

# CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS

CHAIRE DE TRAVAUX PUBLICS ET BATIMENT

---

" BETON ARME "

*Chapitre 10 : Calcul des poutres continues*  
*Méthode forfaitaire*

(Code CCV109)

## Sommaire

|            |                                                                      |          |
|------------|----------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>10.</b> | <b>CALCUL D'UNE POUTRE CONTINUE PAR LA METHODE FORFAITAIRE.....</b>  | <b>3</b> |
| 10.1.      | INTRODUCTION .....                                                   | 3        |
| 10.2.      | RAPPELS SUR LE THEOREME DES 3 MOMENTS (FORMULE DE CLAPEYRON) .....   | 3        |
| 10.2.1.    | <i>Présentation de la méthode</i> .....                              | 3        |
| 10.2.2.    | <i>Exemple de calcul</i> .....                                       | 5        |
| 10.3.      | PHENOMENE D'ADAPTATION DU BETON ARME .....                           | 6        |
| 10.4.      | PORTEE A PRENDRE EN COMPTE DANS LES CALCULS .....                    | 9        |
| 10.4.1.    | <i>Poutres sur appareils d'appuis</i> .....                          | 9        |
| 10.4.2.    | <i>Poutres reposant sur un massif ou un mur en maçonnerie</i> .....  | 9        |
| 10.4.3.    | <i>Autres cas (cas les plus courants dans le bâtiment)</i> .....     | 9        |
| 10.5.      | LA METHODE FORFAITAIRE.....                                          | 10       |
| 10.5.1.    | <i>Domaine d'application</i> .....                                   | 10       |
| 10.5.2.    | <i>Principe de la méthode – Adaptation</i> .....                     | 10       |
| 10.5.3.    | <i>Moments fléchissants</i> .....                                    | 11       |
| 10.5.4.    | <i>Efforts tranchants</i> .....                                      | 13       |
| 10.6.      | EXERCICES DE COURS .....                                             | 15       |
| 10.6.1.    | <i>Exercice 1 : Poutre continue à deux travées inégales</i> .....    | 15       |
| 10.6.2.    | <i>Exercice 2 : Poutre continue à trois travées inégales :</i> ..... | 16       |

## 10. Calcul d'une poutre continue par la méthode forfaitaire

### 10.1. Introduction

La plupart des poutres des projets "réels" ne se limitent pas à de simples poutres isostatiques mais plutôt à des poutres reposant sur plusieurs appuis successifs appelées "Poutres continues".

La continuité d'une poutre se traduit par:

- Une continuité des déformations, et notamment des rotations.
- Des moments sur appuis non-nuls permettant d'assurer cette continuité.

Une poutre continue est donc un système hyperstatique dont le nombre d'inconnues est égal au nombre d'appuis intermédiaires.

La résolution d'un tel système passe par le théorème des trois moments qui permet:

- Déterminer les moments sur appuis à partir de la continuité des rotations.
- Déterminer les équations du moment fléchissant et de l'effort tranchant le long de la poutre.

Pour calculer une poutre continue, on suivra donc le cheminement suivant:

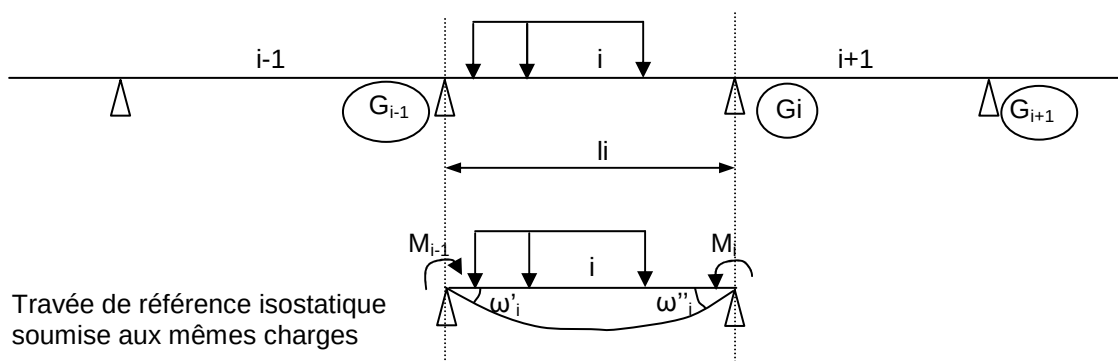
- Calcul des rotations des travées isostatiques.
- Détermination des moments sur appuis de la poutre continue.
- Détermination des sollicitations internes (moment de flexion et effort tranchant).
- Détermination des réactions d'appuis.

Pour le cas particulier des poutres continues en béton armé, la continuité sera assurée par des armatures, placées en fibre supérieure, au dessus des appuis. Ces armatures sont communément appelées « armatures de chapeaux ».

### 10.2. Rappels sur le théorème des 3 moments (formule de Clapeyron)

#### 10.2.1. Présentation de la méthode

On considère que les sollicitations le long d'une poutre continue  $M(x)$  et  $V(x)$  peuvent se calculer travée par travée en isolant chacune d'elles et en incluant leurs efforts aux appuis (moments de continuité) dus à cette continuité.



- Les sollicitations sont  $M_{iso}(x)$  et  $V_{iso}(x)$ , les moments de continuité sont notés  $M_{i-1}$  et  $M_i$
- Les rotations de la travée  $i$  sont notées  $\omega'_i$  pour l'appui gauche et  $\omega''_i$  pour l'appui droit.

### Le principe de la méthode des 3 moments :

Pour une travée quelconque  $i$  d'une poutre continue, soumise à l'action d'un système quelconque de charges.

