix} R_{GX} \\ R_{GY} \\ R_{GZ} \end{vmatrix} = -\vec{R}_A \begin{vmatrix} 0 \\ R_A = -2P/3 \\ 0 \end{vmatrix} ; \sum \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{int}}) = \vec{M}_G(\vec{R}_G) \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_A \cdot x = 2P/3 \cdot x \end{vmatrix}$$

-Deuxième tronçon de la poutre x ∈ [L/3, L] :

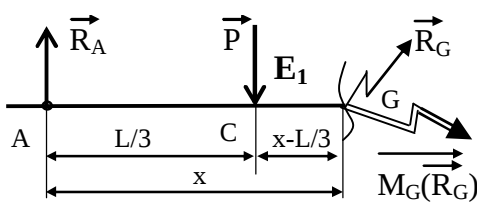


Fig. 2.8: Deuxième tronçon

Le bilan des actions mécaniques qui s'exercent sur ce tronçon donne :

$$\vec{R}_G = \sum \vec{F}_{\text{int}} = - \sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_1} = - (\vec{R}_A + \vec{P})$$

$$\overline{M}_G(\vec{R}_G) = \sum \overline{M}_G(\vec{F}_{\text{int}}) = - \sum \overline{M}_G(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_1})$$

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = \vec{R}_G \begin{vmatrix} R_{GX} \\ R_{GY} \\ R_{GZ} \end{vmatrix} = - \vec{R}_A \begin{vmatrix} 0 \\ R_A \\ 0 \end{vmatrix} - \vec{P} \begin{vmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \sum \vec{F}_{\text{int}} \begin{vmatrix} 0 \\ -R_A + P \\ 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \sum \vec{F}_{\text{int}} \begin{vmatrix} 0 \\ P/3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\sum \overline{M}_G(\vec{F}_{\text{int}}) = \overline{M}_G(\vec{R}_G) \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{P}{3} \cdot x + \frac{P}{3} L \end{vmatrix}$$

Dans le cas du deuxième tronçon, on pourrait utiliser l'autre méthode à savoir considérer la partie droite donc E₂ de la poutre. On obtient ainsi :

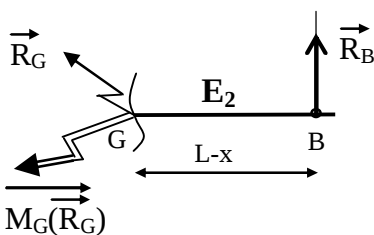


Fig.2.9: Premier tronçon isolé

Le bilan des actions mécaniques qui s'exercent sur ce tronçon donne :

$$\vec{R}_G = \sum \vec{F}_{\text{int}} = \sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_2} = \vec{R}_B$$

$$\overline{M}_G(\vec{R}_G) = \sum \overline{M}_G(\vec{F}_{\text{int}}) = \sum \overline{M}_G(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_2}) = \overline{M}_G(\vec{R}_B)$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{\text{int}} = \vec{R}_G \begin{vmatrix} R_{GX} \\ R_{GY} \\ R_{GZ} \end{vmatrix} = \vec{R}_B \begin{vmatrix} 0 \\ R_B = P/3 \\ 0 \end{vmatrix} ; \sum \overline{M}_G(\vec{F}_{\text{int}}) = \overline{M}_G(\vec{R}_G) \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{P}{3} (L-x) \end{vmatrix}$$

2.2 DENOMINATION DES COMPOSANTES DES EFFORTS INTERIEURS

Considérons ici le cas d'une poutre droite simple telle que celle présentée sur la figure 2.4 et figure 2.5. Le repère global de la poutre est alors le même que le repère local soit donc (G, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$), le repère associé à la section droite. On exprime alors les efforts intérieurs dans ce repère local, et l'on écrit sous sa forme générale :

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = N \vec{x} + T_y \vec{y} + T_z \vec{z}$$

$$\sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = M_t \vec{x} + M_{fy} \vec{y} + M_{fz} \vec{z}$$

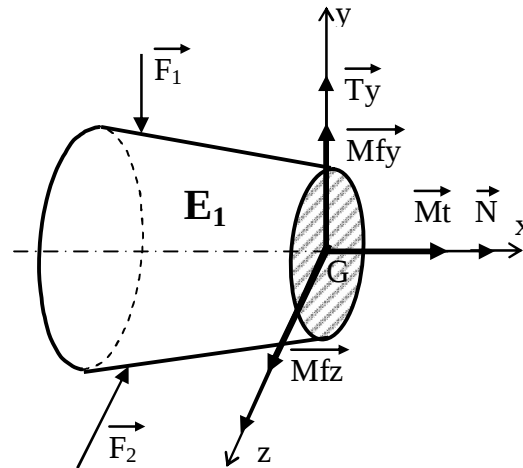


Fig. 2.10: tronçon isolé

Les noms choisis sont relatifs aux types de sollicitations causées par les composantes. Ainsi on a :

- **Effort Normal** : N , *perpendiculaire (normal) à la section droite*
- **Efforts Tranchants** : T_y et T_z , *ont tendance à trancher la poutre perpendiculairement à la ligne moyenne*
- **Moment de Torsion** : M_t , *a tendance à tordre la poutre autour de la ligne moyenne*
- **Moments de Flexions** : M_{fy} et M_{fz} , *ont tendance à faire fléchir la poutre autour d'un axe perpendiculaire à la ligne moyenne*

Dans le cas des poutres droites à plan moyen (et dont le plan moyen est le plan $(\vec{x}, \vec{y})$), les efforts intérieurs se réduisent à quatre composantes non nulles comme suit :

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = N \vec{x} + T_y \vec{y}$$

$$\sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = M_t \vec{x} + M_{fz} \vec{z}$$

Selon qu'une des quatre composantes ci-dessus soit nulle ou pas, On peut identifier un certain nombre de sollicitations dites élémentaires qui sont caractéristiques des cas de charges couramment rencontrés. On obtient ainsi, le tableau ci-dessous :

Sollicitation élémentaire	Composantes non nulles	Bilan des efforts intérieurs
Traction / Compression	N	$\sum \vec{F}_{\text{int}} = N \vec{x} ; \sum \overline{M_G}(\vec{F}_{\text{int}}) = 0$
Cisaillement pur	T_y	$\sum \vec{F}_{\text{int}} = T_y \vec{y} ; \sum \overline{M_G}(\vec{F}_{\text{int}}) = 0$
Torsion	Mt	$\sum \vec{F}_{\text{int}} = \vec{0} ; \sum \overline{M_G}(\vec{F}_{\text{int}}) = Mt \vec{x}$
Flexion pure	Mfz	$\sum \vec{F}_{\text{int}} = \vec{0} ; \sum \overline{M_G}(\vec{F}_{\text{int}}) = Mfz \vec{z}$
Flexion simple	$T_y ; Mfz$	$\sum \vec{F}_{\text{int}} = T_y \vec{y} ; \sum \overline{M_G}(\vec{F}_{\text{int}}) = Mfz \vec{z}$
Sollicitations composées	N ; $T_y ; Mfz$	$\sum \vec{F}_{\text{int}} = N \vec{x} + T_y \vec{y} ; \sum \overline{M_G}(\vec{F}_{\text{int}}) = Mfz \vec{z}$
	Mt ; $T_y ; Mfz$	$\sum \vec{F}_{\text{int}} = T_y \vec{y} ; \sum \overline{M_G}(\vec{F}_{\text{int}}) = Mt \vec{x} + Mfz \vec{z}$

Tableau 2.1 : Sollicitations élémentaires

NB : Ces sollicitations élémentaires : traction, compression, cisaillement, torsion, flexion vont faire chacune l'objet d'une étude particulière.

EXEMPLE D'APPLICATION

En considérant le tronçon E_1 de l'exemple d'application du paragraphe 2.1.2 précédent, dites à quel type de sollicitation est soumise notre poutre ?

La résolution de cet exemple nous a donné : $\sum \vec{F}_{\text{int}} = -\frac{2}{3}P \vec{y} ; \sum \overline{M_G}(\vec{F}_{\text{int}}) = \frac{2}{3}P \cdot x \vec{z}$

Donc : $T_y = -\frac{2}{3}P$ et $Mfz = \frac{2}{3}P \cdot x$: Le tronçon $\{E_1\}$ est donc soumis à **une flexion simple**.

2.3 DIAGRAMMES DES EFFORTS DE COHESION

D'après la note du paragraphe 2.1.1, les valeurs des efforts de cohésion le long de la poutre varient quand on traverse une action mécanique extérieure ou une liaison à une autre.

Ainsi, le tracé du diagramme des sollicitations qui consiste à tracer en fonction de l'abscisse du point de coupure, l'évolution des différentes composantes non nulles des efforts de cohésion, permettra facilement de repérer la section la plus sollicitée et par suite les valeurs maximales de chaque type de sollicitation.

Application (Exemple précédent)

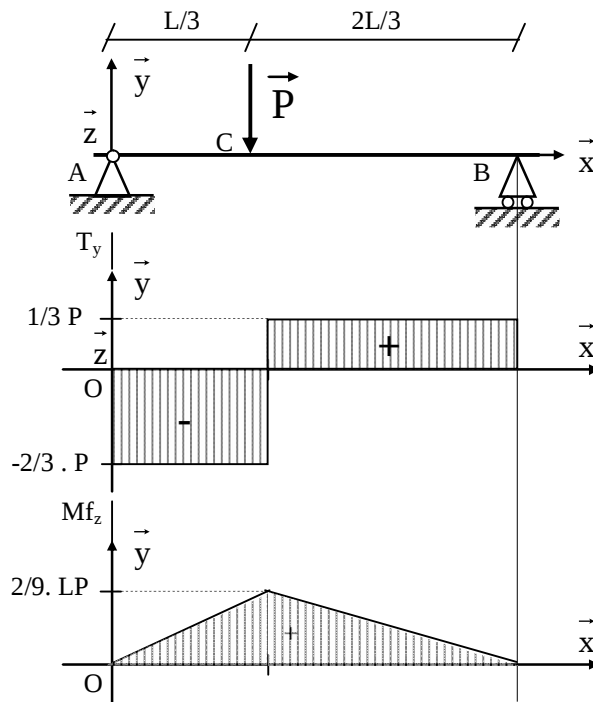
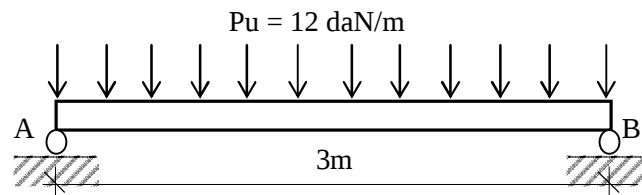


Fig. 3.11: Diagramme de l'effort tranchant T_y et du moment fléchissant M_{f_z} .

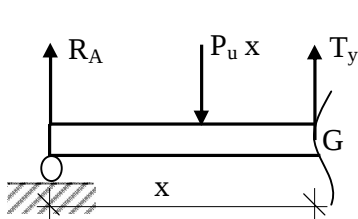
2-4 EXERCICE DE CONSOLIDATION



i) Détermination des réactions aux appuis A et B.

$$R_A = R_B = P_T/2 = (12 \times 3)/2 = 18 \text{ daN}$$

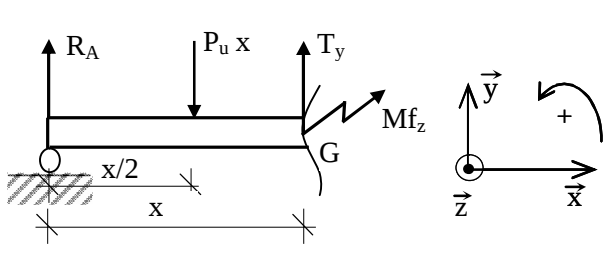
ii) Equation de l'effort tranchant



$$T_y = -R_A + P_u x$$

$$\text{AN : } T_y = -18 + 12x$$

iii) Equation du moment de flexion

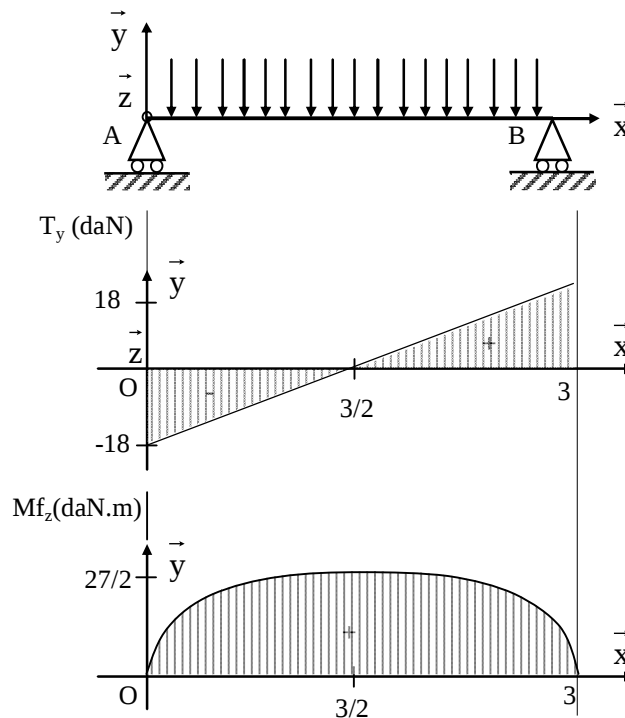


$$M_{f_z} - R_A x + P_u x \cdot x/2 = 0$$

$$M_{f_z} = R_A x - P_u x^2/2$$

$$\text{AN : } M_{f_z} = 18x - 6x^2$$

iv) Diagramme de l'effort tranchant et du moment fléchissant.



2-5 FORMULES DES REACTIONS D'APPUIS, EFFORTS TRANCHANTS ET MOMENTS FLECHISSANTS DE QUELQUES TYPES DE POUTRES SUR APPUI SIMPLE

(VOIR ANNEXE)

2.6 NOTION DE CONTRAINTE ET VECTEUR CONTRAINTE

Nous avons vu précédemment que les actions mécaniques de cohésion sont les efforts que le tronçon E_2 exerce sur le tronçon E_1 à travers la section droite S . Nous avons modélisé ces actions mécaniques par les efforts intérieurs caractérisés au point G , centre de la section droite. Ce qui ne donne qu'une vision globale sur la section droite de toutes les actions mécaniques qui s'appliquent localement en chaque point de la surface.

Ces efforts intérieurs locaux sont répartis sur toute la surface suivant une loi a priori inconnue. Considérons un point M de la surface S . Autour de ce point M , prenons un élément infiniment petit de surface dS de normale $\vec{n}$ et appelons $\vec{df}$ l'une des forces s'exerçant sur l'élément dS au point M .

On appelle contrainte en M sur l'élément dS , le

vecteur : $\vec{C}_M = \frac{\vec{df}}{ds}$

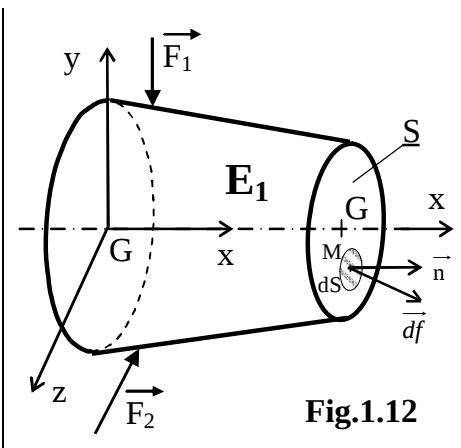


Fig.1.12

Note : L'unité du vecteur contrainte qui est le rapport d'une force par une unité de surface est : N/m^2 ou Pa, avec $1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$. ($1\text{MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 1\text{N/mm}^2$; aussi $1\text{bar} = 10\text{N/cm}^2 = 10^5 \text{ Pa}$.)

2.6.1 Contraintes normale et tangentielle

A partir du vecteur contrainte, on peut définir ses projections sur le vecteur normal $\vec{n}$ et un vecteur tangentiel $\vec{t}$ de la surface dS respectivement appelées contraintes normale notée σ et contrainte tangentielle notée : τ . On obtient alors : $\vec{C}_M = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$

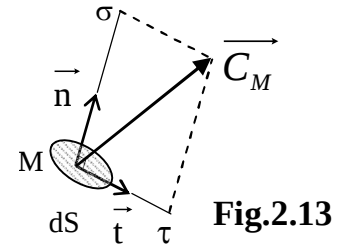


Fig.2.13

Les deux composantes du vecteur contrainte ci-dessus exprimées ont des sens physiques différents : la contrainte normale σ correspond aux actions surfaciques locales de tension au sein de la matière et la contrainte tangentielle τ correspond aux actions surfaciques locales de cisaillement au sein de la matière.

Il existe évidemment une relation entre les efforts de cohésion globaux et les vecteurs contraints locaux en tout point M de la section (S).

Au point M, on a : $d\vec{f}_{E_2/E_1} = \vec{C}_M dS$ et $M_M(d\vec{f}_{E_2/E_1}) = \vec{0}$

Au point G on aura : $d\vec{f}_{E_2/E_1} = \vec{C}_M dS$ et $M_G(d\vec{f}_{E_2/E_1}) = \vec{GM} \wedge d\vec{f}_{E_2/E_1}$

Pour obtenir les efforts de cohésion, il faut alors prendre en compte toutes les actions surfaciques sur la surface S et en faire la somme, ce qui revient d'un point de vue mathématique à intégrer sur toute la surface les équations écrites précédemment. On peut alors écrire les actions des efforts intérieurs comme suit :

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = \sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_2} = \iint_S \vec{C}_M \cdot dS \quad \text{et}$$

$$\sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = \sum M_G(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_2}) = \iint_S \vec{GM} \wedge \vec{C}_M \cdot dS$$

La relation intégrale ci-dessus étant difficile à expliciter, quelques considérations (notamment expérimentales) permettront de faire une hypothèse sur la répartition des contraintes normales et tangentielles sur la section droite. On pourra alors trouver des relations explicites entre les efforts intérieurs et les contraintes normales et tangentielles qui feront intervenir certaines *caractéristiques de la section*.

Note : Comme les efforts intérieurs peuvent s'exprimer en fonction des actions mécaniques extérieures, on pourra alors déterminer, en fonction des actions extérieures et des caractéristiques géométriques de la section, les contraintes au sein du matériau.

Ceci est un point fondamental puisque expérimentalement, on peut définir pour chaque matériau une contrainte limite admissible au-delà de laquelle la pièce subit des détériorations de ses caractéristiques mécaniques, dimensionnelles, voire une rupture. Le calcul de RDM consiste à vérifier que les contraintes engendrées par les sollicitations extérieures ne dépassent pas la contrainte limite admissible par le matériau, contrainte limite admissible qui sera dans le cadre de ce cours basée sur l'hypothèse que le matériau reste élastique.

CE QU'IL FAUT RETENIR (CQFR):

- 1- Par convention, les efforts intérieurs sont définis et se calculent comme suit :

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = \sum \vec{F}_{E_2 \rightarrow E_1} = \sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_2} = - \sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_1} ;$$

$$\sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = \sum M_G(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_2}) = - \sum M_G(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow E_1})$$

- 2- Les efforts de cohésion sont modifiés lorsque l'on déplace la coupure et il faut distinguer plusieurs coupures lorsque l'on rencontre une discontinuité d'ordre géométrique ou une discontinuité liée à des efforts concentrés ou à une liaison. Il s'exprime dans le repère local à la section droite, $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = N \vec{x} + T_y \vec{y} + T_z \vec{z} ; \quad \sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = M_t \vec{x} + M_f y \vec{y} + M_f z \vec{z}$$

- 3- Pour une poutre à plan moyen on a :

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = N \vec{x} + T_y \vec{y} ; \quad \sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = M_t \vec{x} + M_f z \vec{z}$$

- 4- Avec : - N : **effort normal** ; - T_y : **effort tranchant**
- Mt : **moment de torsion** ; - Mfz : **moment de flexion**

- 5- En fonction des efforts de cohésion (pour poutre à plan moyen), on distingue les différentes sollicitations élémentaires suivantes :

Sollicitation élémentaire	Composantes non nulles	Bilan des efforts intérieurs
Traction / Compression	N	$\sum \vec{F}_{\text{int}} = N \vec{x} ; \quad \sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = 0$
Cisaillement pur	T_y	$\sum \vec{F}_{\text{int}} = T_y \vec{y} ; \quad \sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = 0$
Torsion	Mt	$\sum \vec{F}_{\text{int}} = 0 ; \quad \sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = M_t \vec{x}$
Flexion pure	Mfz	$\sum \vec{F}_{\text{int}} = 0 ; \quad \sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = M_f z \vec{z}$
Flexion simple	$T_y ; M_f z$	$\sum \vec{F}_{\text{int}} = T_y \vec{y} ; \quad \sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = M_f z \vec{z}$

- 6- En tout point M, pour un élément de surface dS de normal $\vec{n}$, les efforts de cohésion sont des densités surfaciques de forces représentées par le vecteur contrainte $\vec{C}_M$. Les projections sur les vecteurs normal et tangentiel du vecteur contraint sont :

$$\vec{C}_M = \sigma \vec{n} + \tau_t \vec{t}$$

- 7- L'unité de la contrainte est le Pa avec $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ et $1 \text{ bar} = 10 \text{ N/cm}^2 = 10^5 \text{ Pa}$;
 $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N/mm}^2$

- 8- Les efforts intérieurs et leur moment sont reliés aux vecteurs contraintes par des

relations intégrales : $\sum \vec{F}_{\text{int}} = \iint_S \vec{C}_M \cdot dS \quad \text{et} \quad \sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = \iint_S \vec{GM} \wedge \vec{C}_M \cdot dS$

LEÇON 3 : CARACTERISTIQUES DES SECTIONS DROITES DES POUTRES

Objectif spécifique : Au terme de cette leçon, l'étudiant doit être capable :

- de déterminer l'aire, le centre, le moment statique, le moment quadratique, le moment polaire, le rayon de giration et le module de flexion d'une section droite donnée.

3.1 Calcul d'aires et des coordonnées de centre de gravité des aires

3.1.1 Calcul d'aires : "Intégrale et aire"

Soit la fonction $f(x)$ dérivable sur un intervalle $[a, b]$ avec a et b deux réels tels que : $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

L'aire du domaine D notée $A(D)$, délimitée par la courbe C_f et le segment $[a, b]$ est : $A(D) = \int_a^b f(x).dx$ (unité d'aire : $[L]^2$).

Dans le cas de la figure 3.2 on aura : ($a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq 0$).

L'aire de D est : $A(D) = -\int_a^b f(x).dx$ (unité d'aire : $[L]^2$).

Les coordonnées X_G et Y_G du centre G de cette aire G sont :

$$X_G = \frac{\int_a^b x f(x).dx}{\int_a^b f(x).dx} \quad \text{et} \quad Y_G = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x).dx}$$

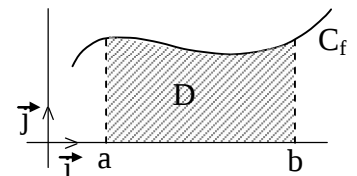


Fig.3.1

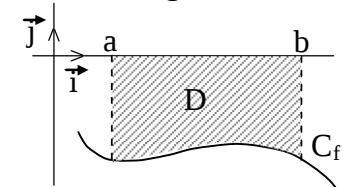
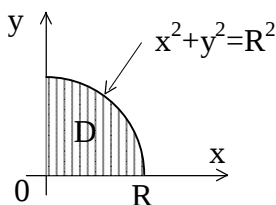


Fig.3.2

3.1.2 Exemple d'application :

Déterminer de l'aire, des coordonnées du centre de gravité quelques figures ci-dessous :

Demi-disque de Rayon R



L'équation de la courbe est : $y = f(x) = R \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}$

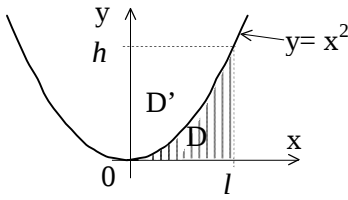
$$\text{Aire : } A(D) = R \int_0^R \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} dx \Rightarrow \text{posons } u = \frac{x}{R}$$

$$\Rightarrow A(D) = R \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du \Rightarrow A(D) = R \cdot \frac{\pi}{4} [L]^2$$

$$X_G = \frac{\int_a^b x \cdot f(x).dx}{\int_a^b f(x).dx} \Leftrightarrow X_G = \frac{\int_0^1 u \sqrt{1 - u^2} .du}{\int_0^1 \sqrt{1 - u^2} .du}$$

$$Y_G = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b [f(x)]^2 .dx}{\int_a^b f(x).dx} \Leftrightarrow Y_G = \frac{1}{2} \frac{\int_0^1 R^2 (1 - u^2) .du}{\int_0^1 R \sqrt{1 - u^2} .du} \Rightarrow Y_G = \frac{R \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^1}{\frac{\pi}{4} R} = \frac{4R}{3\pi}$$

Demi-parabole concave



La fonction étant: $y = f(x) = x^2 \Rightarrow \text{Aire : } A(D) = \int_0^l x^2 . dx$

$$\Rightarrow A(D) = \frac{l^3}{3} . \text{ On remarque que } h = l^2 \Rightarrow A(D) = \frac{h.l}{3}$$

On déduit ainsi l'aire du demi-parabole convexe :

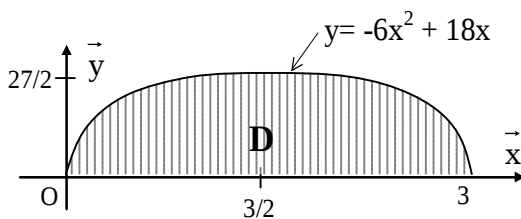
$$A(D') = hl - \frac{h.l}{3} \Rightarrow A(D') = \frac{2h.l}{3}$$

$$X_G = \frac{\int_a^b x . f(x) . dx}{\int_a^b f(x) . dx} \Leftrightarrow X_G = \frac{\int_0^l x^3 dx}{\int_0^l x^2 . dx} = \frac{3l}{4}$$

$$Y_G = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b [f(x)]^2 . dx}{\int_a^b f(x) . dx} \Leftrightarrow Y_G = \frac{1}{2} \frac{\int_0^l x^4 dx}{\int_0^l x^2 dx} \Rightarrow Y_G = \frac{1}{2} \frac{\left[\frac{u^5}{5} \right]_0^l}{\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l} = \frac{3l^2}{10} \text{ or } h = l^2 \Rightarrow Y_G = \frac{3h}{10}$$

$$\vec{OG} = \left(\frac{3l}{4}; \frac{3h}{10} \right)$$

Hyperbole : $y = -6x^2 + 18$



Aire : $A(D) = \int_0^3 (-6x^2 + 18x) dx = 27 \text{ u.a}$

$$X_G = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \text{car aire admet un plan de symétrie en } . \frac{3}{2}$$

$$Y_G = \frac{1}{2} \frac{\int_0^3 (-6x^2 + 18x)^2 . dx}{\int_0^3 (-6x^2 + 18x) . dx} \Rightarrow Y_G = \frac{27}{5} \text{ u.a}$$

3.1.2 Théorème de GULDIN

L'aire d'une surface engendrée par la rotation d'une ligne plane autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas est égale au produit de la longueur de la ligne (h) par la longueur de la circonférence décrite par le centre de gravité de la ligne.

$$S = h . 2\pi l'$$

Le volume engendré par la rotation d'une surface plane homogène autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas est égal au produit de l'aire de la surface par la longueur de la circonférence décrite par le centre de gravité de la surface.

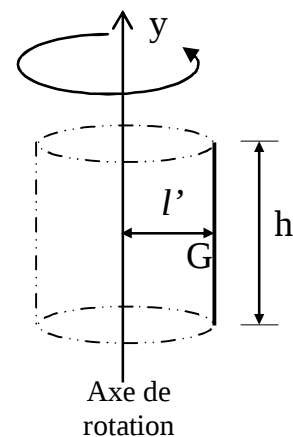


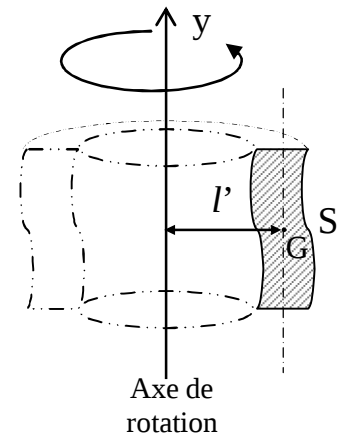
Figure 3.1 :

Exercice : Calcul du volume engendré sur la figure ci-contre.

Solution :

$$V = S \cdot 2\pi l'$$

Remarque : Le théorème du GULDIN permet de déterminer généralement les coordonnées du centre de gravité d'une surface.



3.1.3 Exercice d'application

Exercice 1

En utilisant le théorème de Guldin, déterminer les coordonnées du centre de gravité du demi disque (figure ci-contre).

Solution

La rotation du demi disque d'aire $S = \frac{\pi R^2}{2}$

➤ autour de l'axe Oz décrit une sphère de volume $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Or d'après Guldin, ce même volume est $V = S \cdot 2\pi l$ (où $l = y_G$) $\Rightarrow \frac{4}{3} \pi R^3 = S \cdot 2\pi y_G$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi y_G \Rightarrow y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

➤ autour de l'axe Oy le demi disque étant symétrique $z_G = 0$

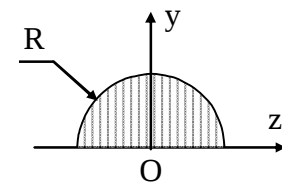


Figure 3.3 :

Exercice 2

En utilisant le théorème de Guldin, déterminer les coordonnées du centre de gravité de la figure hachurée ci-contre.

Solution

➤ La rotation de cette figure autour de l'axe Oy engendre un volume d'un cône évidé suivant l'expression :

$$V = V_{\text{cône}} - V_{1/2 \text{ sphère}} = \frac{\pi}{3} (2R)^2 \cdot 3R - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{10}{3} \pi R^3$$

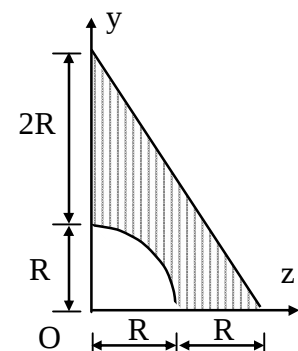


Fig. 3.4 :

$$\text{Or d'après Guldin, ce même volume est } V = S \cdot 2\pi l \text{ avec } S = \frac{2R \times 3R}{2} - \frac{\pi R^2}{4} =$$

$$\frac{12 - \pi}{4} \cdot R^2 \text{ et } l = z_G \Rightarrow \frac{10}{3} \pi R^3 = \frac{12 - \pi}{4} \cdot R^2 \cdot 2\pi z_G \Rightarrow z_G = \frac{20R}{12 - \pi}$$

- La rotation de cette figure autour de l'axe Oz engendre un volume d'un cône évidé suivant l'expression :

$$V = V_{\text{cône}} - V_{1/2 \text{ sphère}} = \frac{\pi}{3} (3R)^2 \cdot 2R - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^3$$

Or d'après Guldin, ce même volume est $V = S \cdot 2\pi l$ avec $S = \frac{12-\pi}{4} \cdot R^2$ et $l = y_G$

$$\Rightarrow 4\pi R^3 = \frac{12-\pi}{4} \cdot R^2 \cdot 2\pi y_G \Rightarrow y_G = \frac{4R}{12-\pi}$$

3.2 MOMENT STATIQUE

Considérons la section droite de la poutre du paragraphe 3.4 de la leçon 3 ci-contre.

Soit $M(z,y)$ un point de cette section et dS un élément de surface entourant ce point.

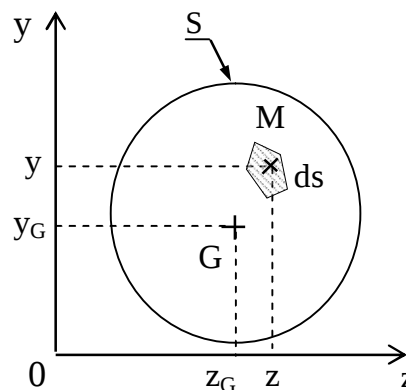


Fig.3.5 : Section droite d'une poutre

3.2.1 Définition.

On appelle moment statique d'une surface S par rapport à un axe Oy (resp Oz) situé dans son plan, **le produit de l'aire de sa section par la distance de son centre de gravité à l'axe.**

$$M_{OZ} = \iint y \cdot dS = S \cdot y_G$$

$$\text{ou } M_{OY} = \iint z \cdot dS = S \cdot z_G$$

Unités : M_{OZ} ou M_{OY} [mm^3] car S [mm^2], y_G [mm].

