

Flexion simple V

1. DEFINITION - GENERALITES

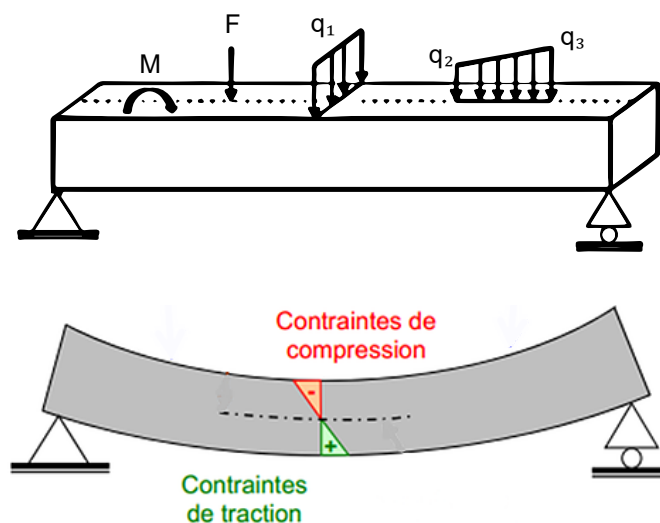
Un élément est soumis à la flexion simple si les sollicitations se réduisent à un moment fléchissant M_z et un effort tranchant V_y . Si l'effort normal $N_x \neq 0$, alors on parle de flexion composée.

En béton armé on distingue l'action du moment fléchissant qui conduit au dimensionnement des aciers longitudinaux de l'action de l'effort tranchant qui concerne le dimensionnement des aciers transversaux (cadres, épingles ou étriers). Ces deux calculs sont menés séparément, et dans ce chapitre on se limitera aux calculs relatifs au moment fléchissant.

Une poutre soumise à la flexion simple s'incurve ; la partie inférieure de la poutre s'allonge et sa partie supérieure se raccourcit. La partie inférieure est donc soumise à une traction et la partie supérieure est soumise à une compression.

En pratique, plus précisément dans le cas des bâtiments courants, on peut citer quelques éléments de la structure qui travaillent en flexion simple comme :

- Les planchers (poutres, poutrelles, dalles pleines) ;
- Les balcons en console ;
- Les escaliers.



Poutre soumise à la flexion simple

2.1. Prédimensionnement de la section de la poutre

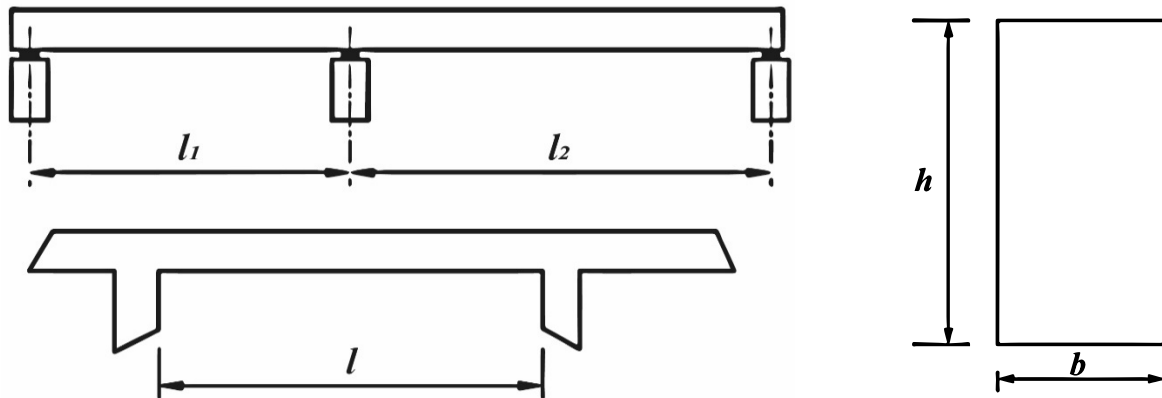
Au stade du prédimensionnement, on peut choisir les dimensions de la section de la poutre [largeur (b) × hauteur (h)] comme suit :

Hauteur h $\frac{l}{15} \leq h \leq \frac{l}{10}$

Avec l : longueur de la poutre mesurée entre appuis

Largeur b $\frac{h}{5} \leq b \leq \frac{h}{2}$

Avec $b \geq 15$ cm Pour des raisons de bétonnage correct



2. CALCUL DES SECTIONS RECTANGULAIRES A L'ELU EN FLEXION SIMPLE

On s'intéresse dans ce qui suit au calcul des poutres à sections rectangulaires, **sans acier comprimé** sollicitées en flexion simple à l'ELU, plus précisément à l'ELUR (état limite ultime de résistance des matériaux).