1- On commence par déterminer les moments sur appuis :

$$\left. \begin{array}{l} \blacksquare b_i \times M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} \times M_{i+1} = \omega'_{i+1} - \omega''_i \\ \blacksquare a_i = 2 \times b_i = c_i = \frac{l_i}{3EI_i} \text{ si } l_i = \text{Cste} \\ \blacksquare l_i = \text{moment d'inertie de la travée } l_i \\ \blacksquare \omega'_{i+1} \text{ et } \omega''_i = \text{rotations sur l'appui } G_i \text{ des travées} \\ \text{de référence encadrant cet appui} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Autant d'équations que d'appuis} \\ \text{intermédiaires} \end{array}$$

2- On obtient ensuite les moments et efforts tranchants dans la travée continue :

$$\begin{aligned} M(x) &= M_{iso}(x) + M_{i-1} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + M_i \frac{x}{l_i} \\ V(x) &= V_{iso}(x) + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} \end{aligned}$$

Pour un cas de charge donné (en tenant compte de la discontinuité due aux charges concentrées) le moment maximal en travée est obtenu en écrivant :

$$V(x_0) = \frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow x_0 = \text{abscisse du point } M = M_{\max}$$

d'où

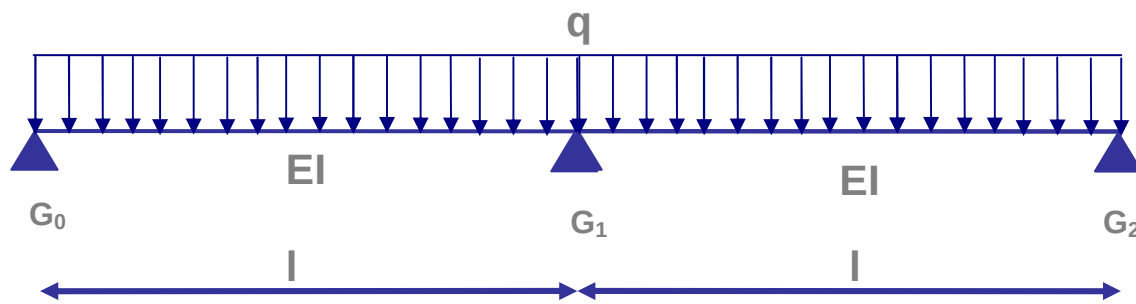
$$M_{\max} = M_{iso}(x_0) + M_{i-1} \left(1 - \frac{x_0}{l_i}\right) + M_i \frac{x_0}{l_i}$$

Connaissant les efforts tranchants au droit des appuis intermédiaires, on peut en déduire facilement les réactions d'appuis correspondantes :

- Soit  $R_i$ , la réaction d'appui à l'appui " $i$ ".
- " $V'_{i+1}$ " l'effort tranchant "gauche" de la travée  $i+1$
- " $V''_i$ " l'effort tranchant "droit" de la travée  $i$

$$\text{On a : } R_i = V'_{i+1} - V''_i$$

### 10.2.2. Exemple de calcul



Sachant que  $M_0$  et  $M_2$  sont nuls, le théorème des 3 moments nous permet d'écrire que :

$$b \cdot \overbrace{M_0}^{\approx 0} + (c + a) \cdot M_1 + b \cdot \overbrace{M_2}^{\approx 0} = \omega'_2 - \omega''_1 = -\frac{ql^3}{24EI} - \frac{ql^3}{24EI} \Leftrightarrow \left( \frac{l}{3EI} + \frac{l}{3EI} \right) \cdot M_1 = -\frac{ql^3}{12EI}$$