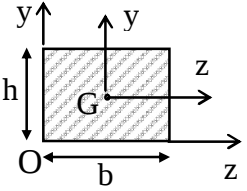
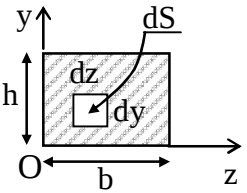
3.2.2 Remarques.

- Si l'axe passe par le centre de gravité de la surface considérée alors $z_G = y_G = 0$
 $\Rightarrow M_{OZ} = M_{OY} = 0$
- Le moment statique peut être **négatif, positif ou nul.**
- Des relations ci-dessus, on peut déterminer le centre de gravité d'une surface.

3.2.3 Exercices d'application.

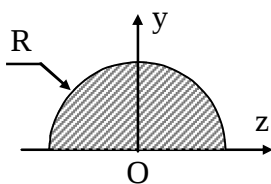
Exercice 1 :

Déterminons le moment statique de la surface de la figure ci-dessous par rapport à Oz.

	1^{ère} Méthode : $M_{Oz} = S \cdot y_G$ or $S = b \cdot h$ et $y_G = \frac{h}{2}$ $\Rightarrow M_{Oz} = b \cdot h \times \frac{h}{2} \Leftrightarrow M_{Oz} = \frac{bh^2}{2}$
	2^{ème} Méthode : $M_{Oz} = \iint y \cdot dS$ or $dS = dz dy \Rightarrow M_{Oz} = \iint y \cdot dz \cdot dy$ $\Leftrightarrow M_{Oz} = \int_0^h y dy \cdot \int_0^b z dz$ $\Leftrightarrow M_{Oz} = \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^h \cdot \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^b \Leftrightarrow M_{Oz} = \frac{bh^2}{2}$

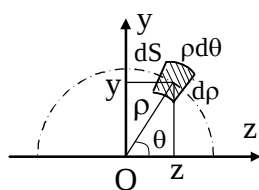
Exercice 2

Déterminons le moment statique de la surface de la figure ci-dessous par rapport à Oz.



1^{ère} Méthode : $M_{Oz} = S \cdot y_G$ or $S = \frac{\pi R^2}{2}$ et $y_G = \frac{4R}{3\pi}$

$\Rightarrow M_{Oz} = \frac{\pi R^2}{2} \cdot \frac{4R}{3\pi} \Leftrightarrow M_{Oz} = \frac{2R^3}{3}$



2^{ème} Méthode : $M_{Oz} = \iint y \cdot dS$ or $dS = \rho d\rho d\theta$ et $y = \rho \sin\theta$

$\Rightarrow M_{Oz} = \iint \rho^2 \cdot \sin\theta d\rho \cdot d\theta \Leftrightarrow M_{Oz} = \int_0^R \rho^2 d\rho \cdot \int_0^\pi \sin\theta d\theta$

$\Leftrightarrow M_{Oz} = \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^R \cdot \left[-\cos\theta \right]_0^\pi \Leftrightarrow M_{Oz} = \frac{2R^3}{3}$

3.3 MOMENT QUADRATIQUE

3.3.1 Définition.

On appelle moment quadratique ou moment d'inertie d'une surface S par rapport à un axe quelconque situé dans son plan, **le produit de l'aire de sa section par le carré de la distance de son centre de gravité à l'axe.**

$$I_{Oz} = \iint z^2 \cdot dS \text{ ou } I_{Oz} = \iint y^2 \cdot dS$$

Unités : I_{Ox} ou I_{Oy} [mm^4] car S [mm^2], y^2 [mm^2]

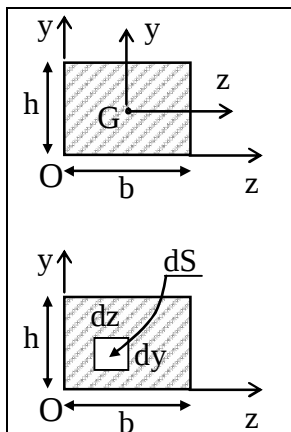
3.3.2 Remarques.

- $I_{oz} = I_{oy} \Leftrightarrow$ Aire de la section **est nulle.**
- Le moment quadratique est toujours **positif.**
- Il est utilisé dans l'étude de la flexion.

3.3.3 Exercices d'application.

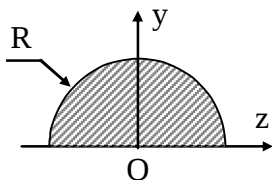
Exercice 1 :

Déterminons le moment quadratique de la surface de la figure ci-dessous par rapport à l'axe Oz et l'axe Gz.

	$I_{oz} = \iint y^2 \cdot dS \text{ or } dS = dz dy \Rightarrow I_{oz} = \iint y^2 \cdot dy dz$ $I_{oz} = \int_0^h y^2 dy \cdot \int_0^b dz \Leftrightarrow I_{oz} = \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^h \cdot [z]_0^b \Leftrightarrow I_{oz} = \frac{bh^3}{3}$ $I_{Gz} = \iint y^2 \cdot dS \text{ or } dS = dz dy \Rightarrow I_{Gz} = \iint y^2 \cdot dx dz$ $I_{Gz} = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \cdot \int_{-b/2}^{b/2} dz \Leftrightarrow I_{Gz} = \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{-h/2}^{h/2} \cdot [z]_{-b/2}^{b/2} \Leftrightarrow I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$
--	---

Exercice 2

Déterminons le moment quadratique de la surface de la figure ci-dessous par rapport à Oz



$$I_{oz} = \iint y^2 \cdot dS \text{ or } dS = \rho d\rho d\theta \text{ et } y = \rho \sin\theta$$

$$\Rightarrow I_{oz} = \iint (\rho \sin\theta)^2 \rho d\rho d\theta \cdot \Leftrightarrow I_{oz} = \frac{bh^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow I_{oz} = \int_0^R \rho^3 d\rho \cdot \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta$$

$$\Leftrightarrow I_{oz} = \int_0^R \rho^3 d\rho \cdot \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta$$

$$I_{oz} = \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^R \cdot \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^\pi = \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I_{oz} = \frac{\pi R^4}{8} = \frac{\pi D^4}{128}$$

3.3 MOMENT QUADRATIQUE POLAIRE

On appelle moment quadratique polaire d'une surface plane (S) par rapport à un système d'axe situé dans son plan **la somme des moments d'inertie de cette surface par rapport à chacun des axes.**

$$I_O = \iint \rho^2 dS \text{ or } \rho^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow I_O = \iint (x^2 + y^2) dS = \iint x^2 dS + \iint y^2 dS$$

$$I_O = I_{Ox} + I_{Oy}$$

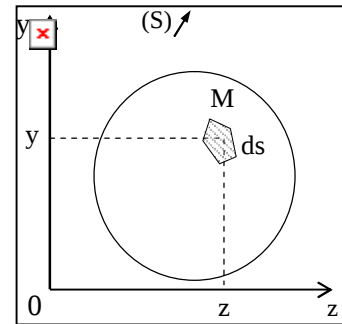


Figure 4.2 : Section droite d'une poutre

3.4 RAYON DE GIRATION

Le rayon de giration de l'aire (S) par rapport à un axe Oy ou Oz est la longueur r donnée par la relation suivante :

$$\rho_y = \sqrt{\frac{I_{Oy}}{S}} \quad \rho_z = \sqrt{\frac{I_{Oz}}{S}} \quad \text{Unités : } r \text{ [mm]}$$

3.5 THEOREME DE HUYGENS

Soit Δ une droite quelconque

Soit ΔG une droite parallèle à Δ passant par G.

Soit d, la distance entre les deux droites précédemment définies.

Le moment quadratique de (S) par rapport à Δ connaissant celui par rapport à ΔG est égal :

$$I_{\Delta} = I_{\Delta G} + Sd^2$$

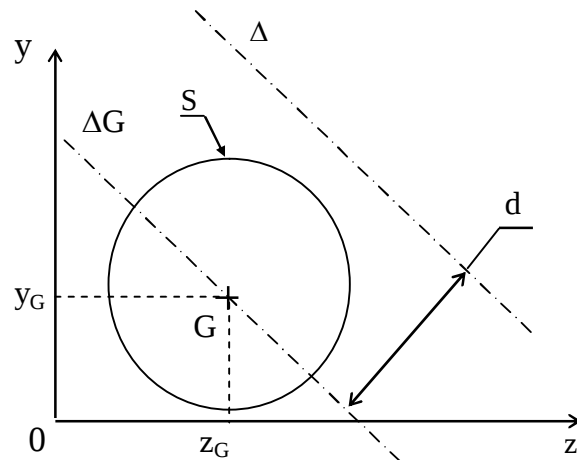
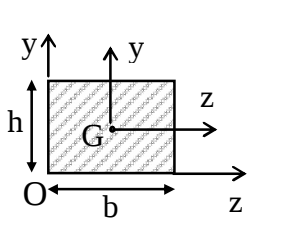


Figure 4.3 : Section droite d'une poutre

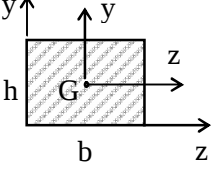
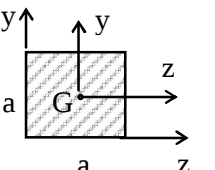
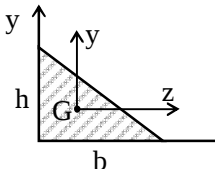
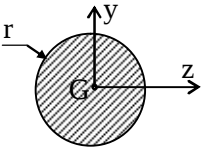
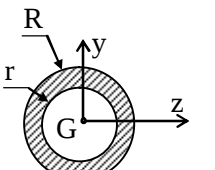
Exercice :

Déterminons le moment quadratique de la surface de la figure ci-dessous par rapport à l'axe Oz sachant que : $I_{GZ} = \frac{bh^3}{12}$



$$I_{Oz} = I_{GZ} + S \left(\frac{h}{2} \right)^2 \Leftrightarrow I_{Oz} = \frac{bh^3}{12} + hb \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{bh^3}{3}$$

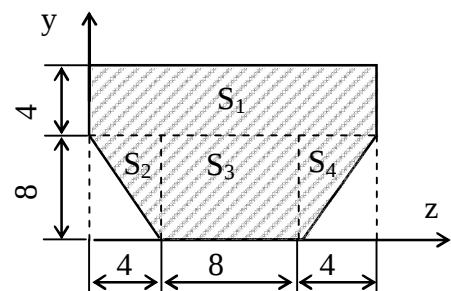
3.6 TABLEAU DES MOMENTS QUADRATIQUES DE CERTAINES SECTIONS ELEMENTAIRES

Cas particuliers des sections	I_{GZ}	I_{GY}	$I_G = I_O$	Distance des fibres extrêmes
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$	$v = v' = h/2$
	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{6}$	$v = v' = a/2$
	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{36}$	$\frac{bh}{36}(b^2 + h^2)$	$v = 2h/3$ $v' = h/3$
	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$v = v' = r$
	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$	$v = v' = R$

3.7 EXEMPLE D'APPLICATION

On donne ci-contre une section d'une poutre.

- 1-Calculer l'aire de cette section droite
- 2-Calculer les moments statiques M_{OZ} et M_{OY} .
- 3-En déduire le centre de gravité de la section
- 4-Calculer le moment quadratique I_{OZ} et I_{OY} .
- 5-Calculer le moment polaire.



SOLUTION :

1- Calcul de l'aire de la section droite

On peut définir S_a = surface du rectangle (12 x 16) et S_b = la surface des deux triangles (b_1 et b_2) non hachurés d'où $S = S_a - S_b$ d'où : $S = (4 \times 16) + (8 \times 8) + (8 \times 4) = 160 \text{ cm}^2$.

2- Calcul du moment quadratique

On a : $M_{OZ} = M_{OZ1} + M_{OZ2} + M_{OZ3} + M_{OZ4}$;

$$M_{OY} = M_{OY1} + M_{OY2} + M_{OY3} + M_{OY4}$$

$$M_{OZ} = (4 \times 16) 10 + \left(\frac{8 \times 4}{2} \times \frac{2}{3} \times 8 \right) \times 2 + (8 \times 8) \times 4 = 1066,66 \text{ cm}^3$$

$$M_{OY} = (4 \times 16) 8 + \left(\frac{8 \times 4}{2} \times \frac{2}{3} \times 4 \right) + (8 \times 8) \times 8 + \left[\frac{8 \times 4}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times 4 + 12 \right) \right] = 1280 \text{ cm}^3$$

3- En déduire le centre de gravité

$$Z_G = \frac{M_{OY}}{S} \quad \text{AN : } Z_G = \frac{1280}{160} = 8 \text{ cm} \quad \text{et} \quad Y_G = \frac{M_{OX}}{S} \quad \text{AN : } Y_G = \frac{1066,66}{160} = 6,66 \text{ cm}$$

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6,66 \end{pmatrix}$$

4- Calcul du moment quadratique

$$I_{OZ} = I_{OZ}(S_a) - I_{OZ}(S_b) = I_{OZ}(S_a) - [I_{OZ}(S_{b1}) + I_{OZ}(S_{b2})]$$

$$= \frac{16 \times 12^3}{3} - 2 \times \frac{4 \times 8^3}{12} = 8874,666 \text{ cm}^4.$$

$$I_{OY} = I_{OY}(S_a) - I_{OY}(S_b) = I_{OY}(S_a) - [I_{OY}(S_{b1}) + I_{OY}(S_{b2})]$$

$$= \frac{16 \times 12^3}{3} - \left[\frac{8 \times 4^3}{12} + \frac{8 \times 4^3}{36} + \left(12 + \frac{2}{3} \times 4 \right)^2 \frac{4 \times 8}{2} \right] = 5717,33 \text{ cm}^4$$

5- Calcul du moment polaire

$$I_O = I_{OZ} + I_{OY} = 8874,666 + 5717,3333 = 14592 \text{ cm}^4$$

3.8 EXERCICE DE CONSOLIDATION :

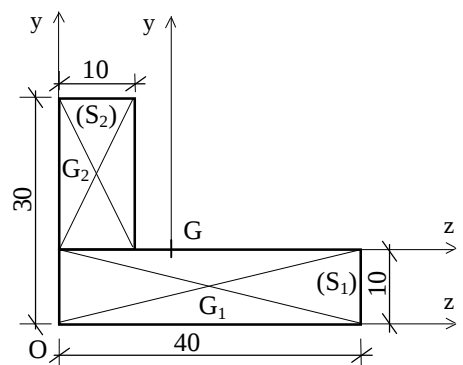
Considérons la surface (S) définie par la figure ci-contre le repère (0,z,y).

1- Vérifier que les coordonnées du centre de surface G sont : $z_G = 15$ et $y_G = 10$.

2- Exprimer les moments quadratiques I_{GZ} et I_{GY} ; et I_G .

Rép : $I_{GZ} = 40\,000 \text{ mm}^4$; $I_{GY} = 85\,000 \text{ mm}^4$ et

$$I_G = 125\,000 \text{ mm}^4$$



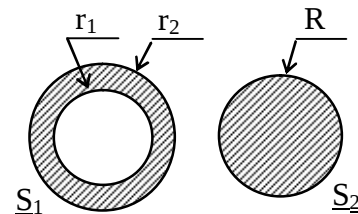
3.9 MODULE DE RESISTANCE A LA FLEXION

On appelle module de résistance à la flexion la valeur du rapport entre le moment quadratique et la distance de la fibre la plus éloignée de la ligne moyenne notée :

$\frac{I_{GZ}}{v}$ (ou $\frac{I_{GZ}}{v'}$ si $v' > v$). Elle permet de faire un choix économique dû à la forme de la section d'une poutre.

Exemple

On voudrait faire un choix économique entre deux poutres ayant pour sections droites respectives S_1 et S_2 . (voir figure ci-contre : on donne $r_1 = 0,4.r_2$). Quelle est la section la plus économique et de quelle quantité de matière économisera-t-on ?



Le principe ici, c'est d'obtenir le même module de flexion quelque soit la section utilisée. Pour cela, il sera question de comparer $\left(\frac{I}{v}\right)_{(S1)} = \left(\frac{I}{v}\right)_{(S2)}$ et en déduire la section qui consomme moins de matières.

$$\left(\frac{I_{GZ}}{v}\right)_{(S1)} = \frac{\pi r_2^3}{4} - \frac{\pi r_1^3}{4} = \frac{\pi r_2^3}{4} - \frac{\pi (0,6)^3 r_2^3}{4} = \frac{(1 - 0,6^3) \cdot \pi \cdot r_2^3}{4} = 0,196 \cdot \pi r_2^3$$

$$\left(\frac{I_{GZ}}{v}\right)_{(S2)} = \frac{\pi R^3}{4} ; \text{ ainsi } \left(\frac{I}{v}\right)_{(S1)} = \left(\frac{I}{v}\right)_{(S2)} \Leftrightarrow R^3 = 0,784 r_2^3 \Rightarrow r_2 = 1,0845R \text{ et } r_1 = 0,65R$$

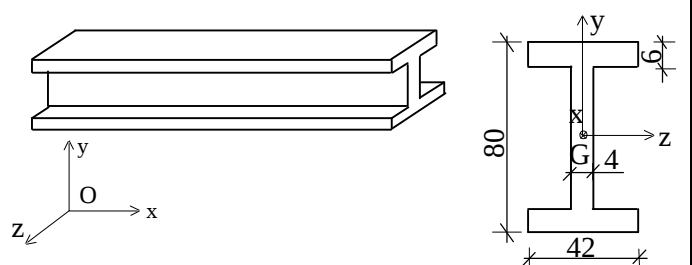
Comparaison des quantités de matière des poutres de même longueur L.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho V_1}{\rho V_2} = \frac{S_1 L}{S_2 L} = \frac{\pi r_2^2 - \pi r_1^2}{\pi R^2} = \frac{(1,084^2 - 0,65^2) \pi \pi^2}{\pi R^2} = 0,7525 ; m_1 = 75,25\% m_2.$$

La poutre ayant la section (S_1) est plus économique, car on économise 24,75% de matière.

3.10 EXERCICE D'APPLICATION

Soit la poutrelle en I ci-contre, déterminer :
1- les moments quadratiques I_{GZ} , I_{GY} ; et I_G .
2- Le rayon de giration ρ suivant l'axe Gz
3- le module de résistance à la flexion

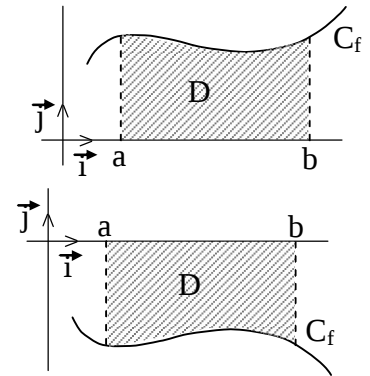


Rép : 1- $I_{GZ} = 79,6298 \text{ cm}^4$; $I_{GY} = 7,4456 \text{ cm}^4$ et $I_G = 87,0754 \text{ cm}^4$

2- $\rho = 32,03 \text{ mm}$ 3- $\left(\frac{I_{GZ}}{v}\right) = 19907,45 \text{ mm}^3$

CE QU'IL FAUT RETENIR (CQFR):

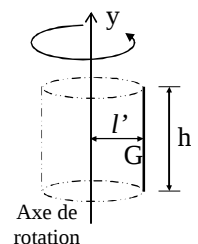
- 1- Soit la fonction $f(x)$ dérivable sur un intervalle $[a, b]$ avec a et b deux réels tels que : $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$. L'aire du domaine D (fig.3.1) notée $A(D)$, délimitée par la courbe C_f et le segment $[a, b]$ est : $A(D) = \int_a^b f(x).dx$ (u.a.) ou $A(D) = -\int_a^b f(x).dx$ avec : $(a \leq x \leq b \text{ et } f(x) \leq y \leq 0)$.



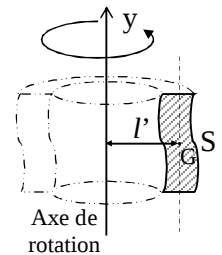
- 2- Les coordonnées X_G et Y_G du centre G de cette aire sont :

$$X_G = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad Y_G = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

- 3- L'aire d'une surface engendrée par la rotation d'une ligne plane autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas est égale au produit de la longueur de la ligne (h) par la longueur de la circonférence décrite par le centre de gravité de la ligne : $S = h.2\pi l'$



- 4- Le volume engendré par la rotation d'une surface plane homogène autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas est égal au produit de l'aire de la surface par la longueur de la circonférence décrite par le centre de gravité de la surface : $V = S.2\pi l'$



- 5- On appelle moment statique d'une surface S par rapport à un axe Oy (resp Oz) situé dans son plan, **le produit de l'aire de sa section par la distance de son centre de gravité à l'axe.**

$$M_{Oy} = \iint z.dS = S.z_G \quad M_{Oz} = \iint y.dS = S.y_G \quad \text{Unités : [mm}^3\text{]}.$$

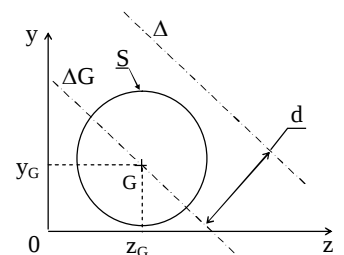
- 6- On appelle moment quadratique ou moment d'inertie d'une surface S par rapport à un axe quelconque situé dans son plan, **le produit de l'aire de sa section par le carré de la distance de son centre de gravité à l'axe** : $I_{Oz} = \iint z^2.dS$ ou $I_{Oz} = \iint y^2.dS$ Unités : [mm⁴]

- 7- Le rayon de giration de l'aire (S) par rapport à un axe Ox ou Oz est la longueur r donnée par la relation suivante :

$$\rho_y = \sqrt{\frac{I_{Oy}}{S}} \quad \rho_z = \sqrt{\frac{I_{Oz}}{S}} \quad \text{Unités : } r \text{ [mm]}$$

- 8- Théorème de hygens : soient Δ une droite quelconque ; ΔG une droite parallèle à Δ passant par G et d la distance entre les deux droites précédemment définies. Alors Le moment quadratique de (S) par rapport à Δ connaissant celui par rapport à ΔG est égal :

$$I_{\Delta} = I_{\Delta G} + Sd^2$$



- 9- Quelques moments quadratiques à connaître (voir tableau du paragraphe 3.6)

II^{ème} PARTIE :

LEÇON 4 : TRACTION ET COMPRESSION

LEÇON 5 : CISAILLEMENT

LEÇON 6 : TORSION

LEÇON 7 : FLEXION SIMPLE

LEÇON 8 : FLAMBEMENT

LEÇON 4 : TRACTION ET COMPRESSION

Objectif spécifique : Au terme de cette leçon, l'étudiant doit être capable, pour une poutre sollicitée en traction ou en compression :

- de déterminer son allongement dans le cas de la traction ou son raccourcissement dans le cas de la compression, et sa contrainte.
- d'établir la loi de Hooke, le coefficient de poisson et le critère de dimensionnement.

INTRODUCTION

L'étude de la traction et de la compression est vue sous un angle expérimental. A partir de manipulations faites sur une éprouvette sur laquelle est dessinée une grille, on constate des propriétés de déplacement/déformation qui permettront de déduire des hypothèses sur la répartition des contraintes dans une section.

Ces deux types sollicitations sont distinctes car un certain nombre de matériaux ont des limites de résistances différentes en extension et en compression (Ex : fontes, bois, béton,...). Cependant, nous arrivons aux mêmes relations des contraintes et de déformation.

4.1 TRACTION

4.1.1 DEFINITION

Une poutre, ou un tronçon de poutre, est sollicitée en traction lorsqu'elle est soumise à deux actions mécaniques qui se réduisent au centre de surface des deux sections extrêmes à deux résultantes directement opposées et qui tendent à l'allonger. (figure 4.1 et 4.2). Les effort de cohésion se s'exprime alors : $\sum \vec{F}_{int} = N \vec{x}$ et $\sum \vec{M}_G(\vec{F}_{int}) = 0 \vec{z}$ ($N > 0$)

Expérience sur la répartition des déformations

Considérons une poutre sur laquelle est dessinée une grille et sollicitons la en traction. Une vision idéalisée du résultat se présente comme l'indique la figure 4.2 ci-dessous.

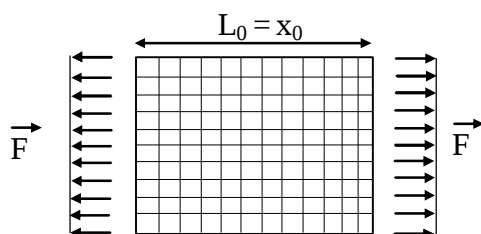


Figure 4.1 : Poutre avant application de $\vec{F}$ donc avant déformation

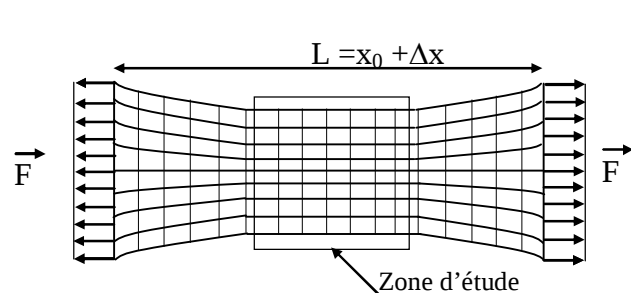


Figure 4.2 : Poutre après déformation

Dans la zone d'étude :

- 1- La grille de longueur initiale x_0 s'est globalement allongée d'une longueur que nous noterons Δx ($\Delta x = L - L_0$) appelée Allongement.

On appelle **déformation** le rapport de l'allongement Δx sur la longueur de référence x_0 :

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0}. \text{ C'est une grandeur qui n'a pas de dimension.}$$

- 2- Une section droite représentée par une ligne verticale de la grille s'est déplacée pour donner une ligne verticale plus courte.
- 3- Chaque carreau de la grille a subi la même transformation. On note ainsi, un état de déformation homogène et constant.

Conséquences : Eu égard aux différents constats ci-dessus cités, on peut donc se faire une idée des contraintes présentes dans le matériau :

- L'état de contrainte est homogène et constant dans toute la zone d'intérêt. Si les contraintes variaient, la grille aurait une forme qui changerait.
- Les contraintes tangentielles sont nulles. En effet, si elles ne l'étaient pas, On aurait des glissements des sections droites les unes par rapport aux autres. Or on constate sur la grille qu'entre deux sections avant et après déformation, il n'y a eu qu'un allongement de la matière dans la direction horizontale, qui a induit un rétrécissement dans la direction verticale.

Ainsi le vecteur contrainte en tout point M d'une section de normale de $\vec{n} = \vec{x}$ s'écrit :

$$\vec{C}_M = \sigma \vec{x} \text{ avec } \sigma \text{ une constant.}$$

4.1.2 CONTRAINTE NORMALE

À partir de la donnée précédente, la relation intégrale du paragraphe de la leçon 3 s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}_{\text{int}} = N \cdot \vec{x} = \iint_S \vec{C}_M \cdot dS \\ \sum \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{int}}) = \vec{0} = \iint_S \vec{GM} \wedge \vec{C}_M \cdot dS \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}_{\text{int}} = N \cdot \vec{x} = \iint_S \sigma \cdot \vec{x} \cdot dS \\ \sum \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{int}}) = \iint_S \vec{GM} \wedge (\sigma \vec{x}) \cdot dS \end{array} \right.$$

Comme σ est constante sur la section S, on a alors :

$$\bullet \sum \vec{F}_{\text{int}} = N \cdot \vec{x} = \iint_S \sigma \cdot \vec{x} \cdot dS = \sigma \cdot \vec{x} \iint_S dS = \sigma \cdot S \cdot \vec{x} \text{ car } \iint_S dS = S$$

$$\Rightarrow N = \sigma S \quad \Rightarrow \sigma = \frac{N}{S}$$

$$\bullet \sum \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{int}}) = \iint_S \vec{GM} \wedge (\sigma \vec{x}) \cdot dS = \vec{0} \text{ car G est le centre de la surface, } \iint_S \vec{GM} \cdot dS = \vec{0}$$

Au bilan, La seule contrainte non nulle dans la section droite de normale $\vec{x}$, de surface S , est la contrainte normale $\vec{\sigma}$ qui est constante sur la section et s'exprime en fonction de l'effort normal par la formule :

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad [\sigma] \text{ MPa ou Pa avec } 1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2 = 10^{-5} \text{ daN/cm}^2.$$

4.1.3 REPARTITION DES CONTRAINTES

La répartition des contraintes est présentée sur la figure 4.3 ci-dessous.

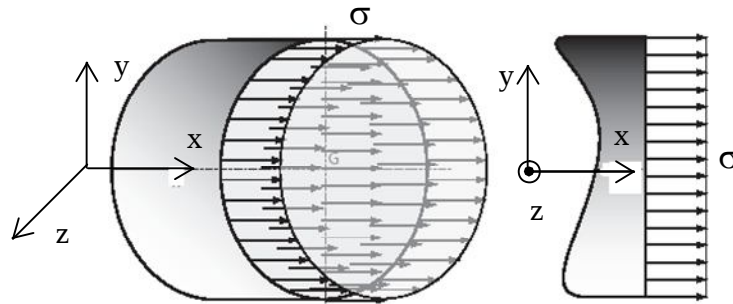


Fig. 4.3 : Répartition des contraintes.

4.1.4 ESSAI DE TRACTION

4.1.4.1 Principe

En vue de déterminer une ou plusieurs caractéristiques mécaniques d'un matériau, on applique progressivement à une éprouvette de ce dernier, de section circulaire, carré ou rectangulaire, deux forces égales et opposées suivant son axe. Sous l'action de ces forces, l'éprouvette s'allonge jusqu'à rupture.

Éprouvettes : Elles comportent une partie calibrée soigneusement polie. Cette zone centrale est raccordée aux extrémités par des congés de rayon R . Les têtes d'amarrage, non normalisées, sont adaptées aux mâchoires de la machine à traction.

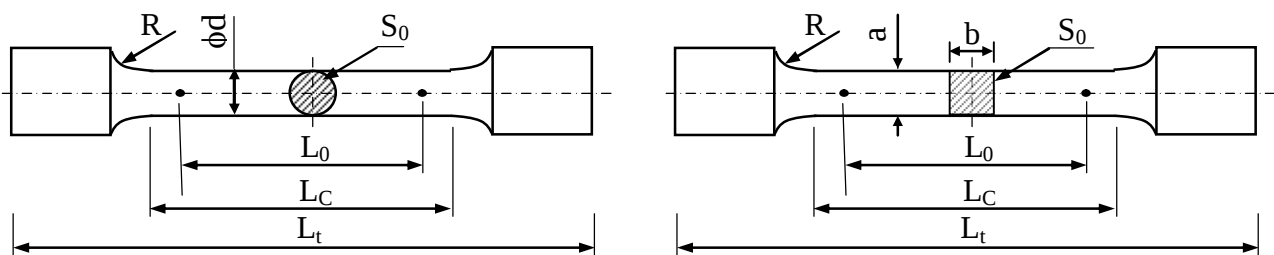


Fig.4.4 : Forme et dimension de la partie calibrée

S_0 : Surface circulaire de diamètre d ; S_0 : Surface rectangulaire telle que $\frac{a}{b} \leq \frac{8}{1}$

L_C : Longueur calibrée : $L_0 + \frac{d}{2} \leq L_C \leq L_0 + 2d$; L_0 : Longueur entre repères : il s'agit de la longueur utilisée pour l'étude de l'allongement.

Suivant les puissances des machines de traction, les éprouvettes de section circulaire doivent satisfaire à la relation : $L_0 = K \sqrt{S_0}$ avec $K = 5,62$.

Machine de traction

Essentiellement deux mâchoires dans lesquelles sont maintenues les têtes d'amarrage de l'éprouvette. Sous l'action du mécanisme (machines de traction mécaniques) ou sous l'effet de la pression de l'huile (machines de traction à piston) ces mâchoires s'écartent exerçant ainsi les forces de traction suivant l'axe de l'éprouvette.

Des appareils adaptés à la machine de traction (dynamomètre, manomètre, enregistreur) permettent de mesurer et d'enregistrer à tout instant la charge et l'allongement correspondant de l'éprouvette.

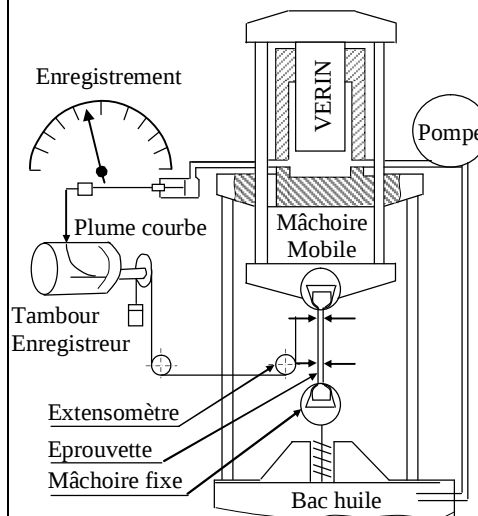


Fig.4.5 : Machine de traction

4.1.4.2 Diagramme de traction et interprétation : cas d'un acier inoxydable.

Caractéristiques de l'éprouvette : Forme cylindrique d'acier inoxydable ; La zone utile de l'éprouvette a une longueur $L_0 = 150$ mm et une section S dont le diamètre est $D_0 = 15$ mm.