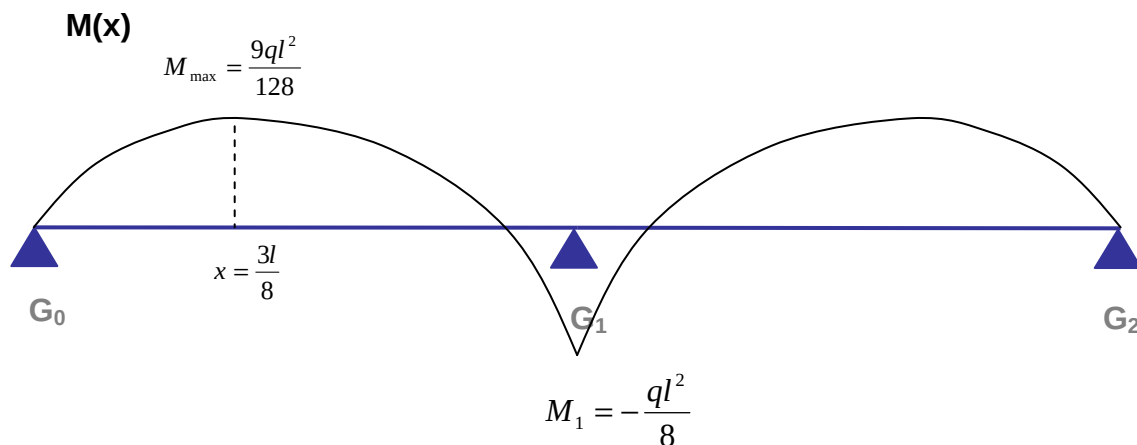
$$\Rightarrow M_1 = -\frac{ql^2}{8}$$

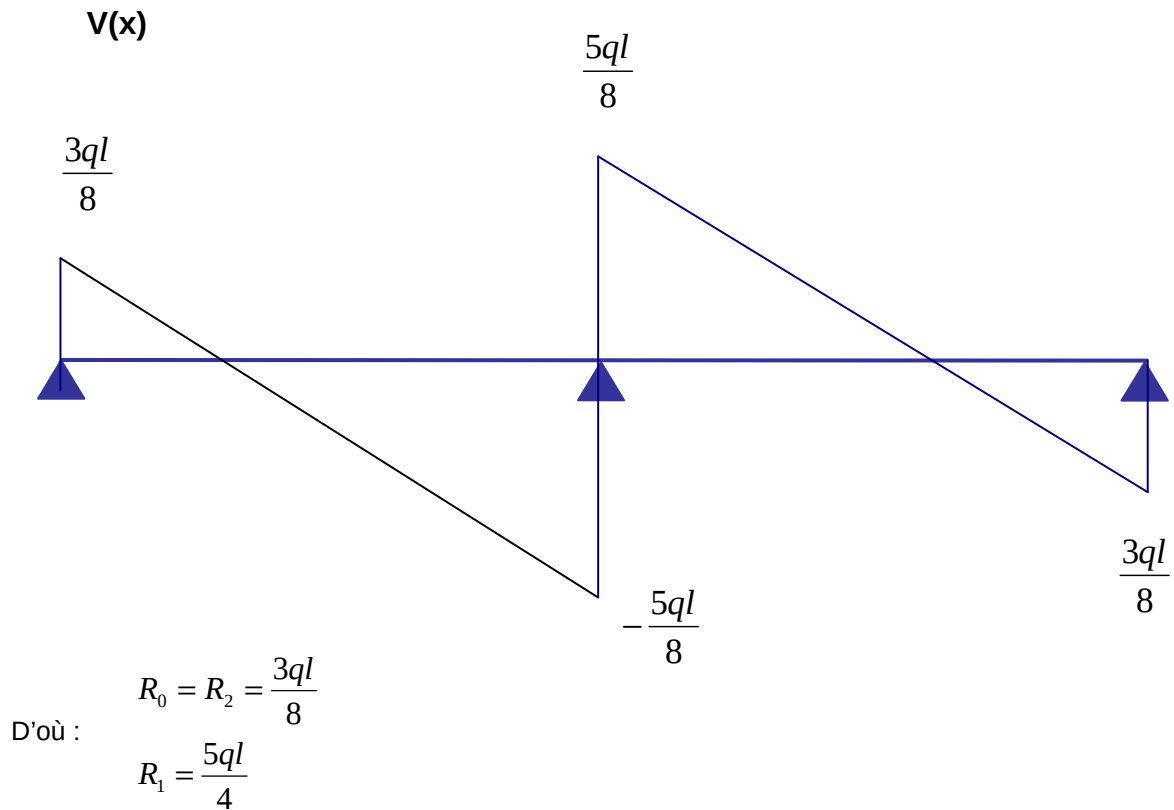
D'où

- Pour la travée 1 :

$$M(x) = \frac{qx(l-x)}{2} + M_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_1 \cdot \left(\frac{x}{l}\right) = \frac{qx(l-x)}{2} - \frac{ql}{8}x = \frac{3ql}{8}x - \frac{qx^2}{2}$$

$$V(x) = \frac{dM_{iso}(x)}{dx} = V_{isostatique}(x) + \frac{V_1 - V_0}{l} = \frac{3ql}{8} - qx \Rightarrow V(x) = 0 \text{ quand } x = \frac{3l}{8} \text{ et } M_{max} = \frac{9ql^2}{128}$$



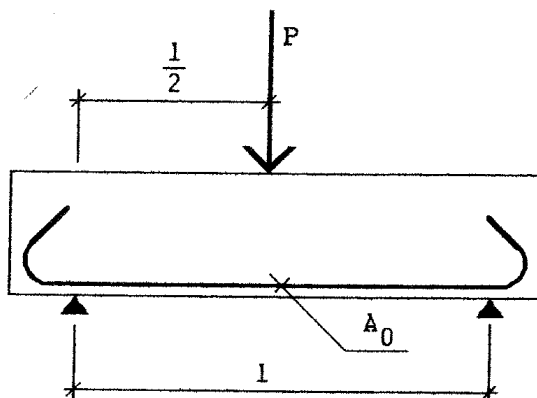


### 10.3. Phénomène d'adaptation du béton armé

On vient donc de voir que la continuité d'une poutre engendre des moments négatifs (d'après notre convention) sur appuis.

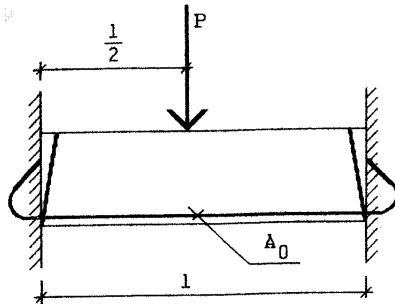
On doit donc se poser la question du comportement du béton armé vis-à-vis de cette continuité. Pour cela, on étudie 3 cas de figures pour détecter les modes de ruine et les sollicitations correspondantes.

1. Considérons une poutre isostatique sur deux appuis simples, avec une section d'armatures  $A_0$ , soumise à l'action d'une charge concentrée  $P$  appliquée à mi-portée. On augmente ensuite la charge  $P$  jusqu'à rupture de la poutre :



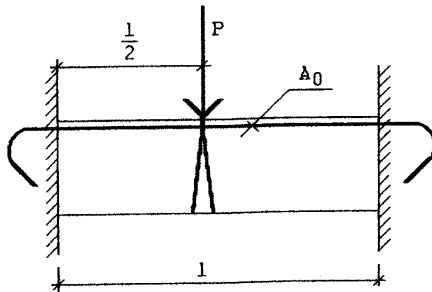
A la rupture, on a une charge  $P=P_u$  et un moment correspondant  $M_u = \frac{P_u \cdot l}{4}$

2. On étudie ensuite la même poutre, avec la même section d'armatures  $A_0$ , encastrées à ses deux extrémités. Lorsque l'on augmente la charge  $P$ , On a une fissuration des appuis, et on retrouve le comportement de la poutre isostatique étudiée précédemment :



A la rupture, on retrouve la même valeur de moment  $M_u = \frac{P_u \cdot L}{4}$

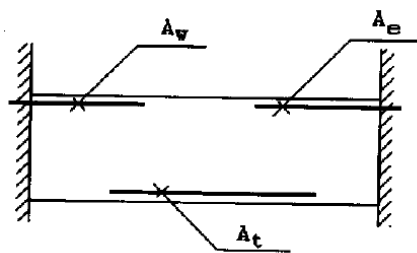
3. Si on prend la même poutre bi-encastée avec cette fois-ci une section d'armatures  $A_0$  placée en fibre supérieure, on a une fissuration au milieu de la poutre qui travaille ensuite comme deux consoles nez à nez.



A la rupture, on retrouve la même valeur de moment  $M_u = \frac{P_u \cdot L}{4}$

En comparant ces 3 essais, on se rend donc compte que la charge de rupture (identique dans les 3 cas) ne dépend que de la section d'aciers  $A_0$  correspondant au fonctionnement isostatique (sur deux appuis simples), indépendamment de la position de ces aciers.

D'une manière plus générale, on est assuré d'avoir une marge permettant un transfert partiel de moment des appuis vers la travée, ou réciproquement, sans que ce transfert compromette la sécurité vis à vis de la rupture en adoptant :



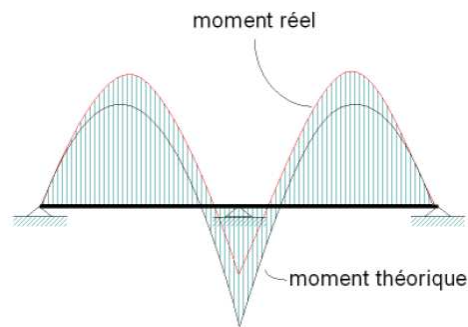
$$A_t + \frac{A_w + A_e}{2} \geq A_0$$

Si l'on multiplie cette inégalité par  $z_b \times \sigma_s$ , il vient puisque l'on a  $M = A \times z_b \times \sigma_s$

$$M_t + \frac{M_w + M_e}{2} \geq M_0$$

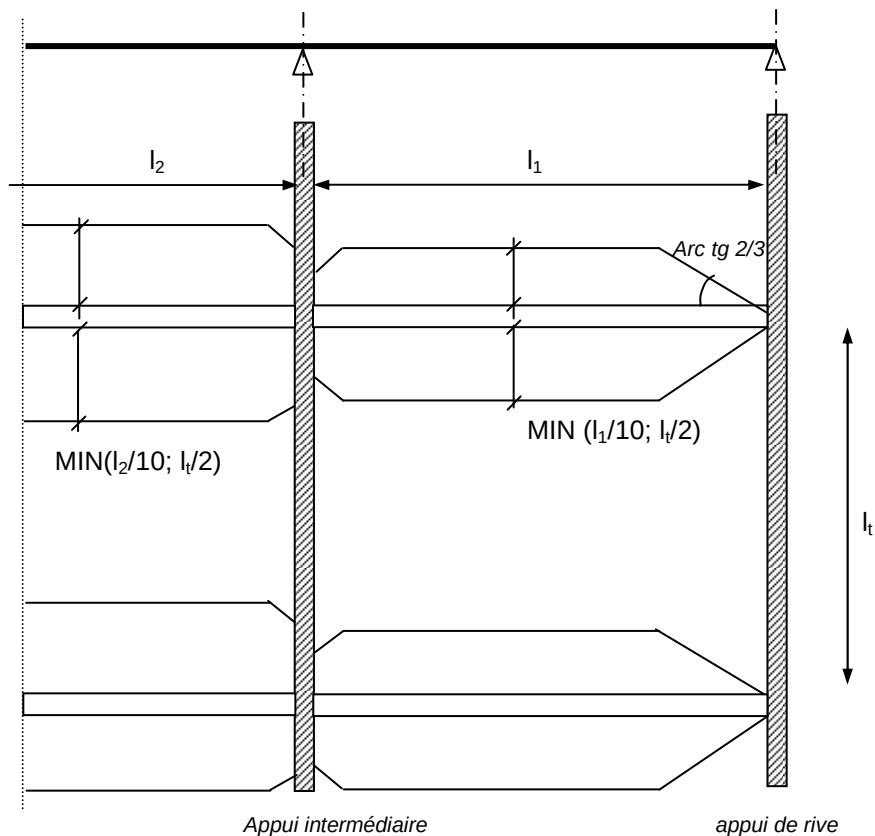
Ainsi, une poutre en béton armé se comporte comme elle a été calculée. La fissuration des sections les moins armées permet une distribution des moments qui diffère de la distribution théorique. C'est ce que l'on appelle le **PHENOMENE D'ADAPTATION DU BETON ARME**.

Par exemple, dans le cas d'une poutre continue à plusieurs travées, s'il y a fissuration sur appui (aciers en face supérieure), le moment réel repris par l'appui sera inférieur au moment théorique calculé par la méthode des 3 moments. Dans ce cas, la redistribution des efforts fait qu'il y aura une augmentation du moment en travée :



De plus, la méthode RDM se base sur un matériau homogène et sur l'hypothèse (dans le cas des sections en T) que la largeur de la table de compression est constante sur toute la longueur de la travée. En Béton Armé, on a des hypothèses quelque peu différentes :

- On est dans le cas d'un matériau hétérogène puisque l'inertie d'une poutre BA dépend de la section de béton et de la quantité et position des armatures.
- La largeur de la table de compression prise en compte dans les calculs varie le long de la poutre :
  - o En travée, on considère la totalité de la table qui est en partie supérieure (zone comprimée).
  - o Sur appui, on ne considère pas de table de compression car la fibre supérieure est tendue.
  - o Entre les deux, on a une variation de la largeur à considérer (voir schéma ci-dessous).