On a mesuré au cours de l'essai la force exercée sur l'éprouvette, qui est ici exactement l'effort normal N vu par toute section droite de la zone utile, ainsi que l'allongement ΔL de la zone utile. Puis on a représenté au cours de l'essai l'évolution de la courbe effort normal N en fonction de l'allongement ΔL . Cette courbe comporte deux zones :

1- la première zone donnant la courbe de l'effort normal en fonction de l'allongement est linéaire est appelée la zone élastique.

2- La deuxième zone de la courbe est appelée la zone plastique, suivie de la striction (étranglement) et de la coupure.

NB : On ne s'intéressera ici qu'à la partie élastique linéaire de la courbe. Pour ce, on a réalisé un zoom pour ΔL variant entre 0 et 0,6 mm.

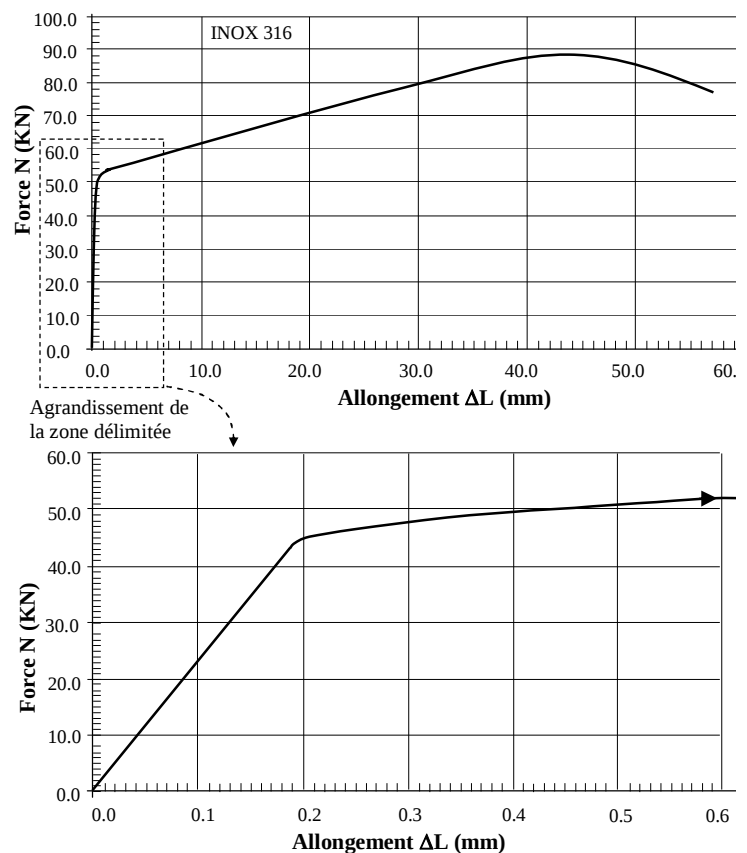


Fig.4.6 : Courbe $N = f(\Delta L)$ (essai de traction)

Or on sait que $\sigma = N/S$. L'effort normal est donc proportionnel à la surface. Pour caractériser uniquement le matériau, indépendamment de la section de l'éprouvette, il faut donc s'intéresser à la contrainte normale.

De la même manière plutôt que de s'intéresser à un allongement ΔL d'une partie de l'éprouvette de longueur utile L_0 , nous allons nous intéresser à une quantité sans dimension appelée allongement unitaire ou déformation (ε).

$R_p^{0,2}$ = Limite pratique d'élasticité à 0,2%.

R_e = Limite élastique

Remarque

Lors de certains essais (cas des essais très durs), R_e et par suite R_p ne sont pas apparents (figure ci-contre). On convient de tracer une parallèle à la partie rectiligne de la courbe pour un allongement de 0.2%. L'intersection de cette parallèle avec la courbe donne la limite conventionnelle d'élasticité.

$$\varepsilon = A\% = \frac{L_U - L_0}{L_0} \text{ avec } L_U = \text{longueur ultime.}$$

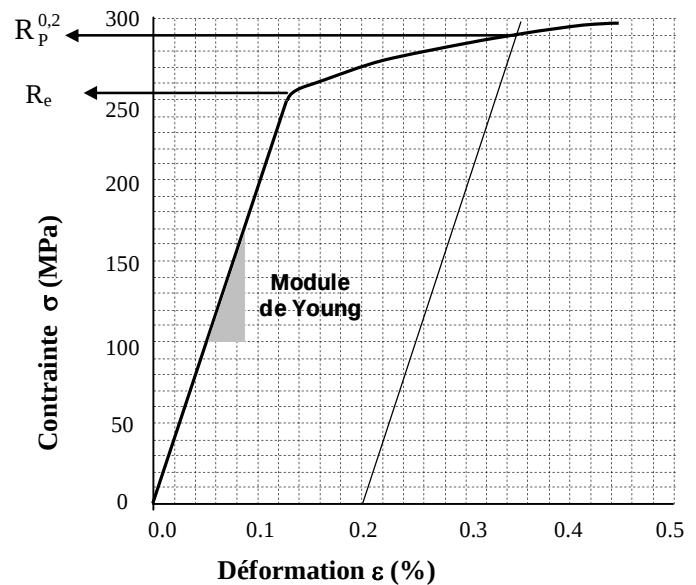


Figure. 4.7 : Diagramme $\sigma = f(\Delta l)$

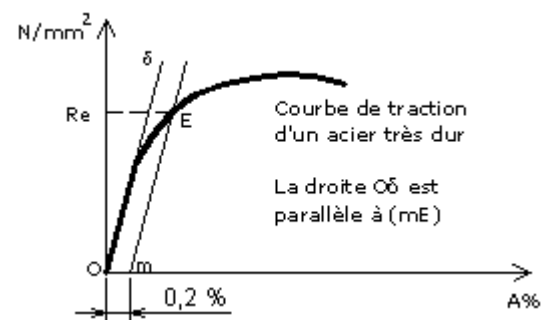


Fig. 4.8 : Diagramme aciers très durs

Conséquence :

Les matériaux (poutres) en RDM sont supposés travailler dans le domaine élastique. Pour cela quelque soit l'ouvrage effectué, il faudrait que la contrainte dans les poutres encore appelée contrainte admissible notée : σ_{adm} soit inférieure à la contrainte élastique.

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_r}{k} < \sigma_e$$

4.1.5 LOI DE HOOKE (Relation Contrainte/déformation)

Dans le domaine élastique, il existe une proportionnalité entre contrainte et déformation.

$\sigma = E \varepsilon$	σ = contrainte (MPa)
	$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$ / allongement unitaire élastique
	E = Constante de proportionnalité appelée module de Young ou encore module d'élasticité longitudinale. C'est une caractéristique mécanique des matériaux.

4.1.6 RELATION ENTRE L'EFFORT NORMAL (N) ET L'ALLONGEMENT (ΔL)

De la relation précédente, on a : $\frac{N}{S} = E \frac{\Delta L}{L_0} \Rightarrow \Delta L = \frac{NL_0}{E.S}$

4.1.7 COEFFICIENT DE POISSON

Lorsqu'un matériau subit une déformation dans une direction (ε_l longitudinale), il en subit aussi une autre dans l'autre direction (ε_t transversale). On constate expérimentalement que le rapport $\frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_t}$ est constant pour un matériau donné. Ce rapport est appelé coefficient de

Poisson et est noté : ν On a donc : $\frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_t} = \nu$.

Cette relation est due à la contrainte de Poisson ou module de rigidité transversal G qui est lié au module de rigidité longitudinal par la relation $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ unité : daN/mm².

Le coefficient ν est borné : il est positif et inférieur à 0,5. En effet si ν était négatif, on aurait une augmentation du diamètre d'un barreau en traction. La limite supérieure de 0,5 correspond à un matériau incompressible.

4.1.8 RELATION DEFORMATION / DEPLACEMENT

Nous avons vu que la déformation longitudinale ε est directement liée à l'allongement lorsqu'elle est homogène sur toute la longueur de la poutre par la relation $\varepsilon = \Delta L/L_0$.

Mais si ε varie en fonction de l'abscisse x le long de la poutre, cette relation est limitée. Pour déterminer une expression plus générale, On isole un petit tronçon de poutre de longueur dx d'abscisse à l'origine x , tel qu'indiqué sur la figure 4.7 ci-contre.

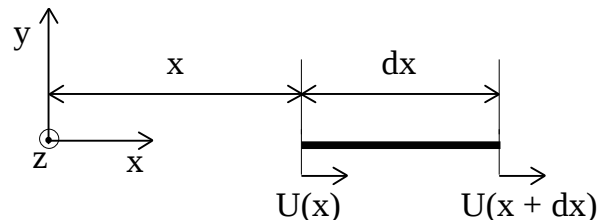


Fig.4.9 : Petit tronçon de poutre en traction

On note $u(x)$ le déplacement du point d'abscisse x et $U(x+dx)$ le déplacement du point d'abscisse $x+dx$. Ainsi si $\varepsilon(x)$ est la déformation du petit tronçon de poutre de longueur dx , $\varepsilon(x)$ est le rapport entre l'allongement du tronçon soit $U(x+dx)-u(x)$ et la longueur du tronçon.

Donc : $\varepsilon(x) = \frac{U(x+dx) - U(x)}{dx}$ or le déplacement $U(x+dx)$ en fonction de $U(x)$ s'exprime

comme suit ; en ajoutant une petite variation du déplacement $du(x)$, soit :

$U(x + dx) = U(x) + dU(x)$. On en déduit donc : $\varepsilon(x) = \frac{dU(x)}{dx} = \frac{dU}{dx}$

$$\varepsilon(x) = \frac{dU}{dx}$$

Application :

Si on applique cette relation à une poutre de longueur L_0 encastrée à son origine, et dont le déplacement du point extrême est $u(L_0) = \Delta L$, et si la déformation est homogène sur toute la longueur, on a : $dU = \varepsilon dx$.

$$\Rightarrow \int_0^{L_0} dU = \int_0^{L_0} \varepsilon dx \Leftrightarrow U(L_0) - U(0) = \varepsilon L_0.$$

Or $U(0) = 0$ car encastrement en 0 et $U(L_0) = \Delta L$

$$\text{On retrouve : } \varepsilon L_0 = \Delta L \text{ soit } \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

4.1.9 CONDITION DE DIMENSIONNEMENT

Pour dimensionner la poutre deux critères peuvent être utilisés à savoir : le critère en contrainte et le critère en déplacement :

- Le critère en contrainte traduit le fait que le matériau doit rester dans la zone élastique ($\sigma_{adm} \leq R_p = \frac{R_e}{s}$). On prend classiquement en compte un coefficient de sécurité $s > 1$ pour vérifier ce critère qui s'écrit alors : $\sigma_{adm} \leq \frac{R_e}{s}$
- Le critère en déplacement traduit que le déplacement en un point M (considéré comme maximum) doit rester inférieur à une valeur donnée dépendant des conditions d'utilisation $s_0 U(M) \leq U_{lim}$

4.1.10 EXEMPLE D'APPLICATION

Un pylône est maintenu par 4 câbles en acier, de longueur 10 m et de diamètre 10 mm, munis à l'extrémité inférieure d'un tendeur. Ils sont rectilignes, de masse négligeable, de module $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa et de contrainte élastique limite $\sigma_e = 60$ MPa. On agit sur le tendeur.

- Quel est l'allongement maximal autorisé ?
- Quel est l'effort normal maximal d'extension admissible ?

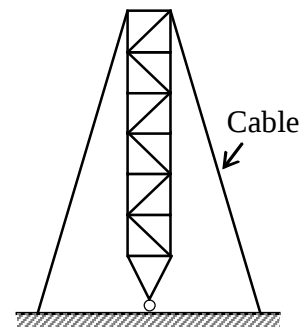


Fig.4.10 :

Solution

1- Allongement maximal :

$$\text{on sait que : } \sigma_{Pe} = E \cdot \frac{\Delta L_{max}}{L_0} \Rightarrow \Delta L_{max} = \frac{\sigma_{Pe} \cdot L_0}{E} \quad \underline{\text{AN}} : \Delta L = \frac{60 \cdot 10000}{2,1 \cdot 10^5} = 2,8 \text{ mm}$$

$$2- \text{ on sait que : } \sigma_{Pe} = \frac{N_{max}}{S} \quad \text{Or } N_{max} = F_{max} \text{ et } S = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow F_{max} = \sigma_{Pe} \cdot \pi d^2 / 4$$

$$\underline{\text{AN}} : F_{max} = 60 \cdot \pi \cdot 10^2 / 4 = 4710 \text{ N}$$

4.2 COMPRESSION

4.2.1 DEFINITION

Une poutre, ou un tronçon de poutre, est sollicitée en compression lorsqu'elle est soumise à deux actions mécaniques qui se réduisent au centre de surface des deux sections extrêmes à deux résultantes directement opposées et qui tendent à la raccourcir. (figure 4.12).

Les effort de cohésion se s'exprime alors : $\sum \vec{F}_{\text{int}} = N \vec{x}$ et $\sum \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{int}}) = 0 \vec{z}$ ($N < 0$)

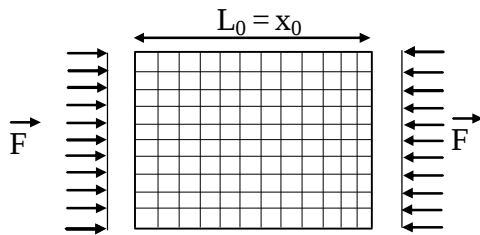


Figure. 4.11 : Poutre avant application de $\vec{F}$ donc avant déformation

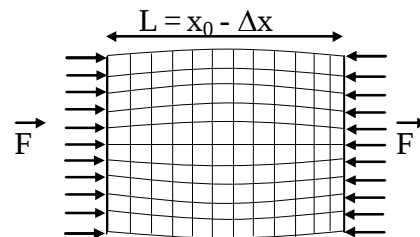
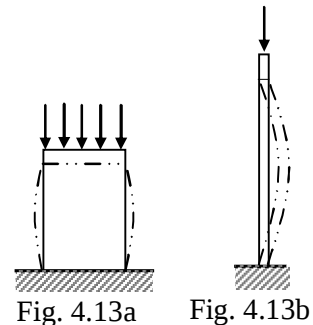


Figure. 4.12 : Poutre après déformation

4.2.2 REMARQUE

Lorsqu'une poutre rectiligne est sollicitée par un effort axial de compression, deux cas se présentent généralement :

- soit la poutre (courte) se comprime on parle de compression simple (figure 4.13a)
- soit la poutre (moyenne ou longue) fléchit : on parle de flambement (figure 4.13b)



L'étude d'une compression simple, comme souligné à l'introduction, conduit aux mêmes relations des contraintes et de déformation que celle de la traction. Ainsi, cette ne sera pas faite dans cette partie.

Dans le cas d'une poutre subissant le flambement, une étude est faite au chapitre 8.

4.2.3 EXEMPLE D'APPLICATION

Un tube de longueur 1m et de diamètre extérieur 60mm d'épaisseur 3mm comme l'indique la figure 4.14 est soumis à un effort de compression de 3000N. Ce tube est en acier $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa.

- 1- Déterminer la contrainte de compression dans le tube
- 2- Calculer le raccourcissement du tube.

Solution

1- on sait que : $\sigma = \frac{N}{S}$ Or $N = F$ et $S = \pi/4(D^2 - d^2) \Rightarrow \sigma = \frac{4F}{\pi(D^2 - d^2)} = 10,89 \text{ N/mm}^2$

2- Calcul du raccourcissement :

on sait que : $\sigma = \frac{N}{S} = E \cdot \frac{\Delta L}{L_0} \Rightarrow \Delta L = \frac{\sigma \cdot L_0}{E}$ **AN** : $\Delta L = \frac{10,89 \cdot 1000}{2,110^5} = 0,054 \text{ mm}$

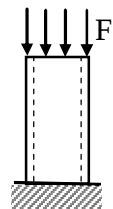


Figure. 4.14

CE QU'IL FAUT RETENIR (CQFR):

- 1- Une poutre, ou un tronçon de poutre, est en traction/compression dès que :

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = N \vec{x} \quad \text{et} \quad \sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = 0 \vec{z}$$

si $N > 0$: Traction

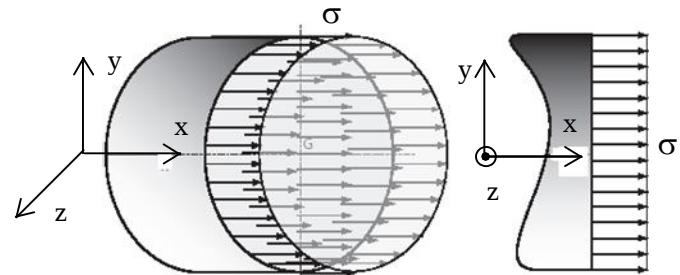
– si $N < 0$: Compression.

- 2- La seule contrainte non nulle est la contrainte normale σ qui est uniforme dans la section droite S et définit par :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

Traction : $N > 0 \Rightarrow \sigma > 0$

Compression : $N < 0 \Rightarrow \sigma < 0$



Cas de la traction

- 3- La loi de Hooke donne la relation contrainte déformation (dans le domaine élastique dans les deux cas de sollicitation) :

$$\sigma = \varepsilon E. \quad (E = \text{module de Young et } \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}) \quad \text{soit } \Delta L = \frac{NL_0}{E.S}$$

Traction : $N > 0 \Rightarrow \Delta L > 0$

Compression : $N < 0 \Rightarrow \Delta L < 0$

- 4- La relation entre la déformation dans une direction transversale à celle à la direction de traction est : $\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}$ (ν est appelé coefficient de poisson)

- 5- la relation entre le module de rigidité longitudinal E et le module de rigidité transversal G est :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{unité : daN/mm}^2.$$

- 6- Relation entre la déformation et le déplacement est : $\varepsilon(x) = \frac{dU}{dx}$

- 7- Conditions de résistance : critère des contraintes.

En traction : $\sigma_{\text{adm}} \leq \sigma_{\text{Pe}}$ avec $\sigma_{\text{Pe}} = \frac{R_e}{s}$ (R_e : contrainte pratique à l'extension) et s coefficient de sécurité > 1

En compression : $\sigma_{\text{adm}} \leq \sigma_{\text{Pc}}$ avec $\sigma_{\text{Pc}} = \frac{R_e^*}{s}$ (R_e^* : limite élastique en compression et s : coefficient de sécurité > 1)

- 8- Conditions de résistance : critère des déplacements

$$s_0 U(M) \leq U_{\text{lim}} \quad \text{avec } s_0 \text{ coefficient de sécurité } > 1.$$

LEÇON 5 : CISAILLEMENT

Objectif spécifique : Au terme de cette leçon, l'étudiant doit être capable :

- de déterminer la contrainte de cisaillement d'une section.
- d'établir la loi de Hooke, l'équation de la déformation élastique, et la condition de rigidité

5.1 DEFINITION

Une poutre, ou un tronçon de poutre est sollicité au cisaillement simple lorsqu'elle est soumise à deux actions mécaniques de liaison qui se réduisent dans une section droite (S) à deux résultantes directement opposées et perpendiculaire à l'axe de la poutre. La section (S) de la poutre est appelée « section de cisaillement » ou « section cisillée ».

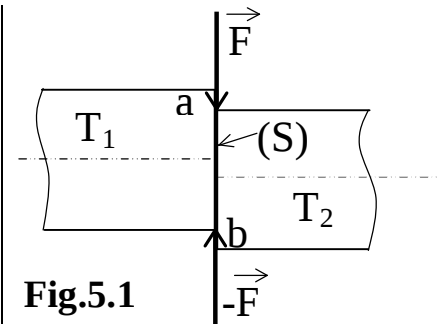


Fig.5.1

5.2 EFFORT DE COHESION

Remarquons à la figure 5.4 ci-contre que la section ne se cisaille pas dans le plan (ab), mais dans une section voisine. On note aussi qu'avant la rupture, il y a une déformation de la section suivant un angle très petit γ appelé angle de glissement ou de déviation dépendant de la nature du matériau étudié.

Ainsi, en considérant la coupure fictive en S_b , on démontre que $\sum \vec{F}_{int} = T_y \vec{y}$ et $\sum M_G(\vec{F}_{int}) = -F \cdot \Delta x \vec{z}$

Dans les conditions de cisaillement pur, Δx est très petit par conséquent, les efforts intérieurs s'écrivent alors :

$$\sum \vec{F}_{int} = T_y \vec{y} \quad \text{et} \quad \sum M_G(\vec{F}_{int}) = 0 \vec{z}$$

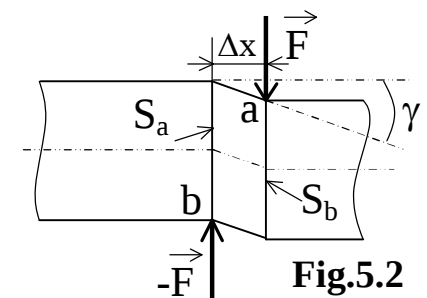


Fig.5.2

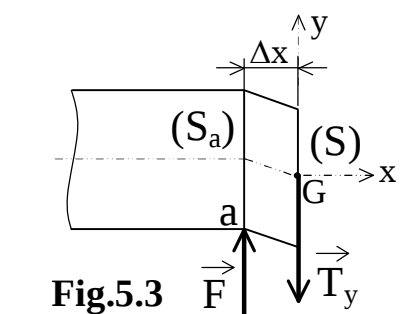


Fig.5.3

5.3 ESSAI DE CISAILLEMENT REEL

Soit une poutre P encastrée parfaitement dans la machioire M de la machine d'essai. Appliquons lui un effort de cisaillement uniformément repart dans le plan (S) et soit F la résultante en A de l'action mécanique associée. (fig.5.4).

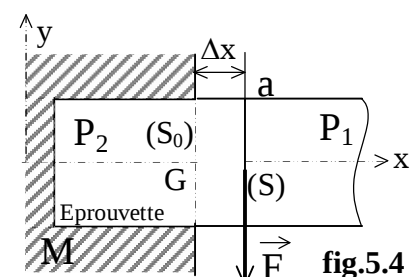
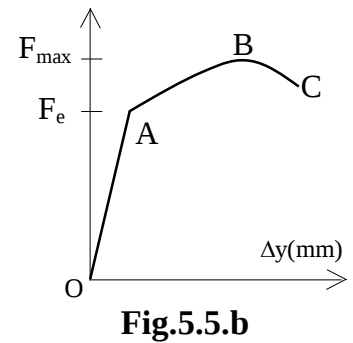
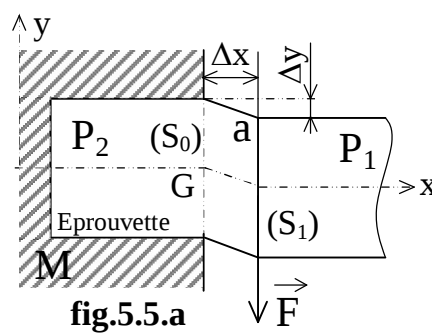


fig.5.4

La figure 5.5.a donne l'allure de la poutre cisailée et 5.5.b la courbe enregistrée donnant la relation entre l'intensité de la résultante F et le glissement transversal Δy de la section (S) par rapport à la section d'encastrement (S_0).



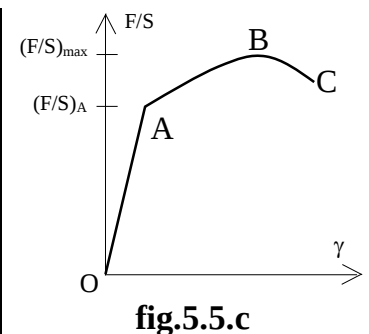
5.4 ETUDE DE DEFORMATION

D'après fig.5.5.b, on note que dans la zone de déformation élastique, le glissement transversal Δy et l'effort de cisaillement F sont proportionnels, c'est-à-dire : $F = k \cdot \Delta y$. Ici la valeur de k dépend des dimensions de l'éprouvette.

Par contre, si nous avons :

- en abscisse : $\gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ appelé glissement relatif ou déviation
- en ordonnée $\frac{F}{S}$: effort unitaire de cisaillement,

On obtient une courbe identique mais qui ne dépend que du matériau de l'éprouvette. On l'exprime alors comme suit :



$$\frac{F}{S} = G \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

G : module d'élasticité transversale ou module de coulomb.

5.5 ETUDE DES CONTRAINTES

5.5.1 CONTRAINTE TANGENTIELLE MOYENNE DE CISAILLEMENT

La figure 5.6 ci-contre montre un boulon sollicité au cisaillement sous l'action de deux forces contraires et égales.

Hypothèses :

- T est la résultante des efforts uniformes repartis et agissant dans le plan de la section (ab).
- La répartition des contraintes est uniforme sur toute la section (ab).

La Contrainte tangentielle moyenne de cisaillement est définie par : $\tau = \frac{T}{S}$ unité : [daN]

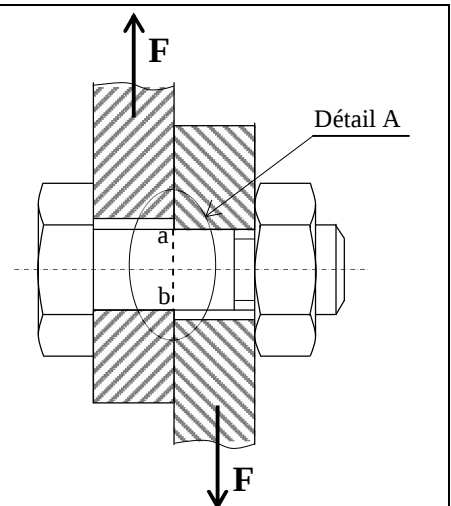
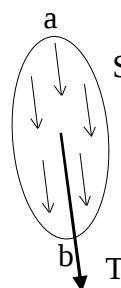


Fig.5.6 :

5.5.2 LOI DE HOOKE

La relation (1) du paragraphe 5.2.4 peut s'écrire sous la forme : $\tau = G \gamma$.

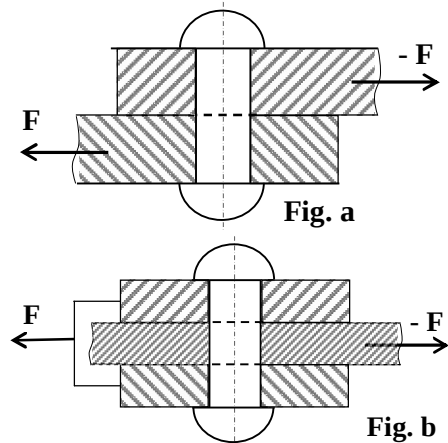
5.6 CONDITION DE RESISTANCE

Pour qu'une pièce sollicitée au cisaillement puisse résister à cette dernière, il faudrait que la contrainte moyenne au cisaillement admissible τ reste inférieure à la résistance pratique au cisaillement R_p : $\tau \leq R_p$ or $R_p = \frac{R_g}{s}$ où R_g = limite d'élasticité au glissement et s : le coefficient de sécurité.

5.7 EXERCICE D'APPLICATION

Dans la réalisation des fermes pour une construction, on a assemblé des profilés dont les coupes partielles sont représentées comme l'indique les figures ci-contre à l'aide d'un rivet en acier doux de diamètre 14mm dont la contrainte tangentielle pratique est $\tau_p = 70$ MPa. L'effort de traction maximal sur les fers plats est $F = 15.10^3$ N.

Question : Vérifier si ce rivet de diamètre $\phi 14$ peut supporter l'effort de traction en présence dans les deux cas de figure.



Solution :

Cas de la fig.a :

Condition de résistance à la rivure : $\tau_{moy} \leq \tau_p$ avec $\tau_{moy} = F/S \Leftrightarrow F/S \leq \tau_p \Leftrightarrow \frac{4F}{\pi d^2} \leq \tau_p$

$\Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi \tau_p}}$ AN : $d \geq \sqrt{\frac{4 \times 15.10^3}{\pi \cdot 70}} = 16,52 \text{ mm}$; $\Rightarrow d \geq 14 \text{ mm} \Rightarrow$ mauvais choix.

Cas de la fig.b : (Ici le rivet est sollicité au niveau de deux surfaces) $\Rightarrow \tau_{moy} = \frac{F}{2.S}$

$\Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{2F}{\pi \tau_p}}$ AN : $d \geq \sqrt{\frac{2 \times 15.10^3}{\pi \cdot 70}} = 11,68 \text{ mm}$; $d \leq 14 \text{ mm} \Rightarrow$ bon choix.

CE QU'IL FAUT RETENIR (CQFR):

1- Une poutre, ou un tronçon de poutre, est sollicité au cisaillement alors :

$$\sum \vec{F}_{int} = T_y \vec{y} \quad \text{et} \quad \sum M_G(\vec{F}_{int}) = 0 \quad \vec{z}$$

2- La Contrainte tangentielle moyenne de cisaillement est définie par : $\tau = \frac{T}{S}$ unité : [daN]

3- La relation entre la contrainte et le glissement relatif est donnée par : $\tau = G \gamma$.

4- La condition de résistance au cisaillement est définie par : $\tau \leq R_p$ avec $R_p = \frac{R_g}{s}$

où R_g = limite d'élasticité au glissement et s : le coefficient de sécurité.

LEÇON 6 : TORSION

Objectif spécifique : Au terme de cette leçon, l'étudiant doit être capable :

- de déterminer la contrainte de cisaillement d'une section.
- d'établir la loi de Hooke, l'équation de la déformation élastique, et la condition de rigidité

6.1 DEFINITION

Une poutre, ou un tronçon de poutre cylindrique est sollicitée en torsion simple lorsqu'elle est soumise à ses deux extrémités par deux couples opposés dont les moments sont parallèles à la ligne moyenne. (fig.5.1)

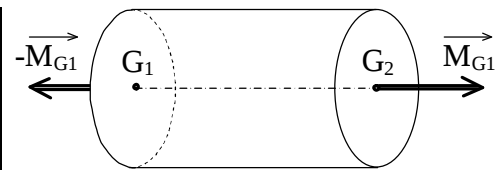


Fig.6.1

Les efforts de cohésion s'exprime alors : $\sum \vec{F}_{int} = 0 \vec{y}$ et $\sum \vec{M}_G(\vec{F}_{int}) = Mt \vec{x}$

6.2 HYPOTHESE

Les poutres étudiées sont des cylindres de révolution à base circulaire donc des poutres droites à section circulaire.

Cette restriction est due au fait que :

- toute section non circulaire ne reste pas plane et se gauchisse,
- la contrainte de cisaillement qui est perpendiculaire au rayon vecteur ne peut pas être tangente au contour non circulaire de la section.

6.3 ESSAI

On trace avant l'essai, une génératrice M_1M_2 du cylindre. On applique à l'extrémité (S_2) de centre de surface G_2 un couple $\|\vec{M}_{G_2}\|$ qu'on fait croître lentement.

On constate que la génératrice M_1M_2 se déforme suivant une hélice $M_1M'_2$.

Lorsque $\|\vec{M}_{G_2}\|$ croît, un dispositif enregistreur permet de mesurer γ . (fig.5.3).

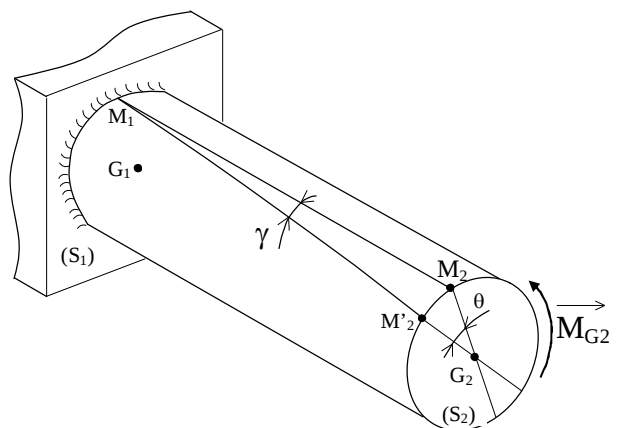


Fig.6.2

Dans la zone OA où $M_{G2} < M_A$, l'angle γ est proportionnel à M_{G2} . Si on annule M_{G2} , l'éprouvette reprend sa forme initiale.

Dans la zone AB où $M_{G2} > M_A$, l'angle γ devient plus importante et permanente. (ie si on annule M_{G2} , l'éprouvette ne reprend plus sa forme initiale).

L'Essai se termine en B par la coupure de l'éprouvette.