Pour toutes ces raisons, il est possible d'appliquer aux planchers en béton armé des méthodes de calcul différentes des méthodes de continuité théoriques et de limiter l'influence des charges aux travées voisines de celle que l'on étudie.

Attention, en ce qui concerne la fissuration :

- Sous l'action des charges variables, les éléments par les méthodes de la continuité théorique classique se comportent mieux et ont une meilleure tenue dans le temps que les éléments calculés par les méthodes empiriques.
- Ce phénomène est d'autant plus marqué que les charges variables surpassent davantage les charges permanentes.

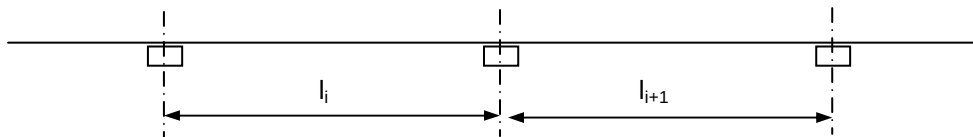
D'où les deux méthodes simplifiées de calcul des poutres continues de planchers, fonction de l'intensité des charges d'exploitation :

- La METHODE FORFAITAIRE (annexe E.1 du BAEL) pour les éléments supportant des charges d'exploitation modérées, décrites ci-après.
- La METHODE DE CAQUOT (annexe E.2 du BAEL) pour les éléments supportant des charges d'exploitation élevées décrite dans le chapitre suivant.

## 10.4. Portée à prendre en compte dans les calculs

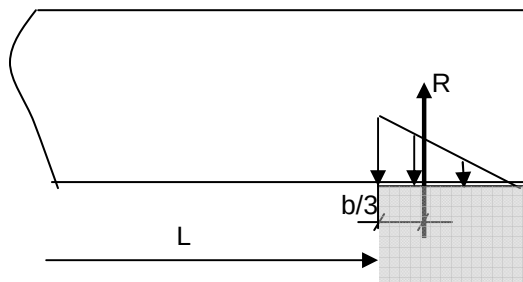
### 10.4.1. Poutres sur appareils d'appuis

$l_i$  = portée mesurée entre points d'application des résultantes des réactions d'appui (axes des appuis)



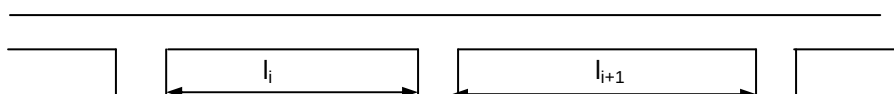
### 10.4.2. Poutres reposant sur un massif ou un mur en maçonnerie

$l = L + 2 \frac{b}{3}$  = portée mesurée entre points d'application des résultantes des réactions d'appui.



### 10.4.3. Autres cas (cas les plus courants dans le bâtiment)

$l$  = portée mesurée entre nus d'appui.



## 10.5. La Méthode forfaitaire

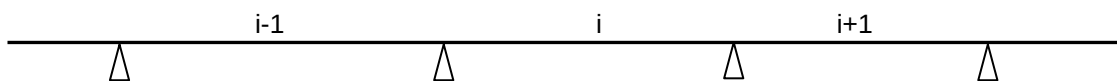
### 10.5.1. Domaine d'application

La méthode forfaitaire de calcul des planchers à charge d'exploitation modérée s'applique dans les cas où :

1. Les charges d'exploitation sont modérées c'est-à-dire où :  
 $q_B$  = somme des charges variables,  
 $g$  = somme des charges permanentes,

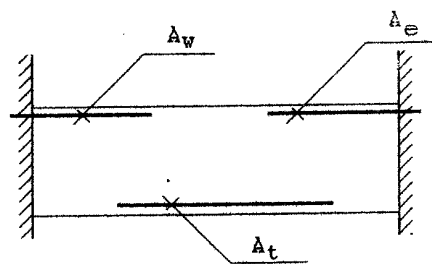
$$\text{vérifient : ou} \begin{cases} q_B \leq 2.g \\ q_B \leq 5 \text{KN} / \text{m}^2 \end{cases}$$

2. La fissuration ne compromet pas la tenue des revêtements ni celle des cloisons,
3. Les éléments de plancher ont une même inertie dans les différentes travées,
4. Les portées vérifient les rapports suivants :



$$0,8 \leq \frac{l_i}{l_{i-1}} \leq 1,25 \quad \text{et} \quad 0,8 \leq \frac{l_i}{l_{i+1}} \leq 1,25$$

### 10.5.2. Principe de la méthode – Adaptation



$$A_t + \frac{A_w + A_e}{2} \geq A_0$$

$$M_t + \frac{M_w + M_e}{2} \geq k \cdot M_0$$

Les essais des poutres en béton armé, détaillés précédemment, montrent qu'il est possible d'autoriser des transferts de moments entre les sections sur appuis et en travée (et réciproquement), en adoptant  $k > 1$  en fonction du rapport des charges variables et permanentes.

La méthode consiste donc à déterminer des moments sur appuis,  $M_w$  et  $M_e$ , et des moments en travée  $M_t$  grâce à des fractions fixées **forfaitairement** de la valeur maximale du moment fléchissant  $M_0$  dans la travée de référence (c'est-à-dire considérée isolée et isostatique).

### 10.5.3. Moments fléchissants

#### 1 – Condition à satisfaire

- $M_0$  = moment maximal dans la travée de référence (isostatique, soumise aux mêmes charges et de même portée que la travée étudiée),
- $M_w$  et  $M_e$  = valeurs absolues des moments respectivement sur l'appui de gauche et sur l'appui de droite de la travée continue,
- $M_t$  = moment maximal dans la travée continue,

$$\alpha = \frac{q_B}{g + q_B}$$

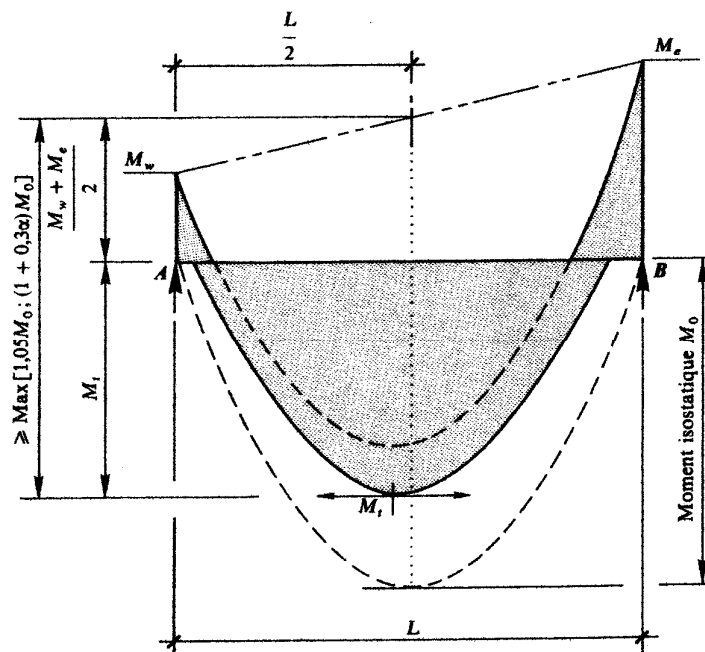
avec, pour la travée considérée :

- $q_B$  = somme des charges variables,
- $g$  = somme des charges permanentes,

on doit avoir :

$$M_t + \frac{M_w + M_e}{2} \geq \text{Max} \begin{cases} (1 + 0,3 \times \alpha) M_0 \\ 1,05 \times M_0 \end{cases}$$

Ce qui se traduit par le schéma suivant :

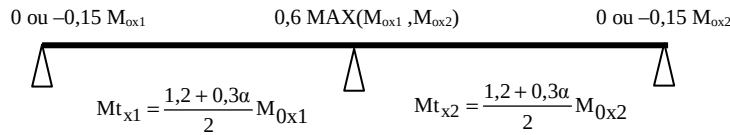


Tous les moments doivent être considérés en valeur absolue.

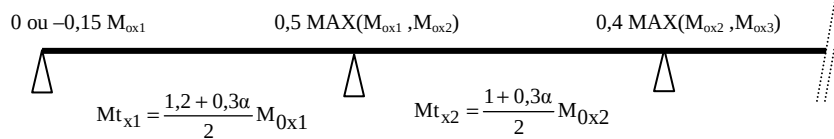
## 2 – Valeurs minimales des moments $M_t$ , $M_e$ et $M_w$

On doit respecter les valeurs minimales ci-dessous.

### ➤ Cas d'une poutre à deux travées



### ➤ Cas d'une poutre à plus de deux travées



### Remarque

Dans le cas où l'appui de rive est solidaire d'un poteau ou d'une poutre, il convient de disposer sur cet appui des aciers supérieures pour équilibrer un moment au moins égal à :

$$M_{al} = -0,15 M_{01} \text{ (ou } M_{0n})$$

## 3 – Mode opératoire

Si on se fixe le moment en travée (en respectant les valeurs minimales du paragraphe 2), on obtient les moments sur appuis en appliquant la condition à satisfaire pour les moments du paragraphe 1 :

- soit en se donnant un moment sur appui,
- soit en les prenant égaux.

Si on prend sur appuis  $M_e$  et  $M_w$  (en respectant les valeurs minimales du paragraphe 2), la condition à satisfaire pour les moments donne  $M_t$ . Le moment pris en compte sur l'appui de gauche d'une travée est égal à celui pris en compte sur l'appui de droite de la travée précédente.

## 4 – Arrêt des barres

Par la courbe enveloppe des moments.

Forfaitairement si  $q_B \leq g$  et si les charges sont uniformément réparties :

Avec :  $l_{ij} = \max[l_i; l_j]$ ,

- Travées de rive :

$$l' = \max\left[\frac{l_{12}}{4}; l_s\right] \text{ ou } l' = \max\left[\frac{l_{n-1,n}}{4}; l_s\right] \Rightarrow l' \text{ correspond à la longueur de prolongement des aciers de chapeaux au-delà du nu de l'appui (voir schéma suivant).}$$