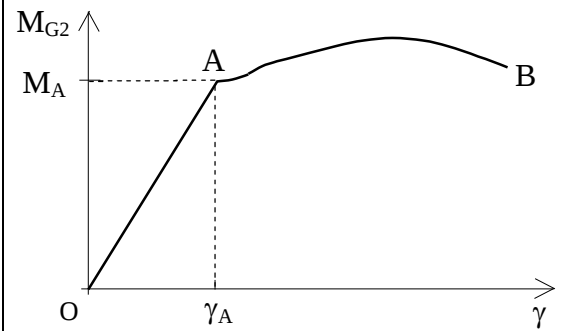
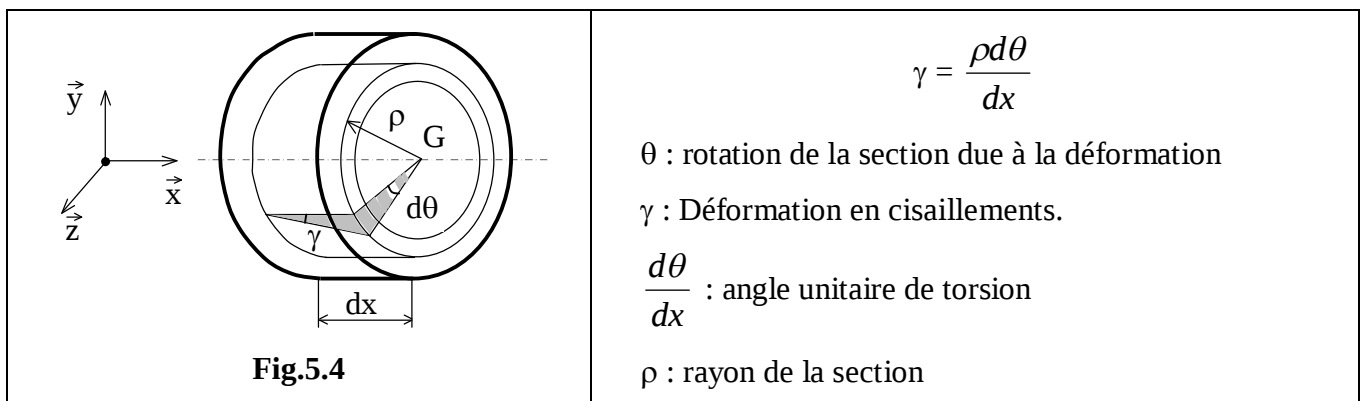


Fig.6.3

6.4 ETUDE DES DEFORMATIONS

Dans la zone OA où $M_{G2} < M_A$, la courbe (droite) peut s'écrire : $M_{G2} = k.\gamma$. Remarquons que l'angle γ ne caractérise pas la déformation de torsion de la section droite. Il faut donc définir un angle de torsion au niveau de la section que l'on notera θ .

Considérons un petit élément de longueur dx d'une fibre, M_1M_0 avant déformation et M_1M après déformation élastique. (fig.5.4)



Il nous faut maintenant connaître la répartition des contraintes et des déformations dans la section.

6.5 ETUDE DES CONTRAINTES

6.5.1 EFFORTS DE COHESION

Considérons les efforts élémentaires de cohésion $\vec{df}$ dans la section droite (S). La théorie de l'élasticité permet de démontrer que les forces de cohésion sont dans le plan de (S) perpendiculaire au rayon GM. On définit donc :

- la contrainte tangentielle au point M : $\vec{\tau} = \frac{\vec{df}}{ds}$
- le moment en G des efforts de cohésion : $\vec{M}_G = \iint_S \vec{GM} \wedge \vec{df}$ et par projection (G,x) on a : $M_t = \iint_S \rho.\tau.ds$

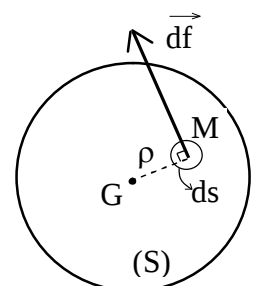


Fig.6.4

6.5.2 LOI DE HOOKE (Relation Contrainte/déformation)

Dans le domaine élastique, il existe une proportionnalité entre contrainte et déformation.

$$\tau = G \cdot \gamma \quad \left| \begin{array}{l} \tau = \text{contrainte de cisaillement (MPa)} \\ \gamma = \text{déformation au cisaillement} \\ G = \text{Constante de proportionnalité appelée module de Coulomb ou encore module d'élasticité transversale. C'est une caractéristique mécanique des matériaux.} \end{array} \right.$$

$$\text{Or } \gamma = \frac{r d\theta}{dx} \Rightarrow \tau = G \cdot \rho \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

6.5.3 CONTRAINTE-MOMENT DE TORSION

D'après les relations du paragraphe 5.1.5.1 et 5.1.5.2, on a :

$$M_t = \iint_S r \cdot \tau \, dS = \frac{G d\theta}{dx} \iint_S r^2 \, dS = \frac{G d\theta}{dx} I_0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_t}{GI_0} \Rightarrow \tau = \frac{M_t \cdot \rho}{I_0}$$

$$\tau = \frac{M_t \cdot \rho}{\left(\frac{I_0}{\nu} \right)} \quad \text{avec } \nu = \rho_{\max} \text{ et } \frac{I_0}{\nu} \text{ module de torsion.}$$

6.6 EQUATION DE LA DEFORMATION (Relation déformation et moment de torsion)

$$\text{On sait que : } \tau = G \cdot \rho \cdot \frac{d\theta}{dx} \text{ et } \tau = \frac{M_t \cdot r}{I_0} \Rightarrow G \cdot \rho \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_t \cdot \rho}{I_0}$$

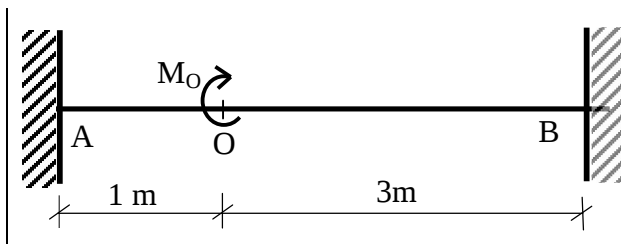
$$\Rightarrow d\theta = \frac{M_t}{GI_0} dx \Rightarrow \int d\theta = \int_0^L \frac{M_t}{GI_0} dx \Rightarrow \theta = \frac{M_t \cdot L}{GI_0}$$

6.7 CONDITION THEORIQUE DE RESISTANCE

$$\tau_{\max} \leq \tau_p = \frac{\tau_e}{s}$$

6.8 EXERCICE D'APPLICATION

Considérons la poutre encastree en A et B soumise à une torsion en O comme l'indique la figure ci-contre. Déterminer les moments de torsion intérieurs de chaque section. On donne $M_0 = 1 \text{ kN.m}$.



Solution :

$$M_A + M_B = M_O \quad (1) \Rightarrow \text{Système hyperstatique}$$

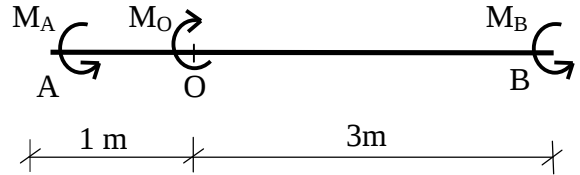
$$\varphi_{AO} = \varphi_{BO} \Leftrightarrow \frac{M_A \cdot AO}{GI_O} = \frac{M_B \cdot BO}{GI_O} \Rightarrow M_A = 3M_B \quad (2)$$

$$(2) \text{ dans } (1) \Rightarrow M_B = M_O / 4 = 250 \text{ N.M}$$

$$M_A = 750 \text{ N.M}$$

$$\text{- Entre AO } M_t = -M_A =$$

$$\text{- Entre OB } M_t = M_O - M_A$$



CE QU'IL FAUT RETENIR (CQFR):

1- Une poutre, ou un tronçon de poutre, est sollicitée en torsion alors :

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = 0 \vec{y} \quad \text{et} \quad \sum \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{int}}) = M_t \vec{x} \quad \text{et} \quad M_t = \iint_S \rho \cdot \tau \cdot ds$$

2- La relation contrainte et déformation (glissement relatif) est donnée par :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

τ = contrainte de cisaillement (MPa)
 γ = déformation au cisaillement
 G = Constante de proportionnalité appelée module de Coulomb ou encore module d'élasticité transversale. C'est une caractéristique mécanique des matériaux.

$$\text{Or } \gamma = \frac{rd\theta}{dx} \Rightarrow \tau = G \cdot \rho \cdot \frac{d\theta}{dx} \quad \text{où } \frac{d\theta}{dx} : \text{angle unitaire de torsion}$$

3- L'équation de la déformée est donnée par la relation : $\theta = \frac{M_t \cdot L}{GI_0}$.

4- La condition de résistance au cisaillement est définie par : $\tau_{\max} \leq \tau_p = \frac{\tau_e}{s}$

où τ_e = limite d'élasticité au glissement et s : le coefficient de sécurité.

LEÇON 7 : FLEXION SIMPLE

Objectif spécifique : Au terme de cette leçon, l'étudiant doit être capable, pour une poutre sollicitée en flexion simple :

- de calculer sa contrainte
- d'établir l'équation de sa déformée et calculer la fleche et la pente de la courbe correspondante.

7.1 DEFINITION

Une poutre, ou un tronçon de poutre, est sollicitée en flexion simple si et seulement si les efforts intérieurs se présentent sous la forme suivante :

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = T_y \vec{y} \quad \text{et} \quad \sum \overline{M_G}(\vec{F}_{\text{int}}) = M f_z \vec{z}$$

Si $T_y = 0$, alors on parle de **flexion pure**.

7.2 RELATION ENTRE L'EFFORT TRANCHANT ET LE MOMENT DE FLEXION

Soit une poutre sollicitée en flexion (figure 6.1), considérons un petit tronçon de cette dernière compris entre les abscisses x et $x + dx$ tel qu'il est représenté sur la figure 7.2.

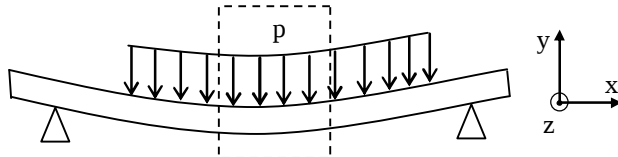


Fig. 7.1 : Poutre sollicitée en flexion

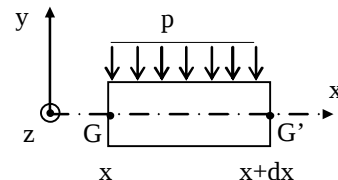


Fig. 7.2 : Tronçon de Poutre.

On suppose que les efforts extérieurs qui s'exercent sur ce tronçon sont une charge linéique uniforme sur toute la longueur dx .

En isolant le tronçon de la poutre de longueur dx on a comme bilan des actions mécaniques extérieures sur le tronçon:

- En G on a : $\sum \vec{F}_{\text{int}} = T_y \vec{y} \quad \text{et} \quad \sum \overline{M_G}(\vec{F}_{\text{int}}) = M f_z \vec{z}$
- En G' on a : $\sum \vec{F}_{\text{int}} = (T_y + dT_y) \vec{y} \quad \text{et} \quad \sum \overline{M_{G'}}(\vec{F}_{\text{int}}) = (M f_z + d M f_z) \vec{z}$
- Charge linéique : $-p \vec{y}$

PFS en G': $-T_y + T_y + dT_y - p \, dx = \vec{0}$

$$-M_{f_z} + M_{f_z} + dM_{f_z} + T_y dx + \frac{1}{2} p dx^2 = 0$$

En négligeant les terme du second ordre de l'équation du moment (ie $\frac{1}{2} p dx^2 = 0$) on a déduit :

$$\frac{dT_y}{dx} = p \quad \text{et} \quad \frac{dM_{f_z}}{dx} = -T_y$$

Remarque : La deuxième relation permet de vérifier la cohérence du torseur des efforts intérieurs calculés.

7.3 DETERMINATION DE L'ALLONGEMENT ε

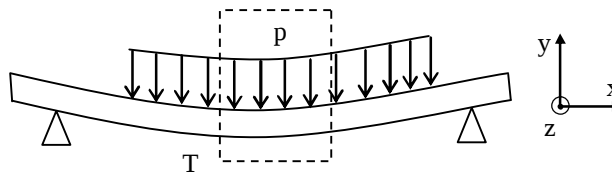


Fig. 7.3 : Poutre sollicitée en flexion

La figure 7.4 représente le tronçon (T) de la poutre avant et après déformation. Le problème est d'évaluer la variation de longueur d'une fibre ab d'ordonnée y par rapport à la ligne moyenne. Cette fibre après déformation se transforme en ab_1 .

Remarque : On constate que les fibres situées au dessus de la fibre moyenne se raccourcissent, tandis que les fibres situées sous la fibre moyenne s'allongent. La fibre moyenne ne change pas de longueur : on l'appelle aussi **fibre neutre**.

Conséquence:

- Les fibres s'allongent ou se raccourcissent et sont donc soumises à des **contraintes normales**. (fig. 7.5)
- Entre chaque fibre, on a des variations de longueur qui induisent des contraintes tangentielles. On a donc à la fois des **contraintes tangentielles** dites longitudinales dans le plan $(\vec{z}, \vec{x})$, et par réciproque, des contraintes tangentielles transversales (dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$). (et figure 7.6).

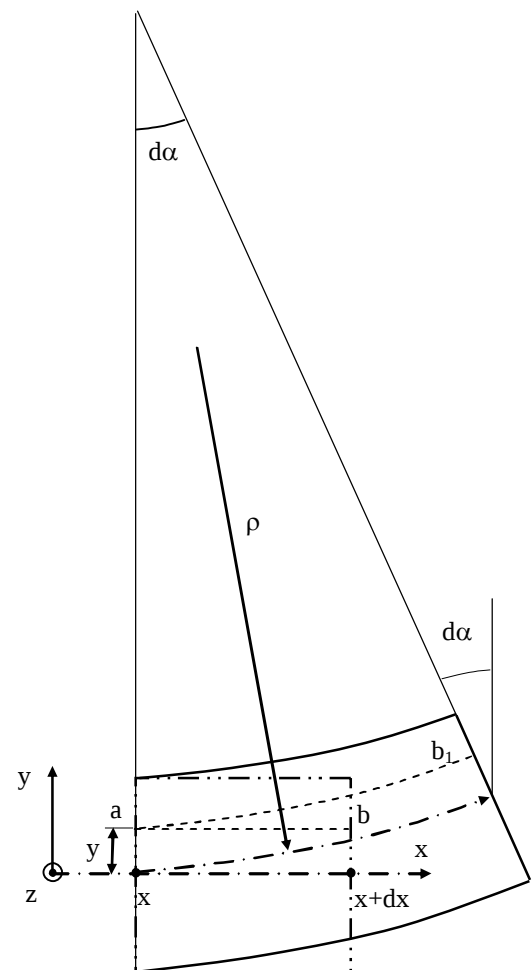


Fig. 7.4 : Tronçon de Poutre.

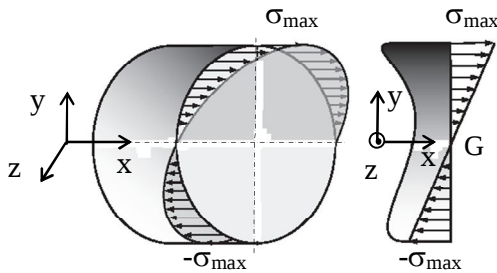


Fig. 7.5 : Répartition linéaire des contraintes normales dans l'épaisseur

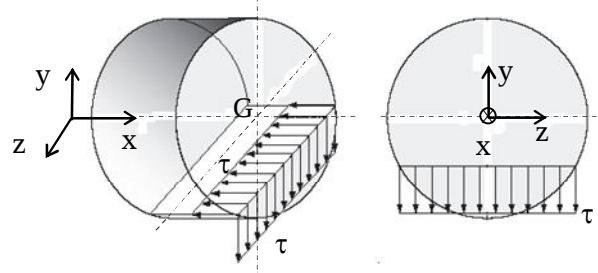


Fig. 7.6 : Répartition linéaire des contraintes tangentielles dans la largeur

La déformation de cette fibre s'écrit $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{ab_1 - ab}{ab}$ avec $ab_1 = (\rho - y) d\alpha$ et $ab = dx$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{(\rho - y).d\alpha - dx}{dx} = (\rho - y) \frac{d\alpha}{dx} - 1 \quad \text{Or, on sait que } \rho = \frac{dx}{d\alpha} \quad \text{donc } \frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{dx}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 1 y \cdot \frac{d\alpha}{dx} - 1 = y \frac{d\alpha}{dx} = \frac{y}{\rho} \cdot d\alpha \quad \text{D'où} \quad \boxed{\varepsilon = \frac{y}{\rho} d\alpha}$$

D'après la loi de Hooke, on a : $\sigma = E \cdot \varepsilon$ d'où $\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho}$

7.4 RELATION CONTRAINTE NORMALE / MOMENT FLECHISSANT

On sait que : $T_y \vec{y} = \iint_S \vec{C}_M \cdot d\vec{S}$ et $M_{fz} \vec{z} = \iint_S \vec{GM} \wedge \vec{C}_M \cdot d\vec{S}$

Pour déterminer la relation recherchée, il suffit de projeter le moment de flexion sur l'axe sur l'axe $\vec{z} \Leftrightarrow M_{fz} = \iint_S \vec{GM} \wedge \vec{C}_M \cdot d\vec{z}$ Or $\vec{C}_M = \sigma \vec{x} + \tau \vec{y}$

En s'intéressant uniquement aux contraintes normales, on ne prend en compte que la projection du vecteur contrainte sur l'axe $\vec{x} \Rightarrow \vec{C}_M \cdot \vec{x} = \sigma = E \cdot \frac{y}{\rho}$

$$\Rightarrow M_{fz} = \iint_S \vec{GM} \wedge \sigma \vec{x} \cdot d\vec{S} \quad \text{Avec } \vec{GM} = x \vec{x} + y \vec{y}$$

$$\Rightarrow M_{fz} = \iint_S -\sigma \cdot y \cdot dS \quad \text{Avec } \sigma = E \cdot \frac{y}{\rho} \quad \text{On obtient ainsi : } M_{fz} = -\frac{E}{\rho} \iint_S y^2 \cdot dS.$$

Or $\iint_S y^2 \cdot dS = I_{GZ}$ (Moment quadratique)

On obtient alors : $M_{fz} = -\frac{E}{\rho} \cdot I_{GZ}$ et comme $\frac{\sigma}{y} = \frac{E}{\rho}$ On a finalement :

$$\boxed{\sigma = -\frac{M_{fz}}{I_{GZ}} \cdot y}$$

7.5 EQUATION DE LA DEFORMEE

7.5.1 DEFINITIONS

- 1- On appelle équation de la déformée notée $y(x)$ l'équation de la courbe caractéristique de la ligne moyenne après déformation (figure 7.7).
- 2- La ligne moyenne après déformation est aussi appelée déformée et la valeur de la déformée en un point est appelée flèche.

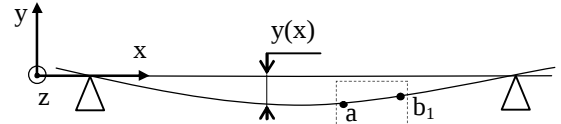


Fig. 7.7 : Déformée de la ligne moyenne

7.5.2 EXPRESSION DE L'EQUATION DE LA DEFORMEE

Soit représenté à grande échelle le tronçon ab_1 (figure 7.8) de la déformée de la figure 7.7.

φ est la pente de la courbe élastique au point a.

$$\tan \varphi \approx \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \varphi = \frac{dy}{dx} \quad (1)$$

$$\varphi_{b1} = \varphi_a + d\alpha \Rightarrow d\alpha = \varphi_{b1} - \varphi_a = d\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} \quad (2) \text{ et (1) dans (2)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

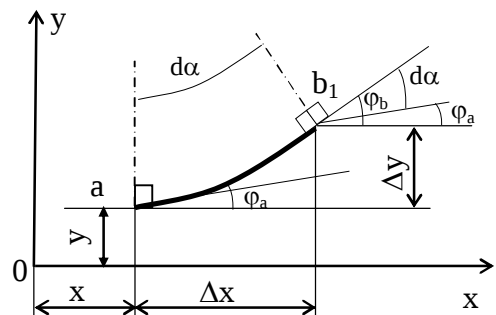


Fig. 7.8 : Tronçon AB de la Poutre.

$$\text{Or : } \sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = -\frac{E \cdot y}{\rho} = -\frac{Mfz \cdot y}{I_{Gz}} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{Mfz}{E \cdot I_{Gz}} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$-\frac{Mfz}{E \cdot I_{Gz}} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Remarque

La pente de la courbe en tout point M de cette dernière est donnée par la relation :

$$-\frac{Mfz}{E \cdot I_{Gz}} = \frac{d\varphi}{dx}$$

7.6 CALCUL DE LA FLECHE ET DE LA PENTE

7.6.1 METHODE DE DOUBLE INTEGRALE

Procédure

Il s'agira :

- de déterminer les expressions des efforts tranchants (T_y) et des moments fléchissants (Mf_z) suivant les zones,
- puis de remplacer les expressions des moments fléchissants (Mf_z) obtenus ci-dessus dans celle de l'équation de la déformée et enfin la résoudre pour obtenir la flèche et la pente en tout point de la poutre suivant chaque zone.

Application

Soit la poutre sur deux appuis ci-contre.
Déterminer la pente et la flèche aux points A, B et C.

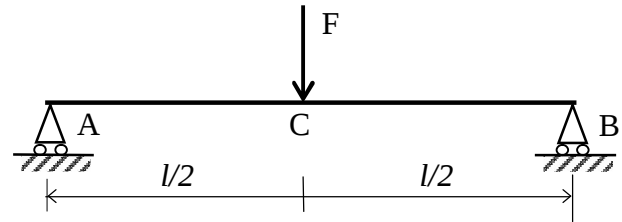


Figure 7.9 :

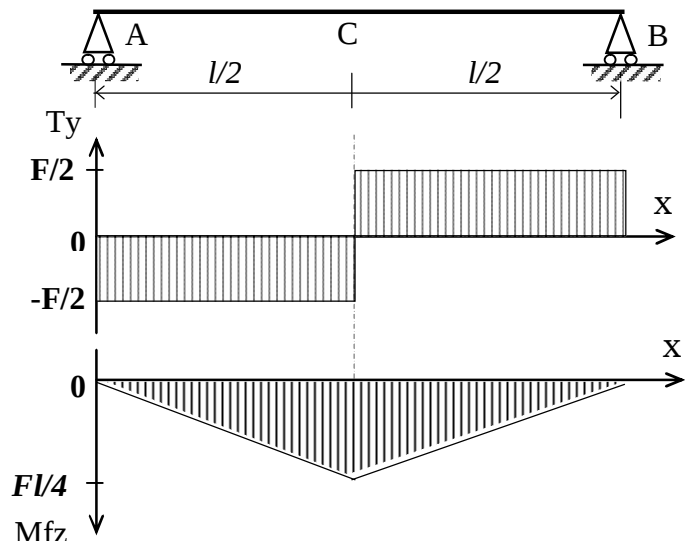
1- Expression des équations des actions de cohésions.

a- Détermination des actions inconnues en A et B.

$$\text{PFS} \Rightarrow R_A = R_B = F/2.$$

b- Tableau de T_y et M_{fz} .

X	A-C	C-B
T_y	$-\frac{F}{2}$	$\frac{F}{2}$
M_{fz}	$\frac{F}{2}x$	$\frac{F}{2}(l-x)$
	0	$\frac{Fl}{4}$
		0



2- Détermination de la flèche au point C.

Méthode de résolution : On sait que $\frac{M_{fz}}{E.I_{Gz}} = \frac{d^2y}{dx^2} = y''$, (1)

$$(1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \int \frac{M_{fz}}{E.I_{Gz}} dx + C_1 \quad \text{Or } \frac{dy}{dx} = \varphi \Rightarrow E.I_{Gz}.\varphi = \int M_{fz}.dx + C_1$$

$$y = \int \left(\int \frac{M_{fz}}{E.I_{Gz}} dx + C_1 \right) dx + C_2 \Rightarrow E.I_{Gz}.y = \int E.I_{Gz}.\varphi dx + C_2$$

Les équations étant écrites, il reste à déterminer les constantes C_1, C_2, C_3 et C_4 .

➤ Entre A-C :

$$\begin{cases} E.I_{Gz}.y_1'' = \frac{F}{2}x \\ E.I_{Gz}.\varphi_1 = \frac{F}{4}x^2 + C_1 \\ E.I_{Gz}.y_1 = \frac{F}{12}x^3 + C_1x + C_2 \end{cases} \quad (1) \quad \text{où } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont à déterminer}$$

$$(2)$$

➤ Entre C-B

$$\begin{cases} E.I_{GZ} \cdot y_2'' = -\frac{F}{2}x + \frac{F}{2}l \\ E.I_{GZ} \cdot \varphi_2 = -\frac{F}{4}x^2 + \frac{Fl}{2}x + C_3 \end{cases} \quad (3)$$

$$E.I_{GZ} \cdot y_2 = -\frac{F}{12}x^3 + \frac{Fl}{4}x^2 + C_3x + C_4 \quad (4)$$

où C_3 et C_4 sont à déterminer

Pour déterminer C_1 , C_2 , C_3 et C_4 , utilisons les conditions aux frontières.

- En A donc à $x = 0$, $y_1 = 0$ alors l'équation (2) $\Rightarrow C_2 = 0$

- En B donc à $x = l$, $y_2 = 0$ alors l'équation (4) $\Rightarrow \frac{F}{6}l^3 + C_3l + C_4 = 0$

- En C donc à $x = \frac{l}{2}$, la déformée étant continue ; on a une flèche et une pente unique :

$$y_1(l/2) = y_2(l/2) \Leftrightarrow \frac{Fl^3}{96} + \frac{l}{2}C_1 = -\frac{Fl^3}{96} + \frac{Fl^3}{16} + \frac{l}{2}C_3 + C_4 \Rightarrow -\frac{Fl^3}{24} = -C_1\frac{l^3}{2} + C_3\frac{l}{2} + C_4$$

$$\varphi_1(l/2) = \varphi_2(l/2) \Leftrightarrow \frac{Fl^2}{16} + C_1 = -\frac{Fl^2}{16} + \frac{Fl^2}{4} + C_3 \Rightarrow -\frac{Fl^2}{8} = C_3 - C_1$$

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ lC_3 + C_4 = -\frac{Fl^3}{6} \\ -\frac{l}{2}C_1 + \frac{l}{2}C_3 + C_4 = -\frac{Fl^3}{24} \\ C_3 - C_1 = -\frac{F}{8}l^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = -\frac{Fl^2}{16} \\ C_3 = -\frac{3Fl^2}{16} \\ C_4 = \frac{Fl^3}{48} \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{E.I_{GZ}} \left(\frac{F}{4}x^2 - \frac{Fl^2}{16} \right) \quad \text{et} \quad y_1(x) = \frac{1}{E.I_{GZ}} \left(\frac{F}{12}x^3 - \frac{Fl^2}{16}x \right)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{E.I_{GZ}} \left(-\frac{F}{4}x^2 + \frac{Fl}{2}x - \frac{3Fl^2}{16} \right) \quad \text{et} \quad y_2(x) = \frac{1}{E.I_{GZ}} \left(-\frac{F}{12}x^3 + \frac{Fl}{4}x^2 - \frac{3Fl^2}{16}x + \frac{Fl^3}{48} \right)$$

Détermination des pentes et des flèches.

En A ($x=0$) $\varphi_1(0) = -\frac{Fl^2}{16E.I_{GZ}}$ et $y_1(0) = 0$

En B ($x=l$) $\varphi_2(l) = \frac{Fl^2}{16E.I_{GZ}}$ et $y_2(l) = 0$

En C ($x=l/2$): $\varphi_1(l/2) = \varphi_2(l/2) = \frac{Fl^2}{8E.I_{GZ}}$ et $y_1(l/2) = y_2(l/2) = -\frac{Fl^3}{48E.I_{GZ}}$

7.6.2 METHODE DE MOHR OU DES AIRES DES MOMENTS FLECHISSANTS

La méthode de Mohr a pour objet de déterminer la flèche en calculant les moments des charges fictives par rapport au point considéré à gauche ou à droite.

Procédure

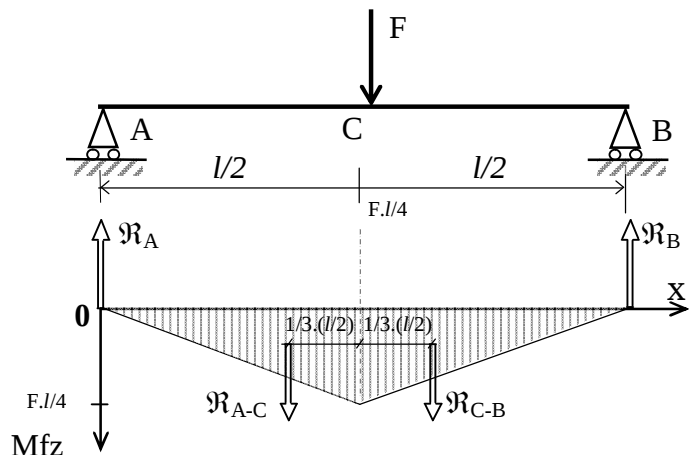
Il s'agira :

- de déterminer les expressions des efforts tranchants (T_y), des moments fléchissants (M_f) et de tracer leur diagramme respectives,
- puis déterminer les charges fictives du diagramme du M_f .
- Et enfin déterminer la flèche en calculant les moments des charges fictives par rapport au point considéré à gauche ou à droite

Application (Reprenons l'application précédente)

Tableau de T_y et M_f .

x	A-C	C-B
T_y	$-\frac{F}{2}$	$\frac{F}{2}$
M_f	$\frac{F}{2}x$	$\frac{F}{2}(l-x)$
	0	$\frac{Fl}{4}$
		0



Le diagramme du moment fléchissant ci-dessus représente le diagramme des charges fictives à $1/EI$ près

Ainsi, la charge fictive entre A-C est : $R_{A-C} = \frac{1}{EI} \left(\frac{F \cdot l/4 \cdot l/2}{2} \right) = \frac{Fl^2}{16EI}$

la charge fictive entre C-B est : $R_{C-B} = \frac{1}{EI} \left(\frac{F \cdot l/4 \cdot l/2}{2} \right) = \frac{Fl^2}{16EI}$

la charge fictive totale entre A-B est : $R = R_{AC} + R_{CB} = \frac{Fl^2}{8EI}$

Le système étant symétrique, le PFS appliqué au système sollicité par les forces fictives donne : $R_A = R_B = -R/2 = -\frac{Fl^2}{16EI}$.

On obtient alors la flèche en C en calculant le moment des charges fictives à gauche ou à droite du point M.

$$y_C = R_A \frac{l}{2} - R \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Fl^2}{16EI} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Fl^2}{16EI} \cdot \frac{l}{6} = \frac{Fl^3}{48EI}$$

7.7 CONTRAINTE TANGENTIELLE.

Les contraintes tangentielles sont à la fois longitudinales et transversales comme l'indique la figure 7.6. On admettra également que ces contraintes tangentielles sont constantes dans la largeur comme celles qui sont normales.

- a. Supposons que les contraintes tangentielles dans la largeur ne dépendent pas de y . c'est-à-dire qu'elles sont uniformes sur toute la section droite.

L'équation de résultante en projection sur $\vec{y}$ tirée de la relation intégrale sur les efforts intérieurs s'écrit alors : $T_y = \iint_S \tau \cdot dS$. Et comme τ est uniforme sur S , on en déduit que

$$\tau = \frac{T_y}{dS}$$

NB : Cette expression est généralement utilisée car elle donne une valeur maxi de la contrainte tangentielle. Toutefois, elle n'est pas exacte, car les contraintes tangentielles ne sont pas uniforme sur la section : elles dépendent de y .

- b. Cas des contraintes non uniformes.

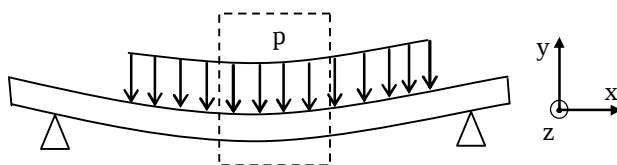


Fig. 7.10 : Poutre sollicitée en flexion

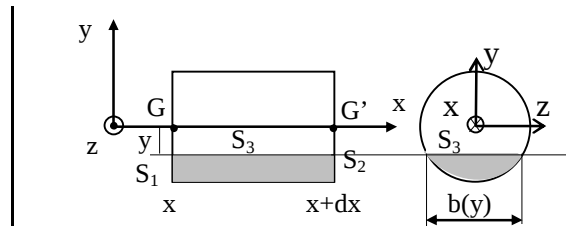


Fig. 7.11 : Isolement d'un tronçon de Poutre.