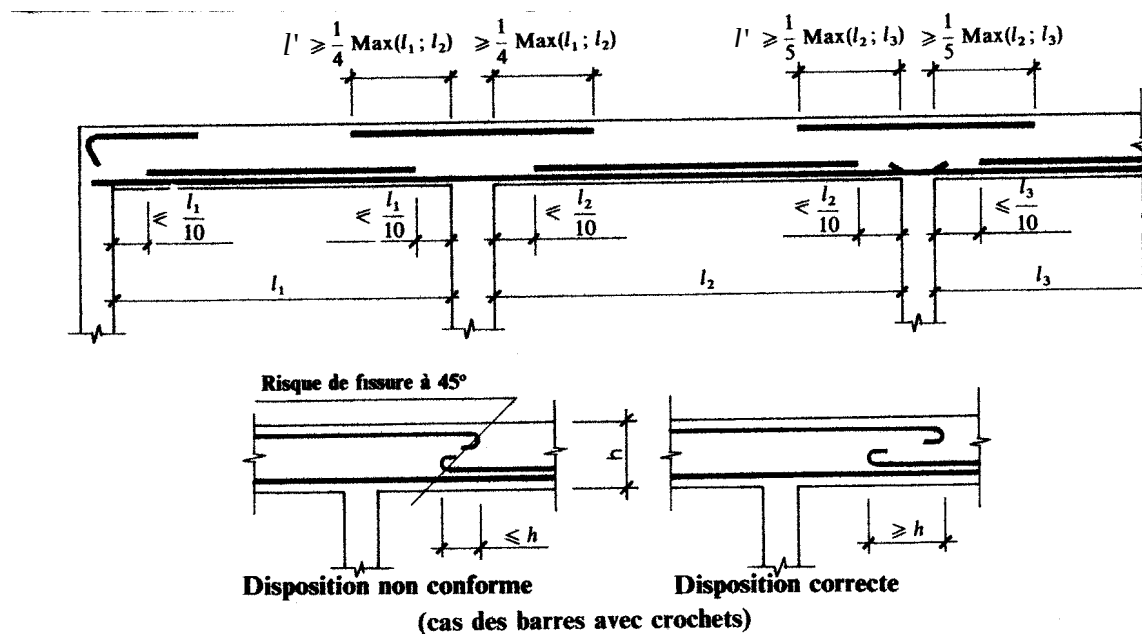
- Travées intermédiaires :

$$l' = \text{Max} \left[ \frac{l_{ij}}{5}; l_s \right]$$

- Dans toutes les travées, quelle qu'en soit la nature :

$$l'' = \text{Max} \left[ \frac{l'}{2}; l_s \right] \Rightarrow l'' \text{ correspond à la longueur d'un éventuel 2}^{\text{ème}} \text{ lit d'armatures pour les aciers sur appuis.}$$

$A_a, A_t$  = armatures calculées respectivement sur appui et en travée



#### 10.5.4. Efforts tranchants

##### 1 – Remarque préliminaire

Efforts tranchants dans une travée de rive :

$V_0$  = valeur absolue de l'effort tranchant sur appui 1 ou 2 dans la travée de référence (isostatique) :

$$\begin{matrix} M_2 < 0 \\ \Rightarrow \frac{M_2 - M_1}{l} < 0 \Rightarrow \\ M_1 = 0 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} V_1 = V_0 + \frac{M_2 - M_1}{l} < V_0 \\ V_2 = -V_0 + \frac{M_2 - M_1}{l} < -V_0 \\ \Rightarrow |V_2| > |V_0| \end{array} \right.$$

Donc l'effort tranchant réel est :

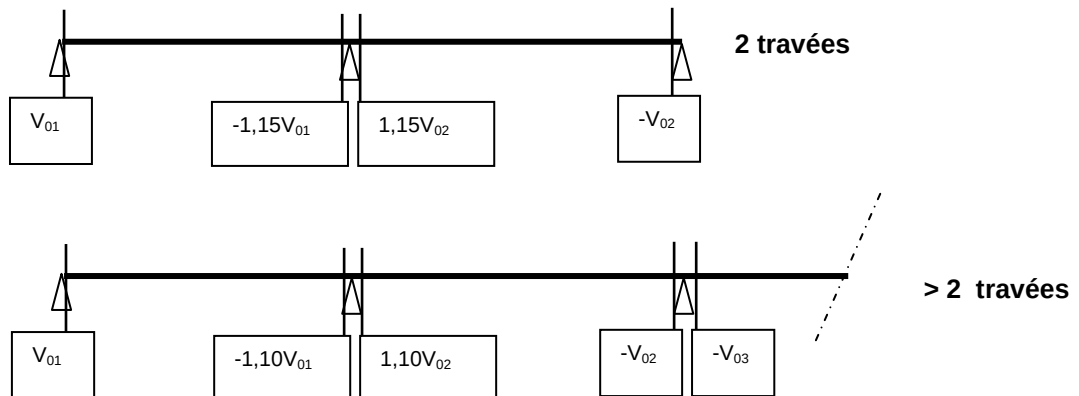
- Supérieur en valeur absolue à l'effort tranchant isostatique sur l'appui continu dans la travée de rive,
- Au plus égal à  $V_0$  ailleurs.

## 2 – Calcul des efforts tranchants

Calculs en faisant abstraction de la continuité.

Sauf sur l'appui voisin de rive où :

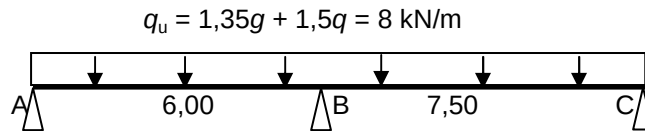
- Soit on tient compte des moments de continuité évalués,
- Soit on majore forfaitairement les efforts tranchants de la poutre de référence :
  - o de 15 % pour les poutres à deux travées,
  - o de 10 % pour les poutres à plus de deux travées.