En isolant le tronçon de la poutre de longueur dx on a comme bilan des actions mécaniques extérieures sur le tronçon:

- En G on a : $\sum \vec{F}_{int} = -T_y \vec{y}$ et $\sum \overline{M}_G(\vec{F}_{int}) = -Mf_z \vec{z}$

- En G' on a : $\sum \vec{F}_{int} = (T_y + dT_y) \vec{y}$ et $\sum \overline{M}_{G'}(\vec{F}_{int}) = (Mf_z + dMf_z) \vec{z}$

Charge linéique : $-p \vec{y}$

Valeur des contraintes suivant les sections :

- En S_1 : on a $\sigma = \frac{Mf_z}{I_{GZ}} \cdot y$ et $\tau_1(y)$

- En S_2 : on a $\sigma = - \frac{Mf_z + dMf_z}{I_{GZ}} \cdot y$ et $\tau_2(y)$

- En S_3 : on a $\tau(y)$

En écrivant l'équation d'équilibre de ce tronçon, et en projetant suivant l'axe des x on obtient :: $\int_{S_1} \sigma_1 dS + \int_{S_2} \sigma_2 dS + \int_{S_3} \tau \cdot dS$

$$\int_{S_1} \frac{Mfz}{I_{GZ}} y.dS + \int_{S_2} \frac{Mfz - dMfz}{I_{GZ}} y.dS + \tau(y) b(y).dx = 0$$

$$\Leftrightarrow - \int_{S_1} \frac{dMfz}{I_{GZ}} y.dS + \tau(y) b(y).dx = 0 ;$$

En divisant par dx on a : $-\frac{1}{I_{GZ}} \frac{dMfz}{dx} \int_{S_1} ydS + \tau(y) b(y) = 0$

Sachant que $T_y = -\frac{dMfz}{dx}$ et $\int_{S_1} ydS = A(y)$ (Moment statique) on a :

$$|\tau(y)| = \frac{T_y \cdot A(y)}{b(y) I_{GZ}}$$

Remarque : Lorsqu'on s'éloigne au maximum de la ligne moyenne (soit en $y = d/2$ où $y = h/2$ selon de section), l'intégrale qui permet de calculer $A(y)$ est nulle puisque la section sur laquelle on intègre est nulle. Ainsi la contrainte tangentielle est nulle sur les deux surfaces supérieures et inférieures de la poutre.

7.8 COMPARAISON DES CONTRAINTES.

L'étude sur la comparaison d'ordre de grandeur entre les contraintes montre qu'en flexion, les contraintes tangentielles sont négligeables devant les contraintes normales. Ainsi, les seules contraintes à dimensionner réellement sont :

- les contraintes normales en traction/compression
- les contraintes tangentielles en torsion
- les contraintes normales en flexion

7.9 CRITERE DE DIMENSIONNEMENT.

Pour dimensionner la poutre on utilise donc uniquement le critère sur la contrainte normale.

$$\sigma \leq \sigma_p \text{ avec } \sigma_p = \frac{R_e}{s}$$

On peut aussi prendre en compte le critère sur la flèche maximale, qui traduit, moyennant un coefficient de sécurité s_0 , que la flèche maximale $y(M)$ en un point M doit rester inférieure à une valeur donnée dépendante des conditions d'utilisation :

$$s_0 y(M) \leq y_{lim}$$

CE QU'IL FAUT RETENIR (CQFR):

- Une poutre, ou un tronçon de poutre, est sollicitée en flexion simple dès que les efforts intérieurs se présente sous la forme suivante :

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = T_y \vec{y} \quad \text{et} \quad \sum M_G(\vec{F}_{\text{int}}) = M_f_z \vec{z}$$

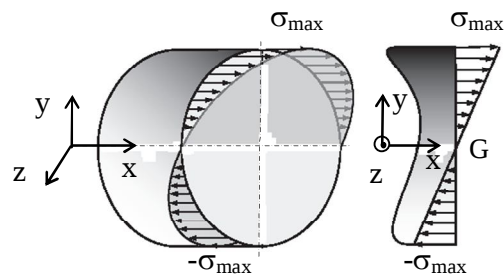
- Si de plus, $T_y = 0$, on parle alors de flexion pure.
- Le moment fléchissant et l'effort tranchant sont liés par la relation :

$$\frac{dT_y}{dx} = p \quad \text{et} \quad \frac{dM_f}{dx} = -T_y$$

- Les contraintes normales se calculent à l'aide de

$$\sigma = - \frac{M_f z}{I_{Gz}} \cdot y$$

où y est la distance à la fibre neutre et
 I_{Gz} : le moment quadratique



Répartition linéaire des contraintes normales dans l'épaisseur

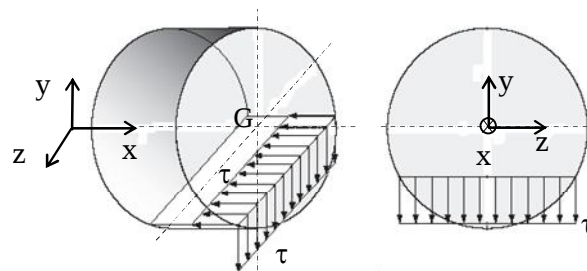
- L'équation de la flèche est : $E I_{Gz} y'' = M_f z$

- Les contraintes tangentielles sont négligeables devant les contraintes normales. On peut néanmoins les calculer avec :

$$\tau = \frac{T_y}{dS} \quad \text{ou}$$

$$|\tau(y)| = \frac{T_y \cdot A(y)}{b(y) I_{Gz}}$$

Avec $A(y)$: moment statique et $b(y)$: largeur de la poutre à la distance y de la fibre neutre.



Répartition linéaire des contraintes tangentielles dans la largeur

- Pour dimensionner une poutre en traction, on peut utiliser deux critères :

- Critère en contrainte : $\sigma \leq \frac{R_p}{s}$; avec s coefficient de sécurité > 1
- Critère en flèche maximale : $s_0 y(M) \leq y_{\text{lim}}$ avec s_0 coefficient de sécurité > 1

LEÇON 8 : LE FLAMBEMENT

Objectif spécifique : Au terme de cette leçon, l'étudiant doit être capable :

- De vérifier par calcul, le non flambement d'une poutre sollicitée.

8-1 DEFINITION

Soit une pièce en forme de poutre rectiligne suffisamment long et sollicitée par un effort axial croissant tendant à la raccourcir, on observe successivement deux phases de déformations :

- pour une charge axiale F inférieure à une charge limite appelée Charge Critique et notée F_c , la poutre est comprimée, elle reste rectiligne et se raccourcit.
- Lorsque la charge axiale F atteint charge limites notée F_c (Charge critique), la poutre fléchit brusquement et se rompt très vite. On observe qu'une flexion se produit suivant la direction y (figure 8.2)

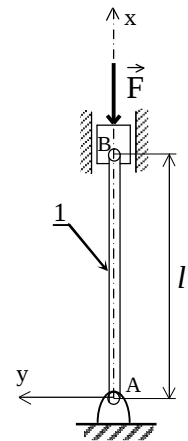


Figure.8.1

8-2 HYPOTHESES

- La poutre a une section constante et une ligne moyenne rigoureusement droite avant déformation
- Les liaisons de la poutre avec le milieu extérieur sont des liaisons parfaites. Sur le dispositif expérimental représenté à la figure 8.1, ces liaisons sont des pivots d'axe (A, z) et (B, z)
- Les actions de liaison en A et B se réduisent à deux efforts dont les résultantes sont directement opposées.
- Le poids de la poutre peut être négligé.

8-3 CHARGE CRITIQUE D'EULER : F_c .

Soit la modélisation ci-contre de la poutre (figure 8.2). Sous l'action de l'effort F , la ligne moyenne prend une très légère courbure.

Soit G le centre de surface d'une section droite d'abscisse x . Dans le repère $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les coordonnées de G sont : $G(x, y)$.

Dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les efforts internes en G sont:

$$\begin{cases} N = -F \\ M_{f_z} = -F \cdot y \end{cases}$$

On remarque que si F croît, alors y croît, M_{f_z} croît et provoque la rupture par flexion.

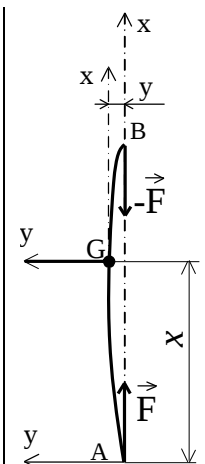


Figure 8.2

Une étude mathématique qui sort du cadre de ce cours permet de calculer la limite supérieure de F pour laquelle il y a rupture par la formule :

$$F_C = \frac{\pi^2 EI_{GZ}}{L^2}$$

avec

F_C : Charge critique d'Euler (N)

E : module de Young du matériau (MPa)

I_{GZ} : le plus petit moment quadratique de la section (mm^4)

L : longueur libre de flambement (mm)

8-4 LONGUEUR LIBRE DE FLAMBEMENT L

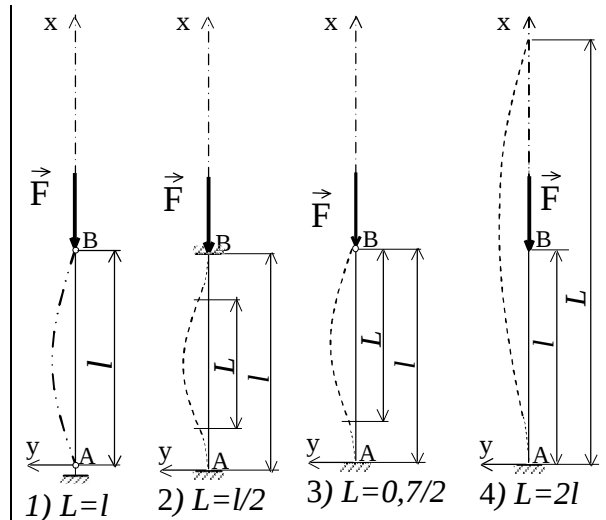
Les figures ci-dessous donnent les valeurs de L relative aux types de liaisons les plus souvent rencontrées.

1^{er} cas : La poutre est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$ et $(B, \vec{z})$ à chacune des extrémités : $L = l$.

2^{ème} cas : La poutre est parfaitement encastrée en ses deux extrémités : $L = l/2$.

3^{ème} cas : La poutre est parfaitement encastrée à son extrémité A et en liaison pivot d'axe $(B, \vec{z})$ à son extrémité B alors : $L = 0,7 l$.

4^{ème} cas : La poutre est parfaitement encastrée à son extrémité A et libre à son extrémité B alors : $L = 2l$.



8-5 DOMAINE D'UTILISATION DU FLAMBEMENT : ELANCEMENT

Lorsqu'une poutre est courte et trapue, elle est calculée en compression. Mais lorsqu'elle est longue et élancée, elle est calculée au flambement.

Remarque : Pour une même longueur et une section ayant le même aire, une poutre de section rectangulaire (règle plate) flambera plus vite qu'une poutre à section circulaire ou carrée. On définit donc pour une poutre l'élancement notée λ (lamda) l'expression suivante :

$$\lambda = \frac{L}{\rho}$$

L : longueur libre de flambement (mm)

ρ : rayon de giration de la section droite (mm)

λ : élancement (sans unité)

Avec $\rho = \sqrt{\frac{I_{GZ}}{S}}$ où I_{GZ} est le moment quadratique de la section de surface S .

8-6 ELANCEMENT CRITIQUE (λ_c)

L'élancement critique noté : λ_c est la valeur de l'élancement à partir duquel la poutre devra être calculée au flambement. λ_c dépend essentiellement de la nature du matériau.

$$\lambda_c^2 = \frac{\pi^2 E}{R_e}$$

E : module de Young du matériau (MPa)

R_e : limite élastique du matériau (MPa)

Valeurs de l'élancement critique de quelque matériau :

- 1- Acier E36 : $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa ; $R_e = 355$ MPa $\Rightarrow \lambda_C = 74,5$
- 2- Acier XC65 : $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa ; $R_e = 500$ MPa $\Rightarrow \lambda_C = 62,8$
- 3- Bois MOABI $E = 17000$ MPa ; $R_e = 111$ Mpa $\Rightarrow \lambda_C = 38,86$

Condition de calcul au FLAMBEMENT : $\lambda > \lambda_C$

8-7 CALCUL DE RESISTANCE AU FLAMBEMENT

En réalité ce n'est pas la « résistance au flambement » car le phénomène est irréversible et si une poutre commence à flamber, elle se rompt rapidement et obligatoirement.

Il sera donc question, en utilisant des coefficients de sécurité adéquats, de déterminer la charge axiale maximale que peut supporter une poutre pour que celle-ci ne courre aucun risque de flambement.

Considérons $\sigma_{PC} = \frac{R_e}{s}$ la contrainte pratique de compression (MPa) où R_e est la limite élastique du matériau et s le coefficient de sécurité.

Soit σ_{PC} , suivant la valeur de λ , on pourrait employer l'une des trois relations suivantes pour déterminer la charge axiale maxi :

1- **Poutre courte** ($\lambda \leq \lambda_C$) : Cas de compression simple alors $F = \sigma_{PC} \cdot S$

2- **Poutre moyenne** ($\lambda_C \leq \lambda \leq 1,5\lambda_C$) : La formule expérimentale de Rankine $F = \frac{\sigma_{PC} \cdot S}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_C}\right)^2}$

3- **Poutre élancée** ($\lambda > 1,5\lambda_C$) : on utilisera la formule d'Euler : $F = \frac{\sigma_{PC} \cdot S}{2 \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_C}\right)^2}$

8-8 EXERCICE D'APPLICATION

Soit une poutre en acier E30 de section rectangulaire ($b=50$ mm et $h=12$ mm) de limite d'élasticité $R_e = 295$ MPa ; de module de Young $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa et du coefficient de sécurité $s=2,95$.

Travail à faire : déterminer les charges critiques correspondant aux trois valeurs des différentes longueurs libres de flambement suivantes : $L_1 = 200$ mm ; $L_2 = 350$ mm et $L_3 = 1000$ mm.

- 1- Calculer l'élancement critique λ_C pour une poutre en acier E30.
- 2- Calculer le rayon de giration ρ de la section droite.
- 3- Calculer les élancements λ_1 , λ_2 , λ_3 correspondant aux longueurs libres L_1 , L_2 et L_3 .
Comparer ces élancements à λ_C et choisir un mode de calcul pour ces trois cas.
- 4- Calculer les forces axiales maximales à appliquer aux poutres de longueurs L_1 , L_2 et L_3 .
- 5- Pour chaque cas de calcul au flambement, calculer le coefficient de sécurité k aux charges

calculées à la question 4 sachant que $k = \frac{F_C}{F}$.

SOLUTION

1- Calcul de l'élancement critique : $\lambda_c^2 = \frac{\pi^2 E}{R_e}$ AN : $\lambda_c^2 = \frac{\pi^2 2,1 \cdot 10^5}{295} \Rightarrow \lambda_c = 81,2$

2- Calcul du rayon de giration : $\rho = \sqrt{\frac{I_{GZ}}{S}} \Leftrightarrow \rho = \sqrt{\frac{bh^3}{12S}}$ AN : $\rho = \sqrt{\frac{50 \cdot 12^3}{12 \times 600}} = 3,464 \text{ mm}$

3- Calcul des élancements. On a : $\lambda = \frac{L}{\rho}$

- Pour L_1 : $\lambda_1 = \frac{L_1}{\rho}$ AN : $\lambda_1 = \frac{200}{3,464} = 57,7$: $\lambda_1 < \lambda_c$; la poutre sera calculée en compression simple.

- Pour L_2 : $\lambda_2 = \frac{L_2}{\rho}$ AN : $\lambda_2 = \frac{350}{3,464} = 101$: $\lambda_c \leq \lambda_2 \leq 1,5 \lambda_c$; la poutre sera calculée au flambement en utilisant la formule de Rankine..

- Pour L_3 : $\lambda_3 = \frac{L_3}{\rho}$ AN : $\lambda_3 = \frac{1000}{3,464} = 288,7$: $\lambda_3 > 1,5 \lambda_c$; la poutre sera calculée au flambement en utilisant la formule d'Euler.

4- Calcul des forces axiales :

Pour L_1 (compression simple) : $F = \sigma_{PC} \cdot S$ AN : $F = 100 \cdot 600 = 60 \cdot 10^3 \text{ N}$.

Pour L_2 (Rankine) : $F = \frac{\sigma_{PC} \cdot S}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$ AN : $F = \frac{60 \cdot 10^3}{1 + \left(\frac{101}{81,8}\right)^2} = 23,77 \cdot 10^3 \text{ N}$

Pour L_3 (Euler) : $F = \frac{\sigma_{PC} \cdot S}{2 \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$ AN : $F = \frac{60 \cdot 10^3}{2 \cdot \left(\frac{288,7}{81,8}\right)^2} = 2,4 \cdot 10^3 \text{ N}$

5- Calcul du coefficient de sécurité pour les deux cas de calcul au flambement :

- Pour L_2 $k_2 = \frac{F_{C2}}{F_2}$ or $F_{C2} = \frac{\pi^2 EI_{GZ}}{L_2^2} \Rightarrow k_2 = \frac{\pi^2 EI_{GZ}}{F_2 \cdot L_2^2}$ AN : $k_2 = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^5 \cdot 7200}{23,77 \cdot 10^3 \times 350^2} = 4,88$

- Pour L_3 $k_3 = \frac{F_{C3}}{F_3}$ or $F_{C3} = \frac{\pi^2 EI_{GZ}}{L_3^2} \Rightarrow k_3 = \frac{\pi^2 EI_{GZ}}{F_3 \cdot L_3^2}$ AN : $k_3 = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^5 \cdot 7200}{2,4 \cdot 10^3 \times 10^6} = 5,9$

Note : On constate que ces coefficients sont très importants mais il vaut mieux sachant le risque que court une construction en cas de flambement.

8-9 EXERCICE DE CONSOLIDATION:

Une colonne tubulaire en fonte de longueur $l = 3,5 \text{ m}$ supporte (partiellement) une poutrelle horizontale en profilé sur laquelle est posé un plancher. On considère que cette colonne est parfaitement encastree à ses deux extrémités.

Sa section droite est telle que $D = 80 \text{ mm}$ et $d = 60 \text{ mm}$.

On donne les caractéristiques mécaniques de la fonte utilisée : la limite d'élasticité $R_e = 273 \text{ MPa}$; module de Young $E = 10^5 \text{ MPa}$ et le coefficient de sécurité $s = 1,95$.

- 1- Quelle est la longueur libre de flambement L ?
- 2- Calculer la charge critique d'Euler F_C .
- 3- Calculer l'élancement critique λ_C de la fonte utilisée.
- 4- Calculer le rayon de giration ρ de la section droite et l'élancement λ de la colonne.
- 5- Quelle formule utilisera-t-on pour calculer la charge maximale F à appliquer à la colonne ? Calculer F .
- 6- En déduire le coefficient de sécurité k pour les charges.

Rép : 1- $L = 1750 \text{ mm}$; 2- $F_C = 443.10^3 \text{ N}$; 3- $\lambda_C = 60$; 4- $\rho = 25 \text{ mm}$ et $\lambda = 70$;
5- Rankine et $F_C = 130.10^3$; 6- $k = 3,4$.

CE QU'IL FAUT RETENIR (CQFR)

- La condition de non flambement d'une poutre dépend : du matériau de la poutre, de la longueur libre de flambement, des proportions de la section par rapport à la longueur (ie à l'élancement noté λ).
- L'élancement critique λ_C ne dépendant que du matériau : $\lambda_C^2 = \frac{\pi^2 E}{R_e}$
- L'élancement λ de la poutre : $\lambda = \frac{L}{\rho}$ avec le rayon de giration $\rho = \sqrt{\frac{I_{GZ}}{S}}$ où I_{GZ} est le moment quadratique de la section de surface S et L = longueur libre de flambement et l = longueur de la poutre.
 - La poutre est en liaison pivot à ses deux extrémités alors $L = l$.
 - La poutre est parfaitement encastree en ses deux extrémités alors : $L = l/2$.
 - La poutre est parfaitement encastree à une extrémité et en liaison pivot à l'autre extrémité alors : $L = 0,7 l$.
 - La poutre est parfaitement encastree à une extrémité et libre à l'autre alors : $L = 2l$.
- Pour calculer une force axiale F que peut supporter la poutre,
 - Si $\lambda < \lambda_C$, pas de flambement alors $F = \sigma_{PC} \cdot S$.
 - Si $\lambda > \lambda_C$ soit environ $\lambda_C < \lambda < 1,5 \lambda_C$ (élancement moyen) alors : $F = \frac{\sigma_{PC} \cdot S}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_C}\right)^2}$
 - Si $\lambda > 1,5 \lambda_C$ (élancement important) alors : $F = \frac{\sigma_{PC} \cdot S}{2 \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_C}\right)^2}$
- Noter que les forces F ainsi calculées dans le cas de flambement (Rankine et Euler) ont été exprimée en tenant compte d'un certain coefficient de sécurité k sur les charges : $k = \frac{F_C}{F}$ avec $F_C = \frac{\pi^2 EI_{GZ}}{L^2}$ (Charge critique d'Euler)
- Noter aussi que le calcul au flambement est fait pour vérifier qu'il n'y a pas de risque de flambement.

III^{ème} PARTIE : RESOLUTION DES PROBLEMES DES SYSTEMES HYPERSTATIQUES

RAPPEL

LEÇON 9 : METHODE DE LA DEFORMEE ET DES SUPERPOSITIONS

LEÇON 10 : POUTRES CONTINUES

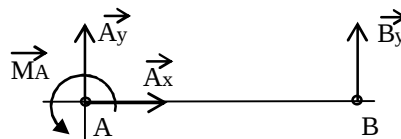
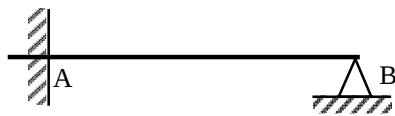
LEÇON 11 : METHODES ENERGETIQUES

LEÇON 12 : LIGNE D'INFLUENCE – CHARGES MOBILES

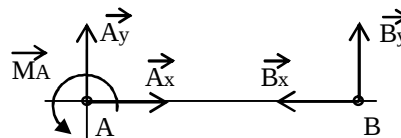
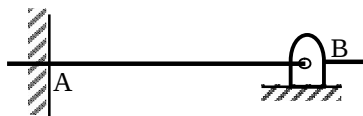
RAPPEL

L'application du principe fondamental de la statique (PFS) à un système (S) en équilibre dans le plan conduit généralement à un système de trois (03) équations. Si le degré de liaisons (DL) est supérieur au nombre d'équation (E), on dit alors que le système est hyperstatique d'ordre q ($q = DL - E$).

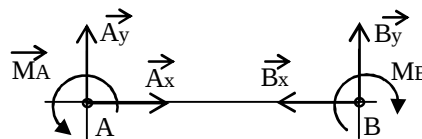
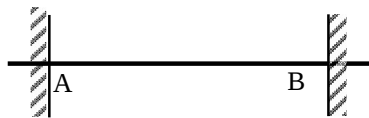
Exemple de Systèmes Hyperstatiques



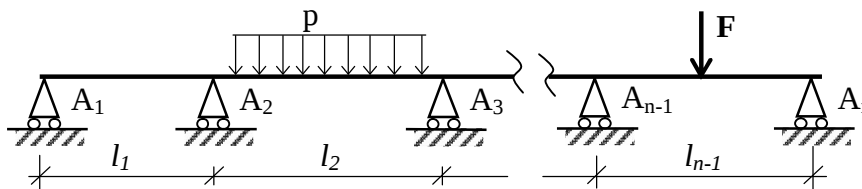
Système hyperstatique
d'ordre $q = 4 - 3 = 1$



Système hyperstatique
d'ordre $q = 5 - 3 = 2$



Système hyperstatique
d'ordre $q = 6 - 3 = 3$



On a ici n appuis et deux équations de la statique par conséquent le système est hyperstatique de degré $q = n - 2$.

Pour résoudre un tel système d'équations, il faut avoir d'autres équations supplémentaires.

LEÇON 9 : METHODE DE LA DEFORMEE ET DES SUPERPOSITIONS

LEÇON 10 : POUTRES CONTINUES

LEÇON 11 : METHODES ENERGETIQUES

LEÇON 12 : LIGNE D'INFLUENCE – CHARGES MOBILES

LEÇON 9 : METHODE DE LA DEFORMEE ET DES SUPERPOSITIONS

9.1 PRINCIPE GENERAL DE RESOLUTION

Il s'agira ici de trouver des équations supplémentaires en faisant intervenir des relations entre des inconnues hyperstatiques et les déformations qu'elles provoquent.

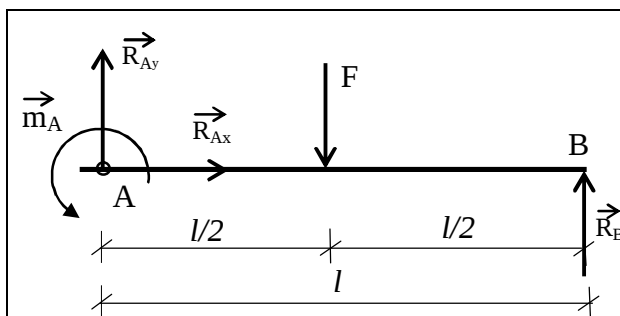
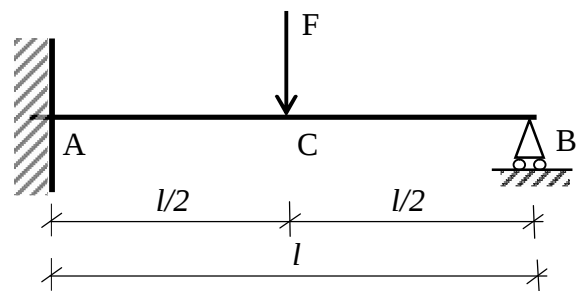
On note ici deux possibilités :

- 1- Utiliser l'équation différentielle de la déformée que l'on intégrera. On l'appelle méthode par intégration.
- 2- Utiliser le principe de superposition des forces. C'est la méthode de superposition.

EXEMPLE D'APPLICATION

Soit la poutre définie telle que l'indique la figure ci-contre.

- 1- Déterminer les réactions en A et en B.
- 2- Donner les expressions de T_y et M_{f_z} .
- 3- Tracez les diagrammes de T_y et M_{f_z} .



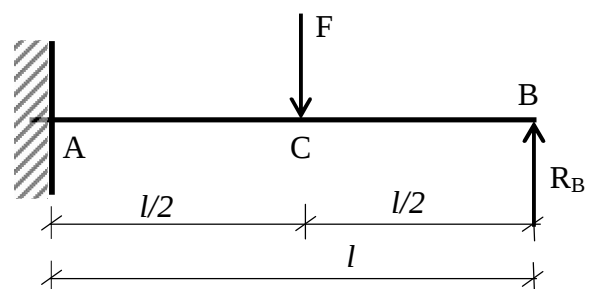
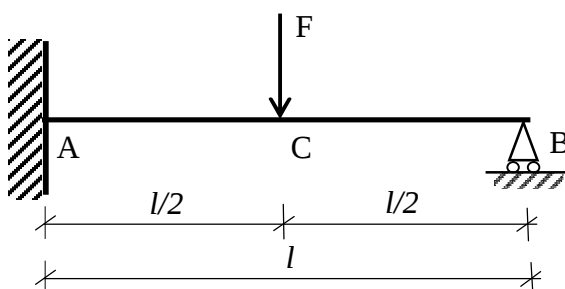
Application du PFS :

On obtient le système d'équation suivante :

$$\begin{cases} R_{Ax} + R_{Bx} = 0 \\ R_{Ay} - P + R_{By} = 0 \\ m_A - P \cdot L/2 + R_{By} \cdot L = 0 \end{cases}$$

Système de trois équations à quatre inconnues
 $\Rightarrow$ système hyperstatique d'ordre $n = 1$.

9.2 METHODE PAR INTEGRATION

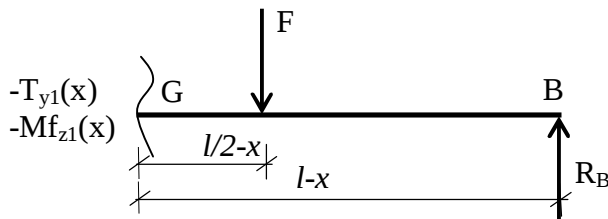


RESOLUTION

1- Déterminons les réactions en A et B

a- Déterminons les efforts de cohésions entre [A,C] et [CB]

Pour $0 \leq x < a$



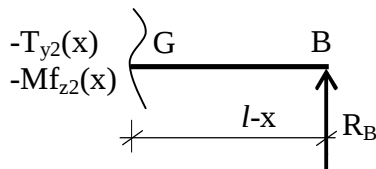
$$-T_{y1}(x) - F + R_B = 0$$

$$-M_{fz1}(x) - (l/2 - x)F + (l - x)R_B = 0$$

$$T_{y1}(x) = -F + R_B$$

$$M_{fz1}(x) = -(R_B - F)x + (R_B - F/2)l = 0$$

Pour $a \leq x < l$



$$T_{y2}(x) = +R_B$$

$$M_{fz2}(x) = +(l - x)R_B$$

b- Expression de l'équation différentielle de la déformée suivant les tronçons.

- Entre [A,C] : $E.I.y_1''(x) = M_{fz1}(x) = (F/2 - R_B)l - (R_B - F).x$

Une 1^{ère} intégration entraîne : $E.I.y_1'(x) = (F/2 - R_B)l x - (R_B - F). \frac{x^2}{2} + C_1$.

Une 2^{ème} intégration entraîne : $E.I.y_1(x) = (F/2 - R_B)l \frac{x^2}{2} - (R_B - F). \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$.

Les conditions aux limites :

Encastrement en $x = 0 \Rightarrow y_1(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ et $y_1'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$\Rightarrow y_1(x) = \frac{1}{EI} \left[(F/2 - R_B)l \frac{x^2}{2} - (R_B - F) \frac{x^3}{6} \right]$$

- Entre [C,B] : $E.I.y_2''(x) = M_{fz2}(x) = (l - x)R_B$.

Une 1^{ère} intégration entraîne : $E.I.y_2'(x) = (l.x - \frac{x^2}{2}) R_B + C_3$.

Une 2^{ème} intégration entraîne : $E.I.y_2(x) = (l. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}) R_B + C_3.x + C_4$.

A cause de la continuité en chaque point de la poutre $\Rightarrow$ compatibilité de déplacement.

$\Rightarrow y_1(l/2) = y_2(l/2)$ et $y_1'(l/2) = y_2'(l/2)$

$$y_1'(l/2) = y_2'(l/2) \Leftrightarrow \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{l}{2}F - lR_B \right) \frac{l}{2} - (R_B - F) \frac{l^2}{8} \right] = \frac{1}{EI} \left[\left(l \frac{l}{2} - \frac{l^2}{8} \right) R_B + C_3 \right]$$

$$y_1(l/2) = y_2(l/2) \Leftrightarrow \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{l}{2} F - l R_B \right) \frac{l^2}{8} - (R_B - F) \frac{l^3}{6 \times 8} \right] = \frac{1}{EI} \left[\left(l \frac{l^2}{8} - \frac{l^3}{6 \times 8} \right) R_B + C_3 x + C_4 \right]$$

$$\Rightarrow C_3 = \frac{l^2 \cdot F}{8} \quad \text{et} \quad C_4 = -\frac{l^3 \cdot F}{48}$$

$$\Rightarrow y_2(x) = \frac{1}{EI} \left[- \left(l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) R_B + \frac{l^2 \cdot F}{8} x - \frac{l^3 \cdot F}{48} \right]$$

c- En déduire la réaction en B.

$$\text{Or on sait que } y_2(l) = 0 \Rightarrow \frac{1}{EI} \left[- \left(l \frac{l^2}{2} - \frac{l^3}{6} \right) R_B + \frac{l^2 \cdot F}{8} l - \frac{l^3 \cdot F}{48} \right] = 0$$

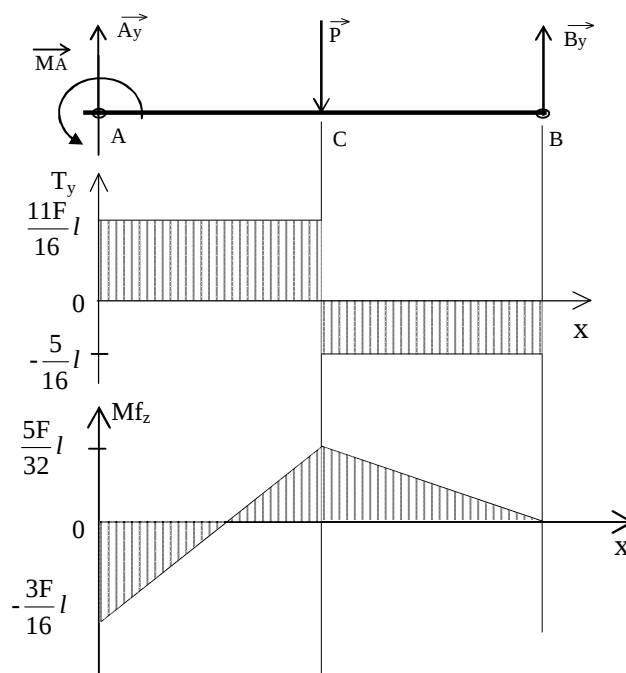
$$\Rightarrow R_B = \frac{5F}{16}$$

$$\Rightarrow R_A = F - R_B = \frac{11F}{16}$$

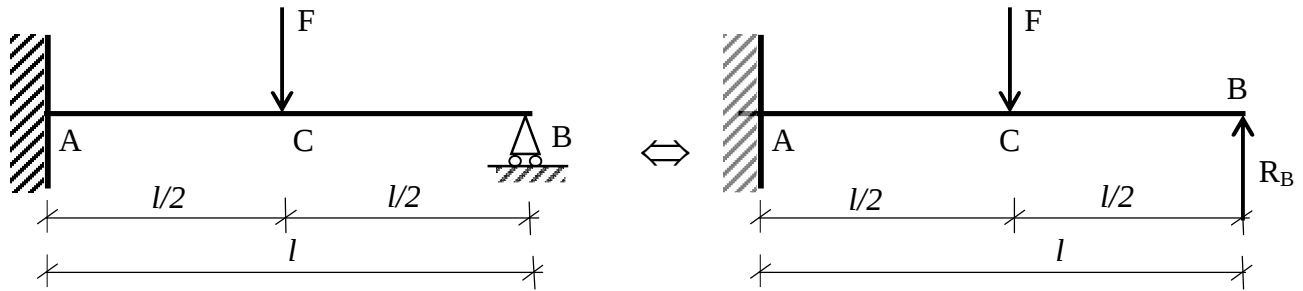
2- Expression de T_y et M_{fz}

	0	$l/2$	l
T_y	$R_{Ay} = \frac{11F}{16}$		$-\frac{5F}{16}$
$M_{fz}(x)$	$M_{fz1}(x) = -(R_B - F)x + (R_B - F/2)l = 0$ $= \frac{11 \cdot F}{16} x - \frac{3 \cdot F}{16} \cdot l$		$M_{fz2}(x) = (l-x) R_B$ $= \frac{5 \cdot F}{16} (l-x)$
	$-\frac{3 \cdot F}{16} \cdot l$	$\frac{5F}{16} \cdot l$	0

3- Diagramme de T et M et calcul de la flèche en C

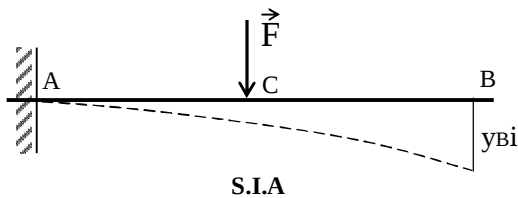


9.3 METHODE DU PRINCIPE DE SUPERPOSITION

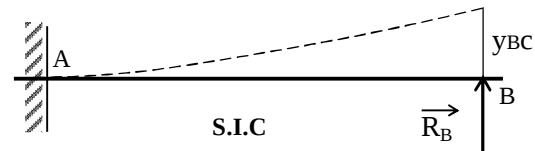


Ce système peut être décomposé en deux : un système isostatique associé (SIA) et un système isostatique complémentaire (SIC).

Sans l'appui en B, on aurait à l'extrémité une flèche y_{Bi} (figure ci-contre)



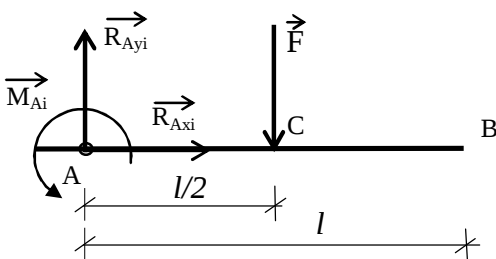
Sans la force F, on aurait aussi un système isostatique qui ramènerait la poutre en B. (car la poutre n'est pas sensée se déplacer en B)



Remarque : La superposition des systèmes (S_1) et (S_2) équivaut à notre système dans sa position donnée. On a $y_B = y_{Bi} + y_{Bc} = 0$ car la poutre ne quitte pas le point B.

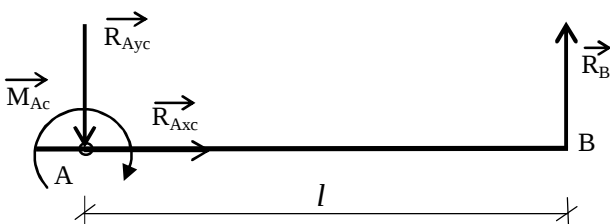
Ainsi la connaissance de y_{Bi} et y_{Bc} permet de déterminer R_B et les autres inconnus.

a- Détermination de y_{Bi}



$$\begin{cases} R_{Axi} = 0 \\ R_{Ayi} = F \\ M_{Ai} = \frac{l}{2} \cdot F \end{cases} \quad \text{et} \quad y_{Bi} = \frac{5F.l^3}{48.E.I}$$

b- Détermination de y_{Bc}



$$\begin{cases} R_{Axc} = 0 \\ R_{Ayc} = -R_B \\ M_{Ac} = R_B \cdot l \end{cases} \quad \text{et} \quad y_{Bc} = -\frac{R_B \cdot l^3}{3.E.I}$$

c- La poutre ne quittant pas le point B, on a : $y_{Bi} = y_{Bc}$

$$\frac{5F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} = \frac{R_B \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} \Rightarrow R_B = \frac{l^2 F}{8l^3} \left(3l - \frac{l}{2}\right) = \frac{5F}{16}$$

d- En superposant en A on a :

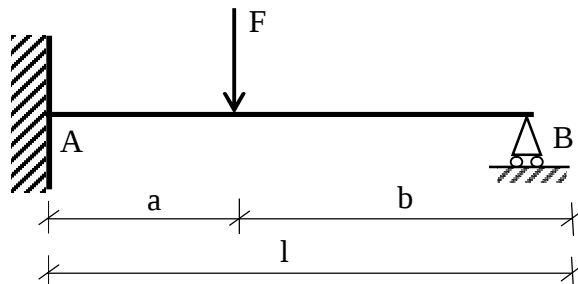
$$R_{Ay} = R_{Ayi} + R_{Ayc} = F - R_B = \frac{11F}{16}$$

$$M_A = M_{Ai} + M_{Ac} = \frac{l}{2} F - l R_B = \frac{3F}{16} l$$

EXERCICES DE CONSOLIDATION

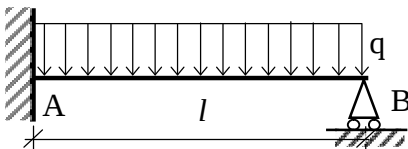
Par la méthode du principe de superposition, déterminer les réaction aux appuis des poutres hyperstatiques ci-dessous.

a)

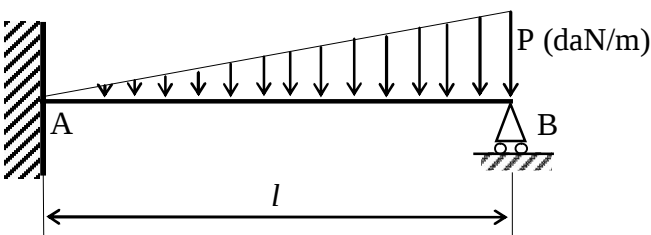


$$R_B = \frac{a^2 \cdot F}{2l^3} (3l - a) ; R_A = \frac{F}{2l^3} (a^3 - 3a^2 l - 2l^3)$$

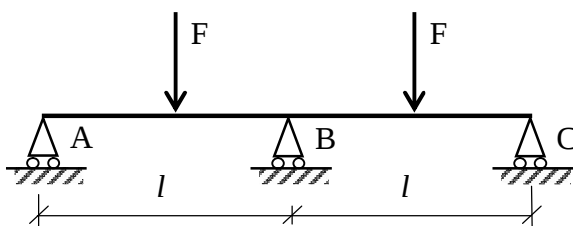
b)



c)



d)



LEÇON 10 : POUTRES CONTINUES

Objectif spécifique : Au terme de cette leçon, l'étudiant doit être capable :

- De déterminer les réactions aux appuis des poutres continues par la méthode des trois moments (théorème de Clapeyron).

10-1 DEFINITIONS

- Une poutre continue est une poutre droite horizontale reposant sur plus de deux appuis simples incompressibles. A ses extrémités, elle peut être simplement appuyée, articulée, encastrée ou prolongée en console.

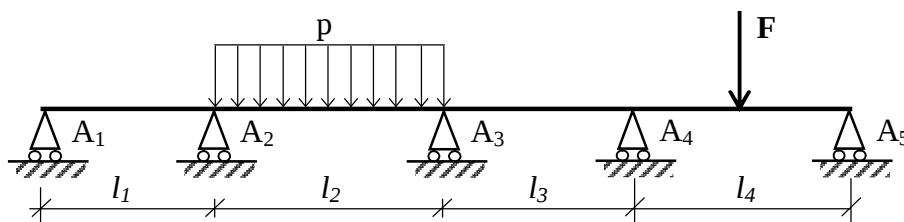


Fig. 7.1 : Poutre continue à quatre travées

- Une travée est une portion de la poutre comprise entre deux appuis.

10-2 NOTATIONS

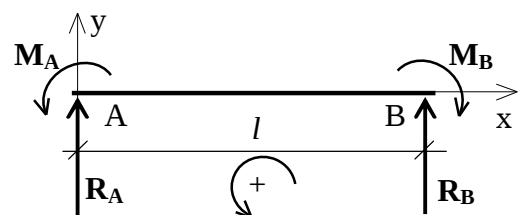
- Les appuis simples sur lesquels repose la poutre sont notés : A_i , $i = 1, \dots, n$.
- n : nombre d'appuis
- l_i : longueur de la travée (A_i, A_{i+1})
- Il y a donc n appuis et deux équation de la statique par conséquent le système est hyperstatique de degré $q = n-2$.

10-3 DETERMINATION DES ROTATIONS D'UNE TRAVÉE ISOSTATIQUE

Cette détermination des rotations aux extrémités d'une travée nous servira dans la suite de ce cours.

Exercice : Considérons la poutre ci-contre.

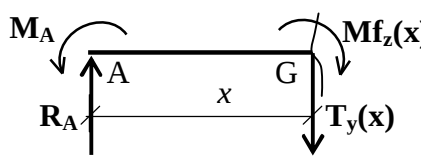
- 1- Déterminer les réactions en A et en B en fonction de M_A et M_B .
- 2- Donner l'expression de l'effort tranchant et du moment de flexion.
- 3- Déterminer l'angle de rotation ϕ_A et ϕ_B respectivement en A et en B.



1- Réaction aux appuis

$$\begin{cases} \sum M / A = 0 \\ \sum M / B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_A + R_B l - M_B = 0 \\ -M_B - R_A l + M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_B = \frac{-M_A + M_B}{l} \\ R_A = \frac{M_A - M_B}{l} \end{cases}$$

2- Détermination des éléments de réduction



$$\begin{cases} T_y(x) + R_A = 0 \\ Mf_z(x) + M_A - x.R_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(x) = -\frac{M_A - M_B}{l} \\ Mf_z(x) = -M_A + \frac{x}{l}(M_A - M_B) \end{cases}$$

3- Détermination de l'angle de rotation.

$$E.I.y''(x) = -M_A + \frac{x}{l}(M_A - M_B) \Rightarrow E.I.y'(x) = -M_A x + \frac{x^2}{2l}(M_A - M_B) + C_1$$

$$E.I.y(x) = -M_A \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6l}(M_A - M_B) + C_1 x + C_2$$

Les conditions aux limites :

Poutre en appui sur A en $x = 0 \Rightarrow y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

Poutre en appui sur B en $x = l \Rightarrow y(l) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{l}{6}(2M_A + M_B)$

$$\varphi_A = y'(0) = \frac{1}{6EI}(2M_A + M_B) ;$$

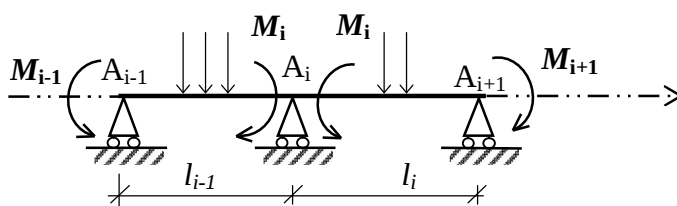
$$\varphi_B = y'(l) = -\frac{1}{6EI}(M_A + 2M_B)$$

10-4 THEROREME DE TROIS MOMENTS

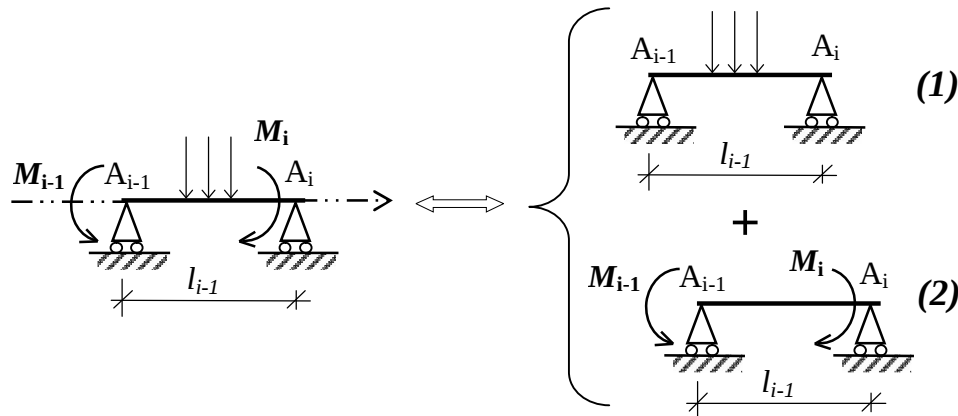
Il s'agit ici de déterminer les moments fléchissants à droites des appuis simples. Et la connaissance de ces moments permettra de déduire l'effort tranchant et le moment fléchissant en toute section droite de la poutre.

Cette détermination des moments fléchissants se fera par le théorème des trois moments encore appelé théorème de Clapeyron.

Reprenons le problème général d'une poutre continue reposant sur n appuis et considérons deux travées successives de cette poutre de part et d'autre de l'appui A_i .



Isolons la travée (A_{i-1} , A_i)



- Notons les pentes (rotations) de la déformée dans le système associé (1) aux points A_{i-1} et A_i comme ci-contre :

$$\begin{cases} (y'_{i-1})_1 = \lambda_{i-1} \\ (y'_i)_1 = \lambda_i \end{cases}$$

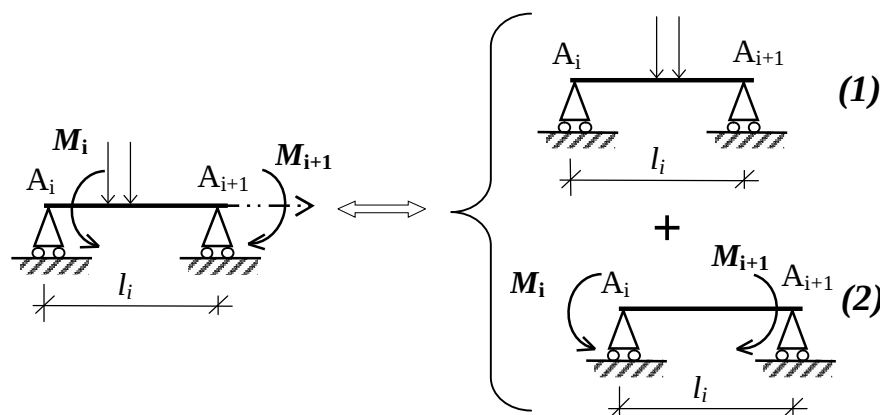
- Dans le système complémentaire (2), en faisant recours à l'exercice préliminaire ; les pentes sont :

$$\begin{cases} (y'_{i-1})_2 = \frac{l_{i-1}}{6EI} (2M_{i-1} + M_i) \\ (y'_i)_2 = -\frac{l_{i-1}}{6EI} (M_{i-1} + 2M_i) \end{cases}$$

- Les sommes des pentes aux points A_{i-1} et A_i des deux systèmes sont alors :

$$\begin{cases} \varphi_{A_{i-1}} = \lambda_{i-1} + \frac{l_{i-1}}{6EI} (2M_{i-1} + M_i) \\ \varphi_{A_i} = \lambda_i - \frac{l_{i-1}}{6EI} (M_{i-1} + 2M_i) \end{cases}$$

Isolons la travée (A_i , A_{i+1})



- Notons les pentes (rotations) de la déformée dans le système associé (1) aux points A_i et A_{i+1} comme ci-contre :

$$\begin{cases} (y'_i)_1 = \mu_{i-1} \\ (y'_{i+1})_1 = \mu_{i+1} \end{cases}$$

- Dans le système complémentaire (2), en faisant recours à l'exercice préliminaire ; les pentes sont :

$$\begin{cases} (y'_i)_2 = \frac{l_i}{6EI} (2M_i + M_{i+1}) \\ (y'_{i+1})_2 = -\frac{l_i}{6EI} (M_i + 2M_{i+1}) \end{cases}$$

- Les sommes des pentes aux points A_i et A_{i+1} des deux systèmes sont alors :

$$\begin{cases} \varphi'_{A_i} = \mu_i + \frac{l_i}{6EI} (2M_i + M_{i+1}) \\ \varphi'_{A_{i+1}} = \mu_{i+1} - \frac{l_i}{6EI} (M_i + 2M_{i+1}) \end{cases}$$

Du fait de la continuité et de la ligne élastique au droit de l'appui A_i , les pentes sont identiques : $\varphi_{A_i} = \varphi'_{A_i}$.

$$\Leftrightarrow \lambda_i - \frac{l_{i-1}}{6EI} (M_{i-1} + 2M_i) = \mu_i + \frac{l_i}{6EI} (2M_i + M_{i+1})$$

$$\Rightarrow \frac{l_{i-1}}{6EI} (M_{i-1} + 2M_i) + \frac{l_i}{6EI} (2M_i + M_{i+1}) = \lambda_i - \mu_i$$

$$\Rightarrow \frac{l_{i-1}}{6EI} M_{i-1} + \frac{2(l_{i-1} + l_i)}{6EI} M_i + \frac{l_i}{6EI} M_{i+1} = \lambda_i - \mu_i$$

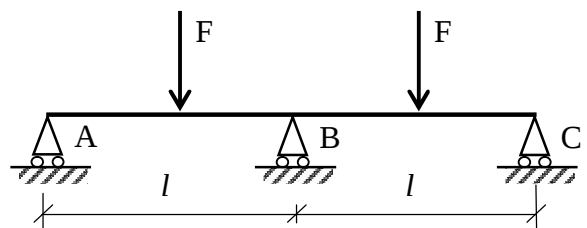
10-5 EXEMPLE D'APPLICATION

EXEMPLE D'APPLICATION N° 1

En utilisant le théorème de trois moments :

$$\frac{l_{i-1}}{6EI} M_{i-1} + \frac{2(l_{i-1} + l_i)}{6EI} M_i + \frac{l_i}{6EI} M_{i+1} = \lambda_i - \mu_i,$$

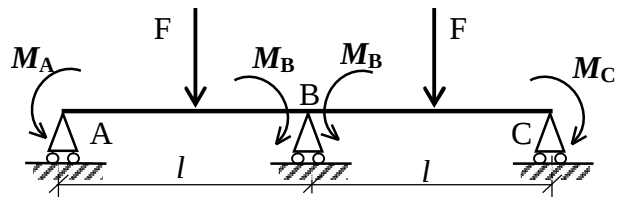
déterminer les réactions en A, B et C de la poutre ci-contre.



SOLUTION

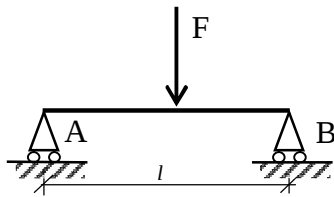
D'après le théorème de trois moments on

$$a : \frac{l}{6EI} M_A + \frac{2(l+l)}{6EI} M_B + \frac{l}{6EI} M_C = \lambda_B - \mu_B$$

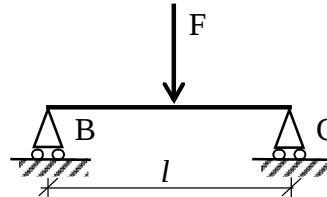


$$\text{Or } M_A = M_C = 0 \text{ car pas d'encastrement} \Rightarrow \frac{4l}{6EI} M_B = \lambda_B - \mu_B \quad (1)$$

En considérant les systèmes ci-dessous on déduit les pentes μ_B et λ_B .



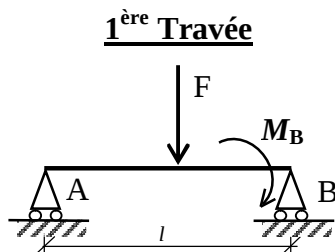
$$\lambda_B = \frac{Fl^2}{16EI}$$



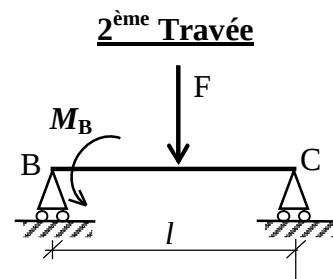
$$\mu_B = -\frac{Fl^2}{16EI}$$

L'équation (1) donne donc : $\frac{2l}{3EI} M_B = \frac{Fl^2}{8EI} \Rightarrow M_B = \frac{3Fl}{16}$

Connaissant ainsi M_B , on peut déterminer R_A , R_C et R_B .



$$\begin{cases} R_A - F + R_{B1} = 0 \Rightarrow R_{B1} = F - R_A \\ -R_A l + F \frac{l}{2} - M_B = 0 \Rightarrow R_A = \frac{5F}{16} \end{cases}$$



$$\begin{cases} R_{B2} - F + R_C = 0 \Rightarrow R_{B2} = F - R_C \\ R_C l - F \frac{l}{2} + M_B = 0 \Rightarrow R_C = \frac{5F}{16} \end{cases}$$

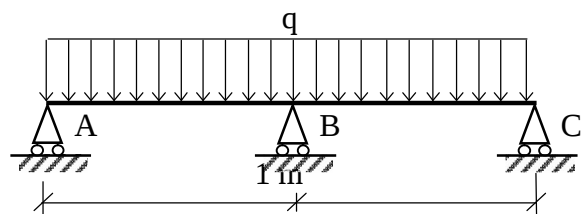
On déduit $R_B = R_{B1} + R_{B2} = F - R_A + F - R_C = 2F - R_A - R_C \Rightarrow R_B = \frac{11F}{8}$

EXEMPLE D'APPLICATION N° 2

En utilisant le théorème des trois moments :

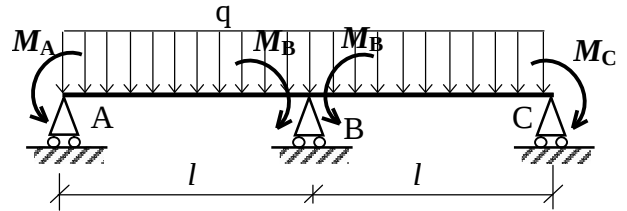
$$\frac{l_{i-1}}{6EI} M_{i-1} + \frac{2(l_{i-1} + l_i)}{6EI} M_i + \frac{l_i}{6EI} M_{i+1} = \lambda_i - \mu_i,$$

déterminer les réactions en A, B et C de la poutre ci-contre.



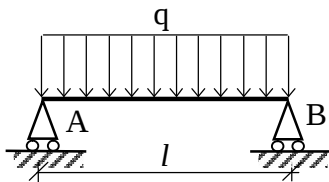
SOLUTION

D'après le théorème de trois moments on a :

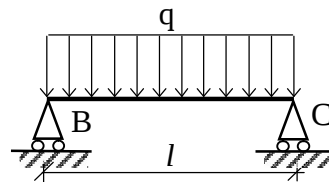
$$\frac{l}{6EI} M_A + \frac{2(l+l)}{6EI} M_B + \frac{l}{6EI} M_C = \lambda_B - \mu_B$$


Or $M_A = M_C = 0$ car pas d'encastrement $\Rightarrow \frac{4l}{6EI} M_B = \lambda_B - \mu_B$.(1)

En considérant les systèmes ci-dessous on a déduit les pentes μ_B et λ_B .



$$\lambda_B = \frac{ql^3}{24EI}$$

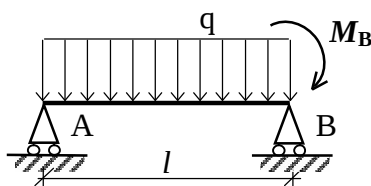


$$\mu_B = -\frac{ql^3}{24EI}$$

L'équation (1) donne donc : $\frac{2l}{3EI} M_B = \frac{ql^3}{12EI} \Rightarrow M_B = \frac{ql^2}{8}$

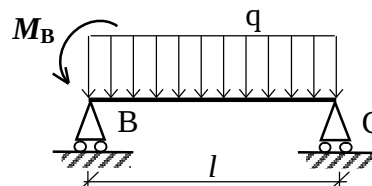
Connaissant ainsi M_B , on peut déterminer R_A et R_C .

1^{ère} Travée



$$\begin{cases} R_A + R_{B1} - ql = 0 \Rightarrow R_{B1} = \frac{5ql}{8} \\ -R_A l + q \frac{l^2}{2} - M_B = 0 \Rightarrow R_A = \frac{3ql}{8} \end{cases}$$

2^{ème} Travée



$$\begin{cases} R_{B2} + R_C - ql = 0 \Rightarrow R_{B2} = \frac{5ql}{8} \\ M_B - q \frac{l^2}{2} + l R_C = 0 \Rightarrow R_C = \frac{3ql}{8} \end{cases}$$

On déduit : $R_B = R_{B1} + R_{B2} \Rightarrow R_B = \frac{5ql}{4}$

10-6 CAS DES TRAVEES ET APPUIS DE RIVE

10-6-1 CAS DES CONSOLES

Dans le cas des consoles comme l'indique la figure ci-contre, on calcule le moment fléchissant résultant à l'appui de rive et en le substituant dans l'expression du théorème des trois moments appliqué à la travée de rive et à la suivante.

$$M_{A1} = -\frac{ql_1^2}{2}$$

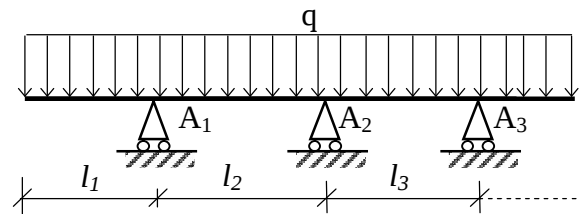


Fig.10.2 : Console

10-6-2 CAS D'ENCASTREMENT

Dans le cas des poutres continues encastrées comme l'indique par exemple la figure 10. ci-contre, Au point A₀ on ajoute une travée fictive A₀A* de longueur l* non chargée. On applique alors à cette structure modifiée de la figure 10.3 le théorème des trois moments et faire tendre l* vers zéro après résolution.

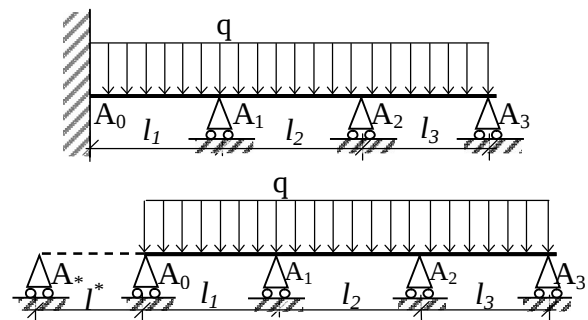


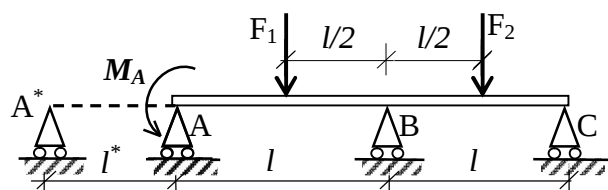
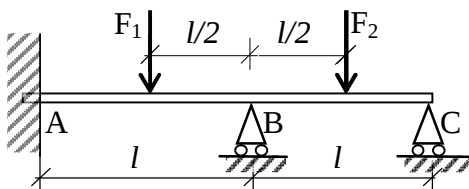
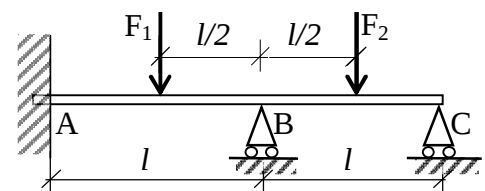
Fig.10.3

Exemple d'application :

En utilisant le théorème de trois moments :

$$\frac{l_{i-1}}{6EI} M_{i-1} + \frac{2(l_{i-1} + l_i)}{6EI} M_i + \frac{l_i}{6EI} M_{i+1} = \lambda_i - \mu_i,$$

Déterminer les valeurs de R_A, M_A, R_B, et R_C



SOLUTION

D'après le PFS on a :

$$\begin{cases} R_A + R_B + R_C = F_1 + F_2 \dots\dots\dots (1) \\ M_A + 2R_C l + R_B l - F_2 \frac{3l}{2} - F_1 \frac{l}{2} = 0 \dots (2) \end{cases} \quad (02 \text{ équations et } 04 \text{ inconnus})$$

- Considérons les travées A* A et AB (figure ci-contre).

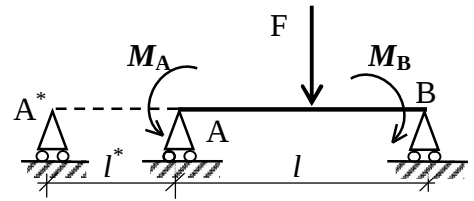
D'après le théorème des trois moments on a :

$$\frac{l^*}{6EI} M_{A^*} + \frac{2(l^* + l)}{6EI} M_A + \frac{l}{6EI} M_B = \lambda_A - \mu_A$$

Or $M_{A^*} = 0$, $\lambda_A = 0$ et $l^* = 0$ (car données fictives)

$$\mu_A = -\frac{Fl^2}{16EI}$$

$$\Rightarrow \frac{2l}{6EI} M_A + \frac{l}{6EI} M_B = \frac{Fl^2}{16EI} \Rightarrow 2M_A + M_B = \frac{3Fl}{8} \quad (3)$$

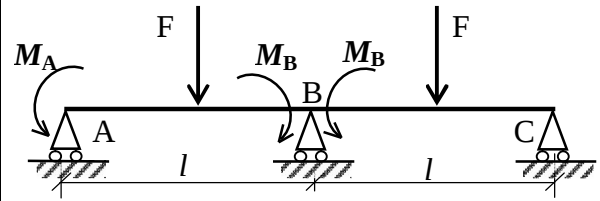


- Considérons les travées AB et BC ci-contre.