## 10.6. Exercices de cours

### 10.6.1. Exercice 1 : Poutre continue à deux travées inégales

Calculer les moments fléchissants sur appuis et travées selon la méthode forfaitaire :



Rapport  $\frac{l_1}{l_2} \geq 0,8$  ou  $\frac{l_2}{l_1} \leq 1,25 \rightarrow$  la méthode forfaitaire est valide

**Moments isostatiques :**  $M_0 = \frac{q_u \cdot l_i^2}{8}$

- Travée 1 :  $M_{01} = 36,00 \text{ kN.m}$
- Travée 2 :  $M_{02} = 56,25 \text{ kN.m}$

**Moment sur appui intermédiaire :**  $[M_B] \geq \text{Max}\{0,60M_{01}; 0,60M_{02}\},$

- $M_B \geq 33,75 \text{ kN.m}.$

**Moment sur appui de rive :** on considère  $M_A = M_C = 0$

**Moment en travée :**

Il faut pour chaque travée satisfaire les inégalités suivantes :

- $M_t + \frac{M_B}{2} \geq \text{MAX}(1,05M_0; (1 + 0,3\alpha)M_0)$

On a  $\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{MAX}\{1,05; 1 + 0,3\alpha\} = 1,10.$

Donc  $M_t + \frac{M_B}{2} \geq 1,10.M_0$

Ce qui donne pour chaque travée :

- Travée 1 :  $M_{t1} \geq 1,10.M_0 - \frac{M_B}{2} = 1,10 * 36,00 - \frac{33,75}{2} = 22,72 \text{ kN.m}$
- Travée 2 :  $M_{t2} \geq 1,10.M_0 - \frac{M_B}{2} = 1,10 * 56,25 - \frac{33,75}{2} = 45,00 \text{ kN.m}$

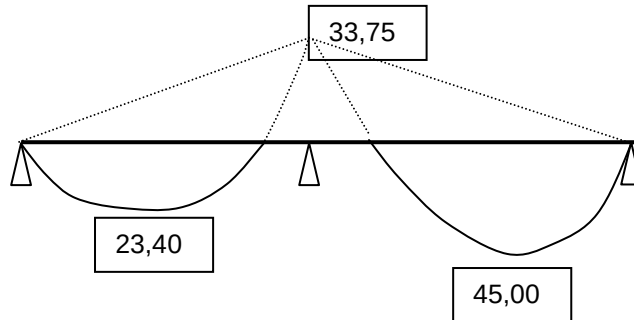
On doit également satisfaire :  $M_t \geq \frac{1,2 + 0,3\alpha}{2} \times M_0$

- Soit pour la travée 1 :  $M_{t1} \geq 0,65.M_{01} = 23,40 \text{ kNm}$
- Et pour la travée 2 :  $M_{t2} \geq 0,65.M_{02} = 36,56 \text{ kNm}$

On prend les valeurs maximums :

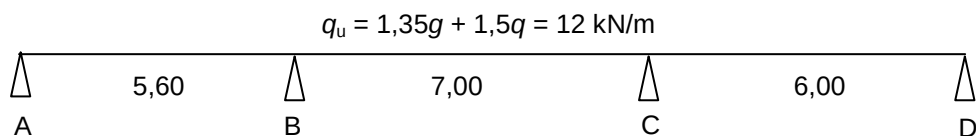
- Pour la travée 1  $M_{t1} = \text{MAX} (22,72 ; 23,40) = 23,40 \text{ kNm}$
- Pour la travée 2  $M_{t2} = \text{MAX} (45,00 ; 36,56) = 45,00 \text{ kNm}$

On a donc le diagramme suivant :



### 10.6.2. Exercice 2 : Poutre continue à trois travées inégales :

Déterminer les moments de flexion sur appuis et en travées par la méthode forfaitaire.



**Moments isostatiques :**  $M_0 = \frac{q_u \cdot l_i^2}{8}$

- Travée 1 :  $M_{01} = 47,04 \text{ kN.m}$
- Travée 2 :  $M_{02} = 73,50 \text{ kN.m}$
- Travée 3 :  $M_{03} = 54,00 \text{ kN.m}$

**Moment sur appui intermédiaire :**

- $[M_B] \geq \text{Max}\{0,50M_{01}; 0,50M_{02}\} \rightarrow M_B \geq 36,75 \text{ kNm}$
- $[M_C] \geq \text{Max}\{0,50M_{02}; 0,50M_{03}\} \rightarrow M_C = M_B \geq 36,75 \text{ kNm}$

**Moment sur appui de rive :** on considère  $M_A = M_D = 0$

**Moment en travée :**

- $\alpha = \frac{Q_b}{G + Q_b} = \frac{1}{2}$
- $1 + 0,3\alpha = 1,15$
- $\frac{1 + 0,3\alpha}{2} = 0,575$
- $\frac{1,2 + 0,3\alpha}{2} = 0,675$



On a  $1,05M_0 \langle (1 + 0,3\alpha)M_0 = 1,15M_0$ , les valeurs des moments à retenir peuvent donc se déduire du tableau suivant :

| Travée AB                                                                                                       | Travée BC                                      | Travée CD                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| $M_{t1} + \frac{M_B}{2} \geq 1,15M_{01}$ $M_{t1} \geq 1,15 \times 47,04 - \frac{36,75}{2} = 35,72 \text{ KN.m}$ | $M_{t2} + \frac{M_B + M_C}{2} \geq 1,15M_{02}$ | $M_{t3} + \frac{M_C}{2} \geq 1,15M_{03}$         |
| $M_{t1} \geq \frac{(1,2 + 0,3\alpha)}{2} M_{01} = 31,75 \text{ KN.m}$                                           | $M_{t2} \geq \frac{(1 + 0,3\alpha)}{2} M_{02}$ | $M_{t3} \geq \frac{(1,2 + 0,3\alpha)}{2} M_{03}$ |
| On retient $M_{t1} \geq 35,72 \text{ kNm}$                                                                      | On retient $M_{t2} \geq 47,775 \text{ kNm}$    | On retient $M_{t3} \geq 43,725 \text{ kNm}$      |