Le théorème des trois moments donne :

$$\frac{l}{6EI} M_A + \frac{4l}{6EI} M_B = \frac{Fl^2}{16EI} + \frac{Fl^2}{16EI}$$

$$\Rightarrow M_A + 4M_B = \frac{3Fl}{4} \quad (4)$$



Les équations (3) et (4) $\Rightarrow \begin{cases} 2M_A + M_B = \frac{3Fl}{8} \\ M_A + 4M_B = \frac{3Fl}{4} \end{cases} \Rightarrow M_A = \frac{3Fl}{28} \text{ et } M_B = \frac{9Fl}{56}$

Le torseur à gauche de B donne : $M_A - R_A l + F \frac{l}{2} - M_B = 0 \Rightarrow R_A = \frac{M_A - M_B}{l} + \frac{F}{2} \Rightarrow R_A = \frac{25F}{56}$

Le torseur à droite de B donne : $M_B - F \frac{l}{2} + R_C l = 0 \Rightarrow R_C = \frac{F}{2} - \frac{M_B}{l} \Rightarrow R_C = \frac{19F}{56}$

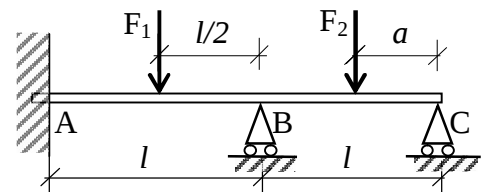
Alors (1) $\Rightarrow R_B = -R_A - R_C + 2F \Rightarrow R_B = \frac{68F}{56}$

Exemple d'application :

En utilisant le théorème de trois moments :

$$\frac{l_{i-1}}{6EI} M_{i-1} + \frac{2(l_{i-1} + l_i)}{6EI} M_i + \frac{l_i}{6EI} M_{i+1} = \lambda_i - \mu_i,$$

Déterminer les valeurs de R_A , M_A , R_B , et R_C

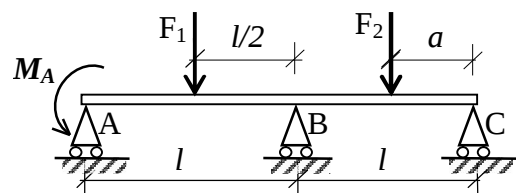


SOLUTION

D'après le PFS on a :

$$\begin{cases} R_A + R_B + R_C = F_1 + F_2 \dots\dots\dots(1) \\ M_A - 2R_A l - R_B l + F_1 \frac{3l}{2} + F_2 a = 0 \dots\dots(2) \end{cases}$$

(02 équations 04 inconnus)

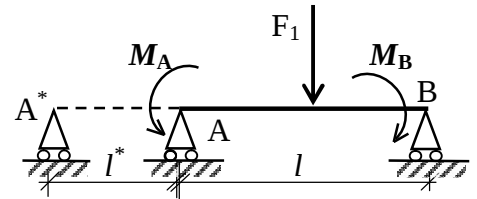


- Considérant les travées A* A et AB.

D'après le théorème de trois moments on a :

$$\frac{l}{6EI} M_{A^*} + \frac{2(l^* + l)}{6EI} M_A + \frac{l}{6EI} M_B = \lambda_A - \mu_A$$

$$\frac{2l}{6EI} M_A + \frac{l}{6EI} M_B = \lambda_A - \mu_A$$



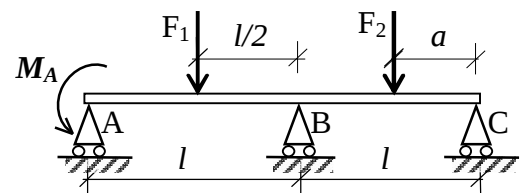
$$\lambda_A = 0 \text{ et } \mu_A = -\frac{F_1 l^2}{16EI} \Leftrightarrow \frac{2l}{6EI} M_A + \frac{l}{6EI} M_B = \frac{F_1 l^2}{16EI} \Rightarrow 2M_A + M_B = \frac{3F_1 l}{8} \quad (3)$$

- Considérons les travées AB et BC ci-contre.

D'après le théorème de trois moments on a :

$$\frac{l}{6EI} M_A + \frac{4l}{6EI} M_B = \lambda_B - \mu_B$$

$$\text{Or } \lambda_B = \frac{F_1 l^2}{16EI} \text{ et } \mu_B = -\frac{F_2 a(l^2 - a^2)}{6EI}$$



$$\frac{l}{6EI} M_A + \frac{4l}{6EI} M_B = \frac{F_1 l^2}{16EI} + \frac{F_2 a(l^2 - a^2)}{6EI} \Rightarrow M_A + 4M_B = \frac{3F_1 l}{8} + \frac{F_2 a(l^2 - a^2)}{l^2} \quad (4)$$

$$(3) \text{ et } (4) \Rightarrow \begin{cases} 2M_A + M_B = \frac{3F_1 l}{8} \\ M_A + 4M_B = \frac{3F_1 l}{8} + \frac{F_2 a(l^2 - a^2)}{l^2} \end{cases}$$

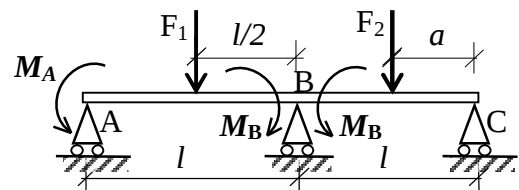
$$\Rightarrow M_A = \frac{9F_1 l}{56} - \frac{F_2 a(l^2 - a^2)}{7l^2} \quad \text{et} \quad M_B = \frac{3F_1 l}{56} + \frac{2F_2 a(l^2 - a^2)}{7l^2}$$

Le torseur à gauche de B donne

$$M_A - R_A l + F_1 \frac{l}{2} - M_B = 0 \Rightarrow R_A = \frac{M_A - M_B}{l} + \frac{F_1}{2}$$

Le torseur à droite de B donne

$$M_B - F_2(l-a) + R_C l = 0 \Rightarrow R_C = \frac{F_2(l-a)}{l} - \frac{M_B}{l}$$



$$\Rightarrow R_A = \frac{34F_1}{56} - \frac{3F_2 a(l^2 - a^2)}{7l^3}; \text{ et } \Rightarrow R_C = -\frac{3F_1}{56} + \frac{F_2(l-a)}{l} - \frac{2F_2 a(l^2 - a^2)}{7l^3}$$

$$\Rightarrow R_B = -R_A - R_C + F_1 + F_2 \Rightarrow R_B = \frac{25F_1}{56} + \frac{F_2 a}{l} + \frac{5F_2 a(l^2 - a^2)}{7l^3}$$

10-7 DETERMINATION DES EFFORTS DE COHESION

Les moments aux appuis étant connus, on peut déterminer la variation des efforts de cohésion le long de chaque travée par les relations suivantes :

$$M_{f_{Zi}}(x) = M_{f_{ZiA}}(x) + \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) M_O + \frac{x}{l_i} M_E$$

$$T_{yi}(x) = T_{yiA}(x) + \frac{M_O - M_E}{l_i}$$

$M_{f_{Zi}}(x)$ et $T_{yi}(x)$: moment fléchissant et effort tranchant à une position x de la travée i .

$M_{f_{ZiA}}$ et $T_{yiA}(x)$: moment fléchissant et effort tranchant dans la poutre isostatique associée

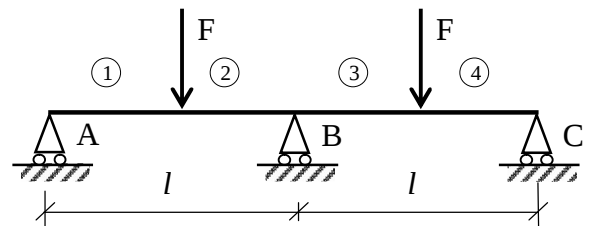
M_O et M_E : moment à l'origine et à l'extrémité de la travée i . (moments aux appuis)

l_i : longueur de la travée i .

EXEMPLE D'APPLICATION N° 1

En connaissant les réactions en A, B, et C de la poutre continue ci-contre, donner l'expression de la variation du moment fléchissant et du l'effort tranchant le long de cette dernière.

$$R_A = R_C = \frac{5F}{16} \text{ et } R_B = \frac{11F}{8}$$



1- Effort de cohésions dans la 1^{ère} travée [AB]

- Tronçon 1

$$T_{y1}(x) = T_{y1A}(x) + \frac{M_O - M_E}{l}$$

$$T_{y1}(x) = -\frac{F}{2} - \left(-\frac{3F}{16}\right) = -\frac{5F}{16}$$

$$M_{f_{Z1}}(x) = M_{f_{Z1A}}(x) + \left(1 - \frac{x}{l}\right) M_O + \frac{x}{l} M_E$$

$$M_{f_{Z1}}(x) = \frac{Fx}{2} + \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot 0 + \frac{x}{l} \left(-\frac{3Fl}{16}\right) = \frac{5F}{16} x$$

- Tronçon 2

$$T_{y2}(x) = T_{y2A}(x) + \frac{M_O - M_E}{l}$$

$$T_{y2}(x) = \frac{F}{2} - \left(-\frac{3F}{16}\right) = \frac{11F}{16}$$

$$M_{f_{Z2}}(x) = M_{f_{Z2A}}(x) + \left(1 - \frac{x}{l}\right) M_O + \frac{x}{l} M_E$$

$$\begin{aligned} M_{f_{Z2}}(x) &= \left(-\frac{Fx}{2} + \frac{Fl}{2}\right) + \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot 0 + \frac{x}{l} \left(-\frac{3Fl}{16}\right) \\ &= -\frac{11F}{16} x + \frac{Fl}{2} \end{aligned}$$

2- Effort de cohésions dans la 1^{ère} travée [BC]

- Tronçon 3

$$T_{y3}(x) = T_{y3A}(x) + \frac{M_O - M_E}{l}$$

$$T_{y3}(x) = -\frac{F}{2} + \left(-\frac{3F}{16}\right) = -\frac{11F}{16}$$

$$M_{f_{Z3}}(x) = M_{f_{Z3A}}(x) + \left(1 - \frac{x}{l}\right) M_O + \frac{x}{l} M_E$$

$$\begin{aligned} M_{f_{Z3}}(x) &= \frac{Fx}{2} + \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(-\frac{3Fl}{16}\right) + \frac{x}{l} \cdot 0 = \\ &= \frac{11F}{16} x - \frac{3Fl}{16} \end{aligned}$$

- Tronçon 4

$$T_{y4}(x) = T_{y4A}(x) + \frac{M_O - M_E}{l}$$

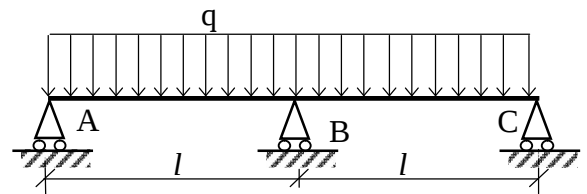
$$M_{fZ4}(x) = M_{fZ4A}(x) + \left(1 - \frac{x}{l}\right)M_O + \frac{x}{l} M_E$$

$$T_{y4}(x) = \frac{F}{2} + \left(-\frac{3F}{16}\right) = \frac{5F}{16}$$

$$\begin{aligned} M_{fZ4}(x) &= \left(-\frac{Fx}{2} + \frac{Fl}{2}\right) + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\left(-\frac{3Fl}{16}\right) + \frac{x}{l}.0 \\ &= -\frac{5F}{16}x + \frac{5Fl}{16} \end{aligned}$$

EXEMPLE D'APPLICATION N° 2

En connaissant les réactions en A, B, et C de la poutre continue ci-contre, donner l'expression de la variation du moment fléchissant et du l'effort tranchant le long de cette dernière.



$$R_A = R_C = \frac{3ql}{8} \text{ et } R_B = \frac{5ql}{4} \text{ et } M_B = -\frac{ql^2}{8}$$

1- Effort de cohésions dans la 1^{ère} travée [AB]

$$T_{y1}(x) = T_{y1A}(x) + \frac{M_O - M_E}{l}$$

$$M_{fZ1}(x) = M_{fZ1A}(x) + \left(1 - \frac{x}{l}\right)M_O + \frac{x}{l} M_E$$

$$T_{y1}(x) = qx - \frac{ql}{2} + \frac{ql}{8} = qx - \frac{3ql}{8}$$

$$\begin{aligned} M_{fZ1}(x) &= \left(-q\frac{x^2}{2} + \frac{ql}{2}x\right) + \left(1 - \frac{x}{l}\right).0 + \frac{x}{l}\left(-\frac{ql^2}{8}\right) \\ &= -q\frac{x^2}{2} + \frac{3ql}{8}x \end{aligned}$$

2- Effort de cohésions dans la 1^{ère} travée [BC]

$$\begin{aligned} M_{fZ1}(x) &= M_{fZ1A}(x) + \left(1 - \frac{x}{l}\right)M_O + \frac{x}{l} M_E \\ &= \left(-q\frac{x^2}{2} + \frac{ql}{2}x\right) + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\left(-\frac{ql^2}{8}\right) + \frac{x}{l}.0 \\ &= -q\frac{x^2}{2} + \frac{5ql}{8}x - \frac{ql^2}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{y1}(x) &= T_{y1A}(x) + \frac{M_O - M_E}{l} \\ &= qx - \frac{ql}{2} - \frac{ql}{8} \\ &= qx - \frac{5ql}{8} \end{aligned}$$

LEÇON 11 : METHODES ENERGETIQUES

Objectif spécifique : Au terme de cette leçon, l'étudiant doit être capable :

- de déterminer les déformations (flèches, rotation) en tout point d'un solide par les méthodes énergétiques.

11-1 GENERALITES SUR LES ENERGIES INTERNES

11-1-1 DEFINITION DE L'ENERGIE INTERNE

L'énergie interne notée U d'un système est l'aptitude de ce dernier à fournir du travail au milieu extérieur qui l'entoure. Cet échange d'énergie ou de travail avec le milieu extérieur peut être dû :

- 1- Soit à une variation de vitesse du système. On parle d'énergie cinétique (E_c).
- 2- Soit à une échange de chaleur. On parle d'énergie calorifique du système (Q).
- 3- Soit enfin à la déformation du système, d'où la variation des contraintes à l'intérieur du système. **Dans ce cas, on parle d'énergie de déformation qu'on notera W : objet de notre étude dans ce chapitre.**

11-1-2 ÉNONCE DU PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE :

Considérons un système passant de l'état initial (0) à l'état final (1) en échangeant uniquement du travail et de la chaleur (On suppose ici négligeable la variation de l'Énergie cinétique). Soit W le travail reçu par le système entre l'état (0) et l'état (1) et soit Q la chaleur reçue par le système (0) et (1) on a alors indépendamment du mode de passage de l'état (0) à l'état (1) : **$U = U(1) - U(0) = W + Q$**

11-1-3 APPLICATION AUX SYSTEMES MECANIKES ISOTHERMES

Hypothèses

- On s'intéresse à des structures travaillant dans le domaine élastique et à température constante
- La mise en charge et de la décharge s'effectuent de façon progressive quasi-statique, ce qui implique qu'on a à faire à des transformations réversibles et donc l'Énergie cinétique de la structure est constamment nulle.
- On suppose que les liaisons intérieures ne travaillent pas. Il n'y a pas d'énergie dissipée par frottement.
- En l'absence de toute charge, nous supposons les actions de liaison et de contraintes internes sont nulles. C'est donc dire que l'état (0) correspond à l'état naturel (le système est l'état naturel).
- Le système est supposé non hypostatique ie que ce n'est pas un mécanisme.

Conclusion

- L'état initial (0) = état naturel (Poutre au repos) et l'état final (1) = état de déformation final.
- Dans ces conditions d'hypothèses, le premier principe de thermodynamique s'énonce sous la forme :

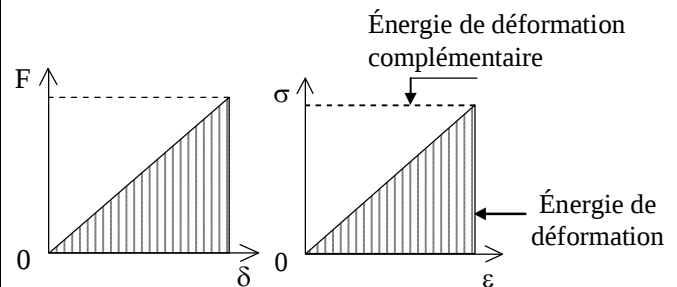
$$U = U(1) - U(0) = W$$

11-2 DETERMINATION DES ENERGIES DE DEFORMATION

11-2-1 GENERALITE

Soient les représentations ci-contre des diagrammes de traction dans le domaine élastique suivants : $F=f(\delta)$ et $\sigma=f(\varepsilon)$.

Le travail extérieur d'une force F appliquée progressivement de 0 à F à un élément de volume pendant sa déformation élastique est $u = w = \frac{1}{2} F\delta = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$.



11-2-2 ÉNERGIE DE DEFORMATION D'UN BARREAU EN TRACTION

$$U = \int_v \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dv \quad \text{où} \quad \sigma_x = \frac{N}{S}, \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{et} \quad dv = Sdx \Rightarrow U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\sigma_x^2}{E} S dx$$

$$U = \frac{1}{2ES} \int_0^L N^2 dx = \frac{N^2 L}{2ES}$$

11-2-3 ÉNERGIE DE DEFORMATION D'UN BARREAU EN FLEXION PURE

$$U = \int_v \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dv \quad \text{où} \quad \sigma_x = -\frac{Mfz.y}{I_{GZ}}; \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{et} \quad dv = dSdx \Rightarrow U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\sigma_x^2}{E} dS dx$$

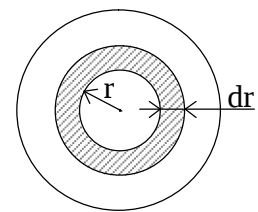
$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \int_v \frac{Mfz^2.y^2}{E I_{GZ}} dS dx \Rightarrow U = \frac{1}{2E(I_{GZ})^2} \int_S y^2 dS \int_0^L Mfz^2 dx \Rightarrow U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{Mfz^2}{E I_{GZ}} dx$$

11-2-4 ÉNERGIE DE DEFORMATION D'UN BARREAU EN TORSION

$$U = \frac{1}{2} \int_v \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta} dv \quad \text{où} \quad \tau_{x\theta} = -\frac{Mt.r}{I_G}; \quad \gamma_{x\theta} = \frac{Mt.r}{GI_G} \quad \text{et} \quad dv = 2\pi r dr dx$$

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{Mt^2.r^3}{GI_G^2} 2\pi r dr dx = \frac{1}{GI_G^2} \int \pi r^3 dr \int Mt^2 dx =$$

$$\frac{1}{GI_G^2} \frac{\pi r^4}{4} \int Mt^2 dx \Rightarrow U = \frac{1}{2GI_G} \int_0^L Mt^2 dx = \frac{Mt^2 L}{2GI_G}$$



Note : $\frac{\partial u}{\partial Mt} = \frac{Mt L}{GI_G} = \theta_{mt}$

11-2-5 ÉNERGIE DE DEFORMATION D'UN BARREAU SOLLICITE AU CISAILEMENT

Par analogie à la barre sollicitée en traction/compression, on aura : $U = \frac{1}{2GS} \int_0^L T_y^2 dx = \frac{T_y^2 L}{2GS}$

11-3 GENERALISATION

Un système ou une structure est généralement sollicité suivant les efforts intérieurs

suivant :
$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{N} + \vec{T}_y + \vec{T}_z \\ \vec{M} = \vec{M}_t + \vec{M}_{fy} + \vec{M}_{fz} \end{cases}$$

Ainsi, l'énergie interne totale serait :

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2(x)}{ES} + k_2 \frac{T_y^2(x)}{GS} + k_3 \frac{T_z^2(x)}{GS} + \frac{M_t^2(x)}{GI_0} + \frac{M_{fy}^2(x)}{EI_y} + \frac{M_{fz}^2(x)}{EI_z} \right)$$

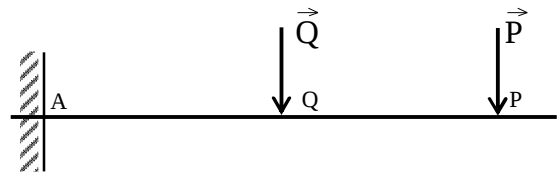
Pour un solide sollicité par N , T_y , M_{fz} , et M_t , l'énergie interne se résume en :

$$U = \frac{1}{2} \left(\int \frac{N^2(x)}{ES} dx + \int \frac{T_y^2(x)}{GS} dx + \int \frac{M_t^2(x)}{GI_0} dx + \int \frac{M_{fz}^2(x)}{EI_{GZ}} dx \right)$$

11-4 THEOREME DE RECIPROCITE DE MAXWELL-BETI

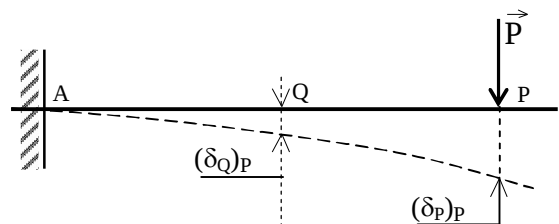
11-4-1 EXPERIENCE

Considérons la poutre ci-contre encastree en A sous l'action des forces $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ appliquées respectivement en P et Q.

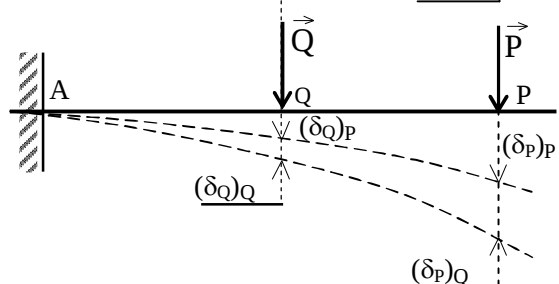


1er cas : Appliquer la force $\vec{P}$ puis la force $\vec{Q}$

Appliquons à la poutre uniquement la force $\vec{P}$: on obtient le déplacement des point Q et P comme l'indique la figure ci-contre : $(\delta_Q)_P$ et $(\delta_P)_P$

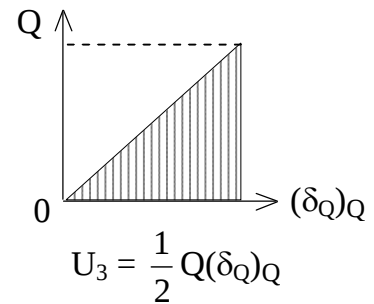
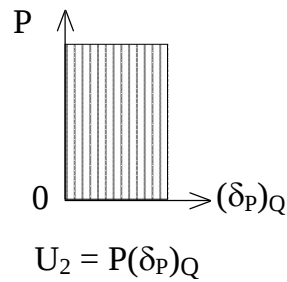
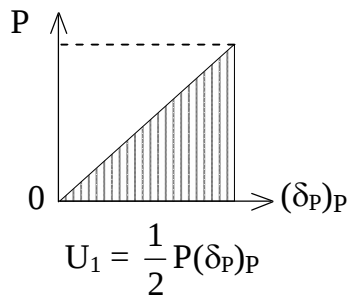


Appliquons ensuite à cette poutre la force $\vec{Q}$: on obtient le déplacement des point Q et P $(\delta_Q)_Q$ et $(\delta_P)_Q$ comme l'indique la figure ci-contre.



L'énergie de déformation totale est :

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + U_3 \quad (1) \\ &= \frac{1}{2} P(\delta_P)_P + P(\delta_P)_Q + \frac{1}{2} Q(\delta_Q)_Q \end{aligned}$$



2ème cas : Appliquer la force $\vec{Q}$ puis la force $\vec{P}$

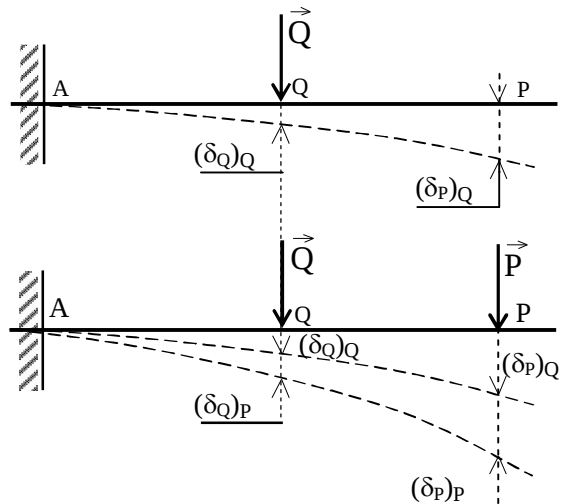
Appliquons à la poutre uniquement la force $\vec{Q}$: on obtient le déplacement des point Q et P comme suit : $(\delta_Q)_Q$ et $(\delta_P)_Q$

Appliquons ensuite à cette poutre la force $\vec{P}$: on obtient le déplacement des point Q et P dû à cette dernière comme suit : $(\delta_Q)_P$ et $(\delta_P)_P$.

L'énergie de déformation totale est ::

$$U' = U_1 + U_2 + U_3 \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} Q(\delta_Q)_Q + Q(\delta_Q)_P + \frac{1}{2} P(\delta_P)_P$$



11-4-2 INTERPRETATION

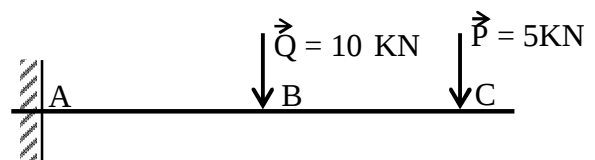
Dans les deux cas d'expériences, $U = U' \Rightarrow P(\delta_P)_Q = Q(\delta_Q)_P$.

De façon générale on a :

$$\sum_{i=1}^n P_i(\delta_i) = \sum_{j=1}^m Q_j(\delta_j)$$

11-4-3 EXERCICE D'APPLICATION

En appliquant une charge $\vec{P}$ en C, on mesure un déplacement de 10 mm au point C et un déplacement de 3 mm au point B. En appliquant ensuite la charge $\vec{Q}$ en B, quel sera le déplacement total en C.



Solution

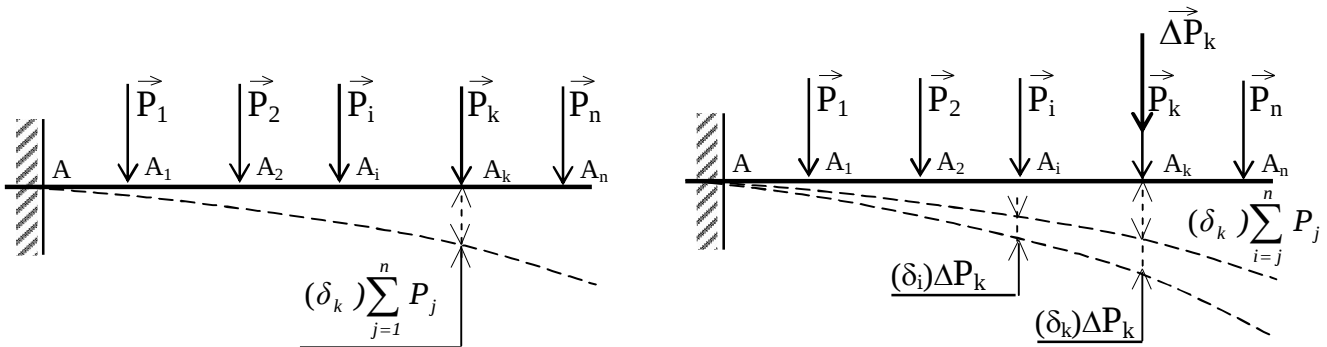
$$(\delta_C)_P = 10 \text{ mm} \text{ et } (\delta_B)_P = 3 \text{ mm}$$

$$\text{Or } P(\delta_C)_Q = Q(\delta_B)_P \Rightarrow (\delta_C)_Q = \frac{Q}{P}(\delta_B)_P \quad \text{AN : } (\delta_C)_Q = \frac{10}{5} \times 3 = 6 \text{ mm.}$$

$$\text{Allongement total} = (\delta_C)_P + (\delta_C)_Q = 10 + 6 = 16 \text{ mm.}$$

11-4-4 ÉNONCE DU PRINCIPE DE MAXWELL-BETI

Le taux de variation de l'énergie de déformation d'un corps en équilibre par rapport à toute force indépendante $\vec{P}_k$ est égal au déplacement δ_k du point d'application de cette force dans la direction de la force $\vec{P}_k$.



On déduit que : $\sum_{i=1}^n P_i (\delta_i)_{\Delta P_K} = \Delta P_K (\delta_K) \sum_{i=1}^n P_i$

$$\Delta U = \frac{1}{2} \Delta P_K (\delta_K)_{\Delta P_K} + \Delta P_K (\delta_K) \sum_{j=1}^n P_j \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta P_K} = \frac{1}{2} (\delta_K)_{\Delta P_K} + (\delta_K) \sum_{i=1}^n P_i$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta P_K \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta P_K} = \frac{\partial U}{\partial P_K} = (\delta_K) \sum_{i=1}^n P_i \Rightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial P_K} = (\delta_K) \sum_{i=1}^n P_i}$$

11-5 THEOREME DE CASTIGLIANO

11-5-1 ENONCE DU THEOREME DE CASTIGLIANO :

Le déplacement algébrique δ_K du point d'application A_k d'une force F_k choisie parmi les forces appliquées à une structure (S) est égale à la dérivée partielle de l'énergie interne par rapport à F_k .

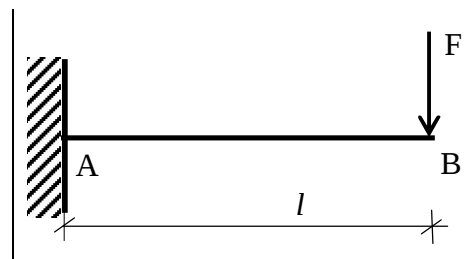
$$\delta_K = \frac{\partial U}{\partial F_K} \text{ ou encore } \varphi_K = \frac{\partial U}{\partial C_K} \text{ où } C_K \text{ indique le couple en } A_K.$$

11-5-2 EXEMPLE D'APPLICATION :

Déterminer la flèche y_B en B en négligeant l'effet de l'effort tranchant devant celui dû au moment fléchissant.

Solution : Entre A-B, on a les efforts intérieurs suivants :

$$N = 0 ; T_y = F \text{ et } M_{f_z} = F \cdot (l-x)$$



$$y_B = \frac{\partial U}{\partial F} = \left(\int_0^l \frac{1}{EI_{GZ}} \frac{\partial M_{f_z}}{\partial F} M_{f_z} dx \right) = \frac{1}{EI_{GZ}} \int_0^l (l-x)(l-x) \cdot F \cdot dx$$

$$y_B = \frac{1}{EI_{GZ}} \int_0^l (x^2 - 2xl + l^2) \cdot F \cdot dx \Rightarrow y_B = \frac{Fl^3}{3EI}$$

11-6 THEOREME DE MENABREA

11-6-1 ENONCE DU THEOREME DE MENABREA :

Il découle du théorème de Castigliano et stipule que : la dérivée partielle de l'énergie interne par rapport à une force de contact est nulle. (car le déplacement algébrique en ce point de liaison est nul).

Remarque : Il est très fréquemment utilisé pour le calcul des structures hyperstatiques. Notamment, la détermination des inconnues hyperstatiques.

11-6-2 EXEMPLE D'APPLICATION :

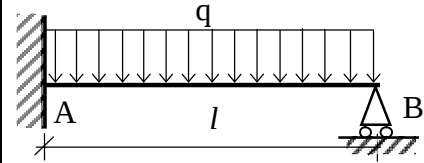
Déterminer la flèche y_B en B en négligeant l'effet de l'effort tranchant devant celui dû au moment fléchissant.

Entre A-B, le moment de flexion est :

$$M_{f_z} = R_B (l-x) - \frac{q(l-x)^2}{2}$$

$$U = \frac{1}{2} \left(\int \frac{M_{f_z}^2(x)}{EI_{GZ}} dx \right) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial R_B} = \left(\int_0^l \frac{1}{EI_{GZ}} \frac{\partial M_{f_z}}{\partial R_B} M_{f_z} dx \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial R_B} = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\int_0^l (l-x) \cdot \left(R_B \cdot (l-x) - \frac{q(l-x)^2}{2} \right) dx \right) = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3ql}{8}$$



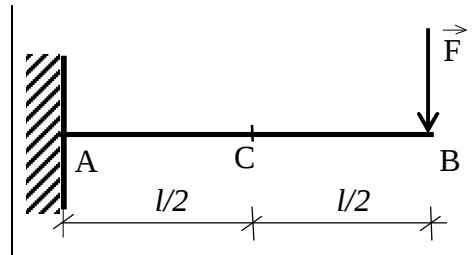
11-6-3 NOTION DES FORCES FICTIVES ET THEOREME DE MENABREA

L'utilisation des forces fictives a pour but de pouvoir trouver en tout point de la structure le déplacement (translation ou rotation) de la section dans une direction donnée.

Déterminer la flèche y_C en C en négligeant l'effet de l'effort tranchant devant celui dû au moment fléchissant.

Entre A-B, on a les efforts intérieurs suivants :

Appliquons en C un effort fictif vertical ϕ .

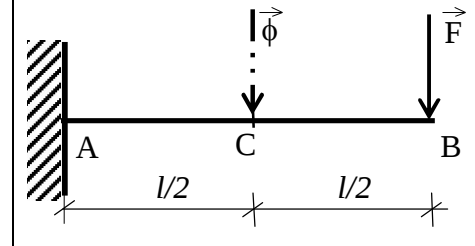


Entre A-C, on a les efforts intérieurs suivants :

$$N = 0 ; T_Y = -(F + \phi) \text{ et } M_{f_{Z1}} = -F(l-x) - \phi(l/2-x).$$

Entre C-B, on a les efforts intérieurs suivants :

$$N = 0 ; T_Y = -F \text{ et } M_{f_Z} = -F \cdot (l-x)$$



$$\begin{aligned} y_B = \frac{\partial U}{\partial \phi} &= \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\int_0^{l/2} \frac{\partial M_{f_Z}}{\partial \phi} M_{f_Z} \cdot dx + \int_{l/2}^l \frac{\partial M_{f_Z}}{\partial \phi} M_{f_Z} \cdot dx + \right) \\ &= \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\int_0^{l/2} (l/2 - x)(F(l-x) + \phi(l/2 - x)) \cdot dx + \int_{l/2}^l 0 \cdot M_{f_Z} \cdot dx + \right) \text{ or } \phi = 0 \\ &= \frac{F}{EI_{GZ}} \left(\int_0^{l/2} \left(x^2 - \frac{3l}{2}x + \frac{l^2}{2} \right) \cdot dx \right) = \frac{F}{EI_{GZ}} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2l}{4} + \frac{xl^2}{2} \right)_0^{l/2} \Rightarrow y_C = \frac{5Fl^3}{48EI} \end{aligned}$$

LEÇON 12 : LIGNE D'INFLUENCE –CHARGES MOBILES

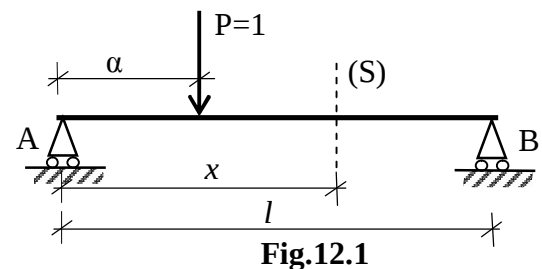
Objectif spécifique : Au terme de cette leçon, l'étudiant doit être capable :

- de déterminer les actions extérieures d'appui ou de couple, les efforts de cohésions et les déplacements par les lignes d'influence.

12-1 DEFINITION

Considérons une poutre AB plane reposant sur deux appuis simples et soumise à une charge ponctuelle unitaire mobile d'abscisse α .

On cherche à mesurer dans une section (S) quelconque d'abscisse x l'effet de cette charge mobile.



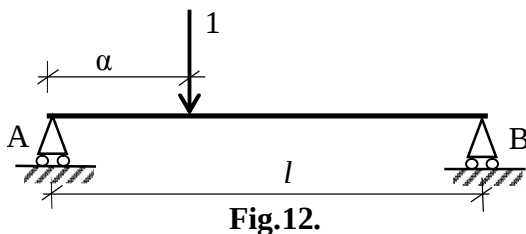
L'effet de cette charge dans cette section peut être : les actions extérieures (les réactions d'appui, les couples) ; - les sollicitations (l'effort normal, l'effort tranchant, le moment fléchissant) - et les déplacements (des translations, des rotations).

La courbe représentative de ces effets lorsque la charge mobile se déplace sur la poutre, est appelée courbe ou ligne d'influence.

Cette courbe d'influence est relative à une section x donnée. Il y a donc autant de courbes d'influences que de sections S que l'on considère.

12-2 LIGNE D'INFLUENCE AUX APPUIS

Détermination des lignes d'influence aux appuis, c'est-à-dire la courbe donnant la valeur de R_A ou de R_B en fonction du déplacement de la charge unitaire.



La poutre étant en équilibre, on a :

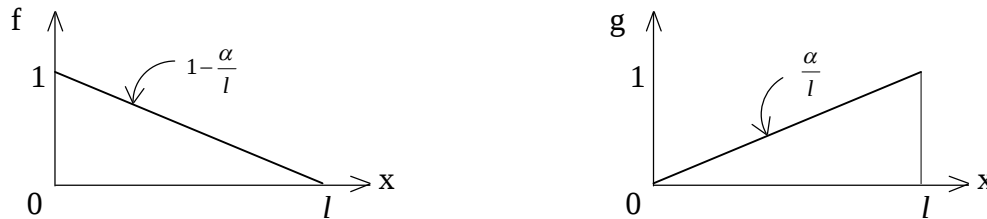
$$\begin{cases} \sum F_{ext} = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_A + R_B - 1 = 0 \dots (1) \\ lR_A + 1 \cdot (l - \alpha) = 0 \dots (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow R_A = \frac{1 \cdot (l - \alpha)}{l} = 1 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right) \text{ d'où}$$

$$R_A = 1 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right) = 1 \cdot f(\alpha) : \text{charge unitaire.}$$

$$(1) \Rightarrow R_B = 1 \cdot \left(\frac{\alpha}{l}\right) = 1 \cdot g(\alpha)$$

Les fonctions $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$ sont les fonctions d'influence respectivement des réactions en A et en B. et leur représentation graphique sont les suivantes :



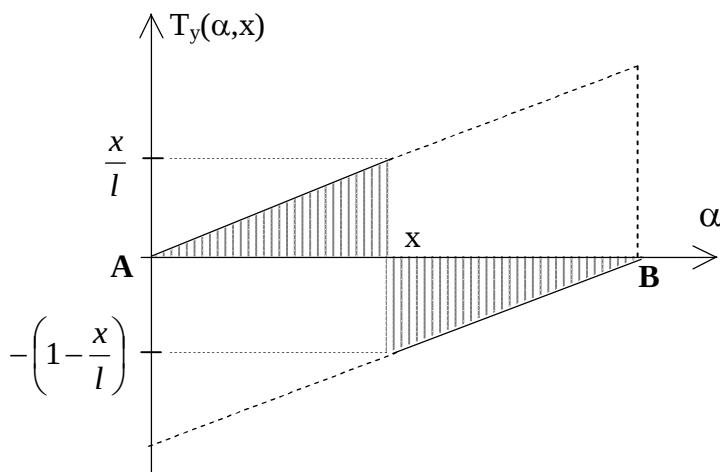
12-3 LIGNE D'INFLUENCE DE L'EFFORT TRANCHANT

Plaçons-nous dans une section (S) d'abscisse x et évaluons l'effort tranchant $T(x, \alpha)$ dans (S) lorsque la charge mobile parcourt la poutre.

Deux cas sont à considérer :

- La charge unitaire se situe entre [A, x] donc $\alpha < x$: alors l'expression de l'effort tranchant en x est $T(\alpha, x) = \frac{\alpha}{l}$. Ainsi à $\alpha = x$ $T(x, x) = \frac{x}{l}$.
- La charge unitaire se situe entre [x, A] donc $\alpha > x$: alors l'expression de l'effort tranchant en x est $T(\alpha, x) = -\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)$. Ainsi à $\alpha = x$ $T(x, x) = -\left(1 - \frac{x}{l}\right)$

Traçons maintenant la ligne d'influence de l'effort tranchant ie la courbe donnant la valeur de l'effort tranchant en fonction de α (position de la charge unitaire)



Remarque : L'effort tranchant en (S) est maximal lorsque la charge est située au droit de (S).

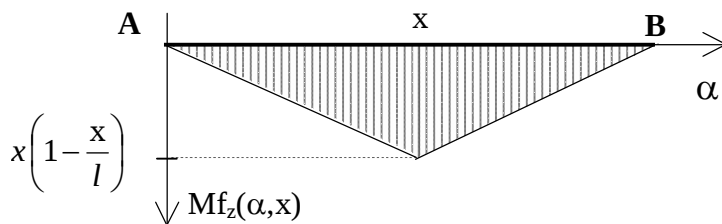
12-4 LIGNE D'INFLUENCE DU MOMENT FLECHISSANT

Plaçons-nous dans une section (S) d'abscisse x et évaluons le moment fléchissant $M_{fz}(x, \alpha)$ dans (S) lorsque la charge mobile parcourt la poutre.

Deux cas sont à considérer :

- La charge unitaire se situe entre $[A, x]$ donc $\alpha < x$: alors l'expression du moment fléchissant en x est $M_{fz}(\alpha, x) = \alpha \left(1 - \frac{x}{l}\right)$. Ainsi à $\alpha = x$ $M_{fz}(x, x) = x \left(1 - \frac{x}{l}\right)$.
- La charge unitaire se situe entre $[x, B]$ donc $\alpha > x$: alors l'expression du moment fléchissant en x est $M_{fz}(\alpha, x) = x \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)$. Ainsi à $\alpha = x$ $M_{fz}(x, x) = x \left(1 - \frac{x}{l}\right)$.

Traçons maintenant la ligne d'influence du moment fléchissant ie la courbe donnant la valeur du moment fléchissant en fonction de α (position de la charge unitaire)



Remarque : Le moment fléchissant en (S) est maximal lorsque la charge est située au droit de (S).

12-5 APPLICATION DE LA LIGNE D'INFLUENCE AUX CHARGES LOCALISEES

12-5-1 Cas des charges localisées indépendantes

Considérons une poutre AB soumise aux charges localisées P_i appliquées aux points d'abscisses α_i . Les lignes d'influence de T_y et M_{fz} en (S) nous permettent de déterminer directement l'effet des charges localisées en S par lecture directe des ordonnées.

Soit y_i et y'_i les ordonnées d'abscisses α_i des lignes d'influence de l'effort tranchant et du moment fléchissant dans la section (S). Une charge unité d'abscisse α_i produit dans (S) un effort tranchant y_i et un moment fléchissant y'_i .

D'après le principe de superposition, une charge P_i appliquée en α_i produit dans S un effort tranchant $y_i.P_i$ et un moment fléchissant $y'_i.P_i$ et le système total en (S) P_i produit :

- un effort tranchant $T(x) = \sum P_i y_i$
- un moment fléchissant $M(x) = \sum P_i y'_i$

Exercice d'Application

Soit 3 charges de P_1 , P_2 , P_3 situées respectivement en $x = l/4$, $l/2$, $3l/4$ sur une poutre de longueur l .

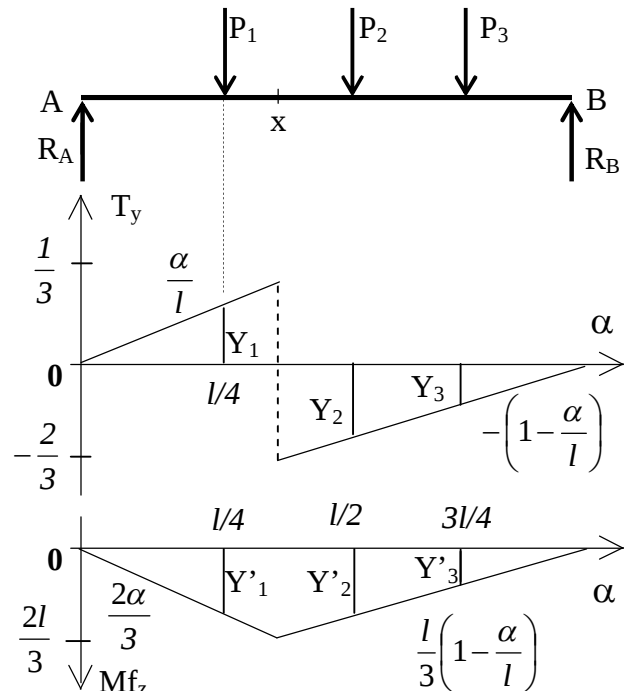
Déterminer l'effort tranchant et le moment fléchissant en $x = l/3$ en étudiant les lignes d'influence

Solution

Y_i étant l'effort tranchant créé en la section droite x créé par une force unitaire i .
Donc, pour une force P_i , l'effort sera $P_i Y_i$.

$$\begin{aligned} T_y(l/3) &= Y_1 P_1 + Y_2 P_2 + Y_3 P_3 \\ &= \frac{l/4}{l} P_1 - \left(1 - \frac{l/2}{l}\right) P_2 - \left(1 - \frac{3l/4}{l}\right) P_3 \\ &= \frac{1}{4} P_1 - \frac{1}{2} P_2 - \frac{1}{4} P_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_f(l/3) &= Y'_1 P_1 + Y'_2 P_2 + Y'_3 P_3 \\ &= \frac{2}{3} \frac{l}{4} + \frac{l}{3} \left(1 - \frac{l/2}{l}\right) + \frac{l}{3} \left(1 - \frac{3l/4}{l}\right) \\ &= \frac{l}{12} (2P_1 + 2P_2 + P_3). \end{aligned}$$



12-5-1 Cas d'un convoi

12-5-1 Définition

Un convoi est un système de charges concentrées se déplaçant dans un ensemble, en maintenant constante la distance entre les supports et les efforts.

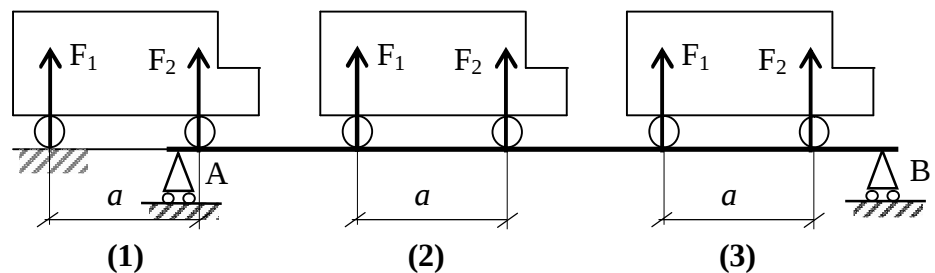
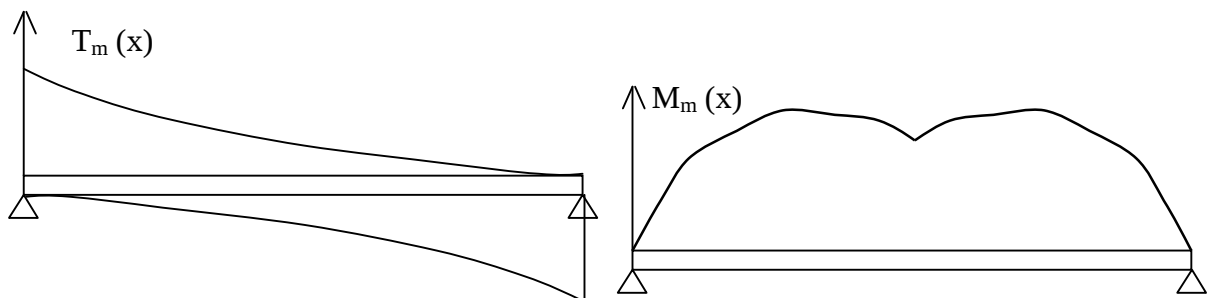


Fig.12.4

12-5-2 Détermination des efforts maximaux dans une section S donnée.

Il résulte de la forme des lignes d'influence que les efforts T et M sont maximaux en S lorsqu'une charge d'un convoi est située au droit de la section S . Si le convoi est composé de n charges P_i , il y a donc n positions de convoi à étudier ; pour chaque position, on place une charge P_i au droit de S et on détermine l'effort tranchant maximal $T_m(x)$ et le moment fléchissant maximal $M_m(x)$ en S .

Lorsqu'on étudie toutes les sections S de la poutre, les courbes des efforts tranchants maximaux $T_m(x)$ et $M_m(x)$ ont alors pour allure les courbes appelées courbes enveloppes suivantes :



12-5-3 Maximum absolu du moment fléchissant pour l'ensemble de la poutre : Théorème de Barré

Le théorème de Barré a pour objet la détermination du moment fléchissant maximal dans une poutre isostatique sous l'effet de passage d'un convoi. Il ne concerne pas la détermination maximale de l'effort tranchant. On sait en effet que dans une poutre sur deux appuis l'effort tranchant est maxi au droit des appuis.

Considérons une poutre sur deux appuis subissant un système de force F_i .

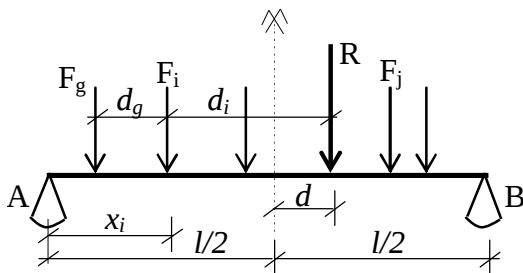


Fig.12.5

F_i : Effort transmis par un essieu à gauche de la résultante R.

R : c'est la résultante des forces que le convoi exerce sur la poutre.

d_i : la distance entre le support de F_i et de R ;

F_j : Effort transmis à la poutre par un essieu situé à droite de la résultante.

l : longueur de la Poutre

d : distance entre le support de R et le milieu de la poutre.

Nous pouvons donc écrire que :

$$R = \sum_i F_i + \sum_j F_j$$

La poutre est en équilibre :

$$\sum M_B = 0 \Leftrightarrow lR_A - R(l/2 - d) \Rightarrow R_A = R\left(\frac{1}{2} - \frac{d}{l}\right)$$

$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow -lR_B + R(l/2 + d) \Rightarrow R_B = R\left(\frac{1}{2} + \frac{d}{l}\right)$$

Effectuons une coupure au droit du point d'application de F_i et cherchons le moment fléchissant en cette section.

$$M_i - R_A x_i + \sum M(F_g)_{P_i} = 0 \quad \text{Or} \quad \sum M(F_g)_{P_i} = \sum F_g d_g$$

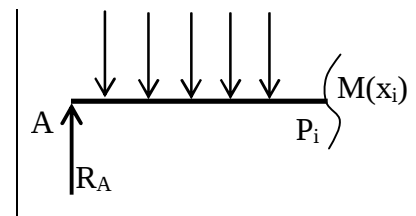
$$M_i - R_A x_i + \sum F_g d_g = 0$$

$$x_i = l - (l/2 + d_i - d) = l/2 + d - d_i$$

$$M_i = R_A (l/2 + d - d_i) - \sum F_g d_g = R\left(\frac{1}{2} - \frac{d}{l}\right)\left(d + \frac{l}{2} - d_i\right) - \sum F_g d_g$$

$$= \frac{R}{2l}(l - 2d)\left(d + \frac{l}{2} - d_i\right) - \sum F_g d_g$$

$$\text{Le maximum sera obtenu lorsque : } \frac{\partial M_i}{\partial d} = 0 \Rightarrow d = \frac{d_i}{2}$$



ENONCE DU THEOREME DE BARRE

Le moment fléchissant est maximal au droit d'un essieu lorsque cet essieu et la résultante générale du convoi occupe des positions symétriques par rapport au milieu de la poutre.

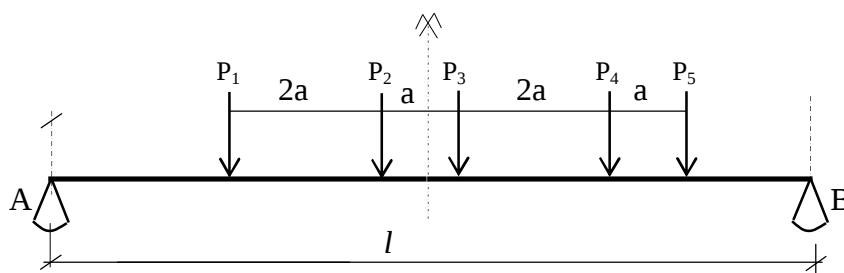
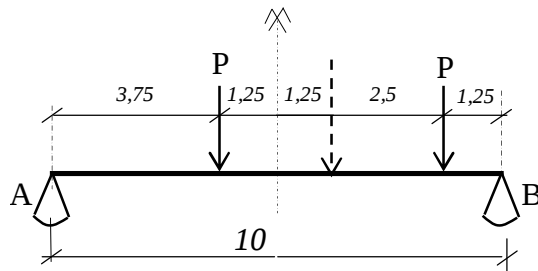
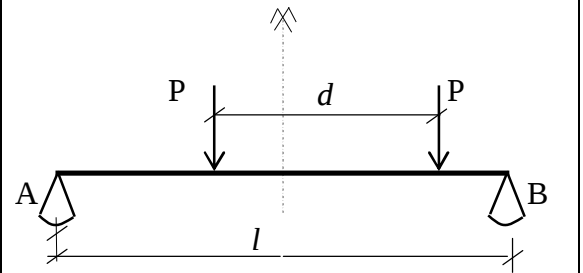
$$M_i^{\max} = \frac{R}{2l}(l - d_i) \left(\frac{d_i}{2} + \frac{l}{2} - d_i \right) - \sum F_g d_g = \frac{R}{4l}(l - d_i)^2 - \sum F_g d_g$$

$$M_i^{\max} = \frac{Rl}{4} \left(1 - \frac{d_i}{l} \right)^2 - \sum F_g d_g$$

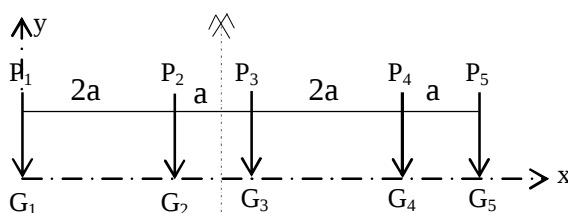
12-5-4 Exemple : convoi à deux essieux

On considère un convoi de deux charges identiques P distantes de $d = 5$ m, évoluant sur une poutre de longueur $l = 10$ m.

- Déterminer la position du convoi donnant le moment maxi dans la poutre, ainsi que son intensité.

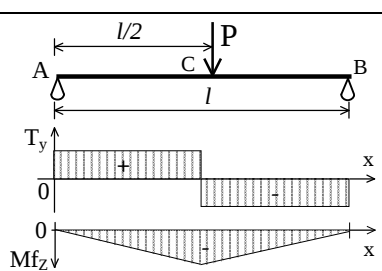
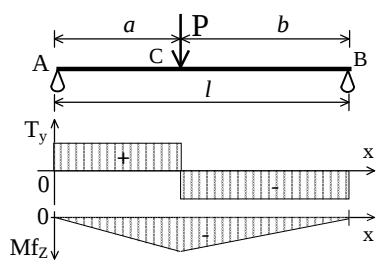
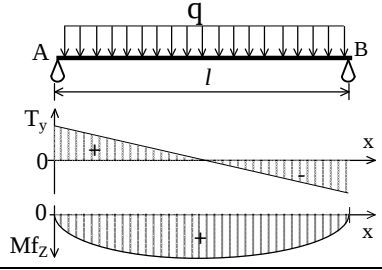


Détermination du centre de gravité du convoi

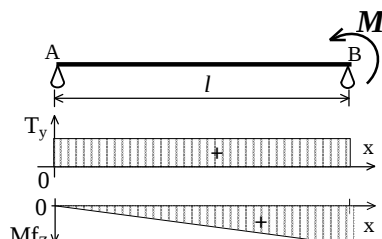
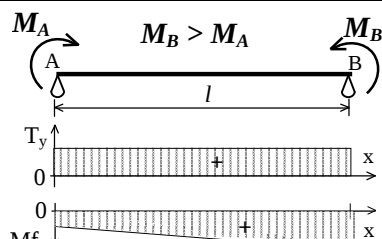


FORMULAIRES

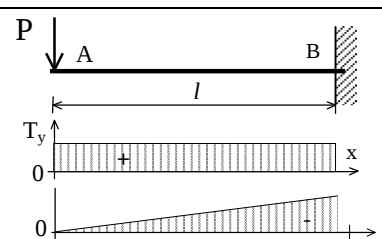
FORMULAIRE 1 : POUTRES SUR APPUIS SIMPLES

N°	Nature des Charges	Réaction d'appui	Effort tranchant	Moment fléchissant	Equation de la flèche	Rotation
1		$R_A = \frac{P}{2}$ $R_B = \frac{P}{2}$	$T_y^{A-C} = R_A$ $T_y^{C-B} = -R_B$	$Mf_z^{A-C}(x) = \frac{P \cdot x}{2}$ $Mf_z^{C-B}(x) = \frac{P \cdot (l - x)}{2}$ $Mf_z \max = \frac{P \cdot l}{4}$	$y_{A-C} = \frac{P \cdot l^2 \cdot x}{16EI} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{x^2}{l^2} \right)$ $y_{\max} = \frac{P \cdot l^3}{48EI}$	$\varphi_A = \frac{3P \cdot l^2}{48EI}$ $\varphi_B = \frac{3P \cdot l^2}{48EI}$
2		$R_A = \frac{P \cdot b}{l}$ $R_B = \frac{P \cdot a}{l}$	$T_y^{A-C} = R_A$ $T_y^{C-B} = -R_B$	$Mf_z^{A-C}(x) = \frac{Fb \cdot x}{l}$ $Mf_z^{C-B}(x) = \frac{Fa(l - x)}{l}$ $Mf_z^{C-B} \max = \frac{Fab}{l}$	$y_{A-C} = \frac{P \cdot b \cdot x}{6lEI} (l^2 - b^2 - x^2)$ $y_{C-B} = \frac{Pa(l - x)}{6lEI} (2lx - a^2 - x^2)$ $y_{\max} = \frac{P \cdot b}{48EI} (3l^2 - 4b^2)$	$\varphi_A = \frac{Pab}{6lEI} (b + l)$ $\varphi_B = \frac{Pab}{6lEI} (a + l)$
3		$R_A = \frac{ql}{2}$ $R_B = \frac{ql}{2}$	$T_y^{A-B} = q \left(\frac{l}{2} - x \right)$	$Mf_z = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$ $Mf_z \max = \frac{ql^2}{8} \quad (x = \frac{1}{2}l)$	$y = \frac{ql^3 \cdot x}{24EI} \left(1 - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^5}{l^5} \right)$ $y_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI} \text{ avec } x=0,5l$	$\varphi_A = \frac{ql^3}{24EI}$ $\varphi_B = \frac{ql^3}{24EI}$

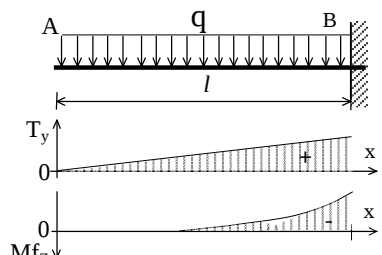
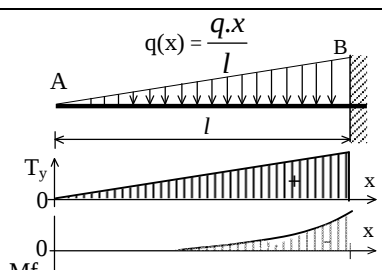
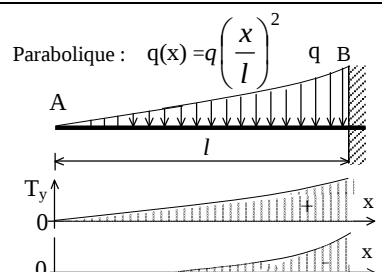
FORMULAIRE 1 : POUTRES SUR APPUIS SIMPLES (Suite)

N°	Cas de Charge	Réaction d'appui	Effort tranchant	Moment fléchissant	Equation de la flèche	Rotation
4		$R_A = \frac{M}{l}$ $R_B = -\frac{M}{l}$	$T_y = \frac{M}{l}$	$Mf_Z^{A-C} = M \cdot \frac{x}{l}$	$y = -\frac{Mlx}{6EI} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right)$	$\varphi_A = \frac{Ml}{6EI}$ $\varphi_B = 2 \frac{Ml}{6EI}$
5		$R_A = \frac{M_B - M_A}{l}$ $R_B = -\frac{M_B - M_A}{l}$	$T_y = \frac{M_B - M_A}{l}$	$Mf_Z^{A-B} = M_A + (M_B - M_A) \frac{x}{l}$	$y = -\frac{l}{6EI} \left[M_A + x \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) + M_B x \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \right]$	$\varphi_A = \frac{l(2M_A + M_B)}{6EI}$ $\varphi_B = \frac{l(2M_B + M_A)}{6EI}$

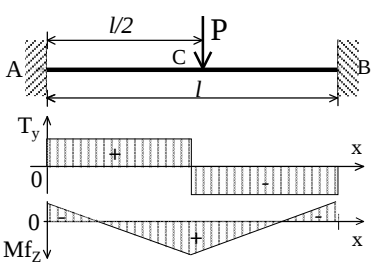
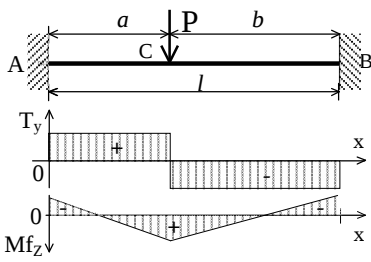
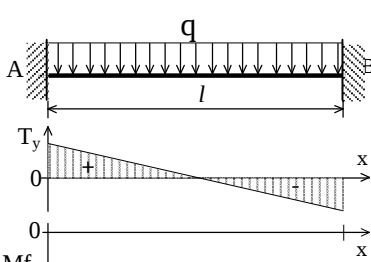
FORMULAIRE 2 : CONSOLES

N°	Cas de Charge	Réaction d'appui	Effort tranchant	Moments	Equation de la flèche	Rotation
1		$R_B = P$	$T_y = P$	$M_B = -P.l$ $Mf_Z = -P.x$	$y = \frac{P.l^2 x}{6EI} \left(3 - \frac{x^2}{l^2} \right)$ $y_{\max} = \frac{P.l^3}{3EI}$	$\varphi = \frac{P.l^2}{2EI}$

FORMULAIRE 2 : CONSOLES (Suite)

N°	Cas de Charge	Réaction d'appui	Effort tranchant	Moments	Equation de la flèche	Rotation
2		$R_B = ql$	$T_y^{A-B} = q \cdot x$	$M_A = -\frac{ql^2}{2}$ $M_{f_z} = -\frac{qx^2}{2}$	$y = \frac{ql^3 x}{24EI} \left(4 - \frac{x^3}{l^3} \right)$ $y_{\max} = \frac{ql^4}{8EI}$	$\varphi = \frac{ql^3}{6EI}$
3		$R_B = \frac{ql}{2}$	$T_y = \frac{qx^2}{2l}$	$M_A = -\frac{ql^2}{6}$ $M_{f_z} = -\frac{qx^3}{6l}$	$y = \frac{ql^3 x}{24EI} \left(5 - \frac{x^4}{l^4} \right)$ $y_{\max} = \frac{ql^4}{30EI}$	$\varphi = \frac{ql^3}{24EI}$
4		$R_B = \frac{ql}{3}$	$T_y = \frac{qx^3}{3l^2}$	$M_A = -\frac{ql^2}{12}$ $M_{f_z} = -\frac{qx^4}{12l^2}$	$y = \frac{ql^3 x}{360EI} \left(6 - \frac{x^5}{l^3} \right)$ $y_{\max} = \frac{ql^4}{72EI}$	$\varphi = \frac{ql^3}{60EI}$

FORMULAIRE 3 : POUTRES ENCASTREES

N°	Cas de Charge	Réaction et moment aux appuis	Effort tranchant	Moments fléchissant	Equation de la flèche
1		$R_A = \frac{P}{2}$; $R_B = \frac{P}{2}$ $M_A = -\frac{P.l}{8}$ $M_C = \frac{P.l}{8}$	$T_y^{A-C} = \frac{P}{2}$ $T_y^{C-B} = -\frac{P}{2}$	$Mf_z^{A-C} = \frac{P}{2}x - \frac{Pl}{8}$ $Mf_z^{C-B} = -\frac{P}{2}x + \frac{3Pl}{8}$ $Mf_z \max = \frac{Pl}{8}$	$y_{A-C} = \frac{P.lx^2}{16EI} \left(1 - \frac{4x}{3l} \right)$ $y_{\max} = \frac{Pl^3}{192EI}$
2		$R_A = \frac{Pb^2}{2l^2} \left(1 + \frac{2a}{l} \right)$ $R_B = \frac{Pa^2}{2l^2} \left(1 + \frac{2b}{l} \right)$ $M_A = -\frac{Pab^2}{l^2}$ $M_B = \frac{Pab^2}{l^2}$	$T_y^{A-C} = R_A$ $T_y^{C-B} = -R_B$	$Mf_z^{A-C} = \frac{Pb^2}{l^2}(l+2a)x - \frac{Pab^2}{l^2}$ $Mf_z^{C-B} = \frac{Pa^2(l+b)}{l^2} - \frac{Pa^2(l+2b)}{l^3}x$ $M_C = \frac{2Pa^2b^2}{l^2}$	$y_{A-C} = \frac{Pax^2}{6EI} \left(3 - \frac{6a}{l} + \frac{8a^2}{l^2} \right)$ $y_{\max} = \frac{P.b}{48EI} (3l^2 - 4b^2)$
3		$R_A = \frac{ql}{2}$ $R_B = \frac{ql}{2}$ $M_A = -\frac{ql^2}{12}$ $M_B = +\frac{ql^2}{12}$	$T_y^{A-B} = q \left(\frac{l}{2} - x \right)$	$Mf_z = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} - \frac{ql^2}{6}$ $Mf_z \max = \frac{ql^2}{24} \left(x = \frac{1}{2}l \right)$	$y = \frac{ql^2x^2}{24EI} \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2$ $y_{\max} = \frac{ql^4}{384EI}$ avec $x=0,5l$

BIBLIOGRAPHIE

- 1- AGATI, P. et ROSETTE, M. ; 1992 : Mécanique Appliquée ; Col. AGATI, ed. Dunod, Paris,
- 2- D. SPENLE, et R. GOURHANT, 1998 : Guide du calcul en Mécanique, Hachette Technique