2.1. Hypothèses de calcul

- Les sections droites planes restent planes après déformations ;
- Il n'y a pas de glissement entre l'acier et le béton ;
- La résistance à la traction du béton est négligée ;
- La contrainte ultime de l'acier est $\sigma_s = f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s}$ et la résistance ultime du béton

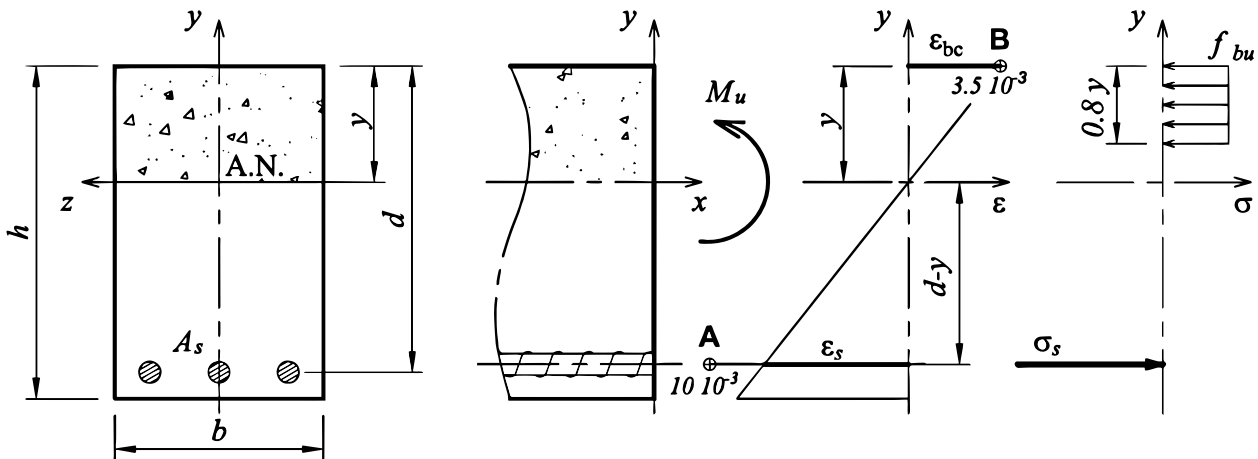
$$\text{est } \sigma_{bc} = f_{bu} = \frac{0,85 f_{cj}}{\theta \gamma_b}$$

- Le module d'élasticité de l'acier est : $E_s = 200000$ MPa ;
- La section des aciers est concentrée en son centre de gravité ;
- La section des aciers n'est pas déduite de celle du béton.

2.2. Notations

Pour les calculs aux ELU, on utilise les notations suivantes :

- b et h sont la largeur et la hauteur de la section de béton ;
- A_s est la section d'acier, dont le centre de gravité est positionné à d de la fibre la plus comprimée de la section de béton ;
- y est la position de l'axe neutre par rapport à la fibre la plus comprimée de la section de béton ;
- σ_s est la valeur de la contrainte ultime de calcul des aciers, limitée à f_{su} ;
- σ_{bc} est la résistance ultime de calcul du béton, limitée à f_{bu} ;
- ε_{bc} représente la déformation du béton ;
- ε_s représente la déformation des aciers ;



2.3. Déformations limites ultimes des matériaux acier-béton

L'état limite ultime peut être atteint soit :

- Par écrasement du béton en considérant une déformation du béton $\varepsilon_{bc} = 3,5\text{‰}$ (fig.1).
- Par écoulement plastique des aciers en considérant une déformation de l'acier $\varepsilon_s = 10\text{‰}$ (fig.2).

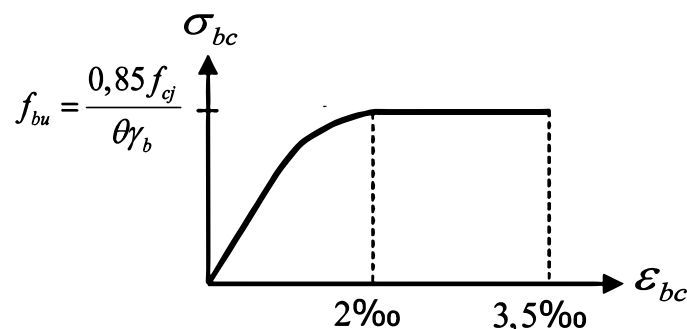


fig.1 : Diagramme de calcul du béton à l'ELU

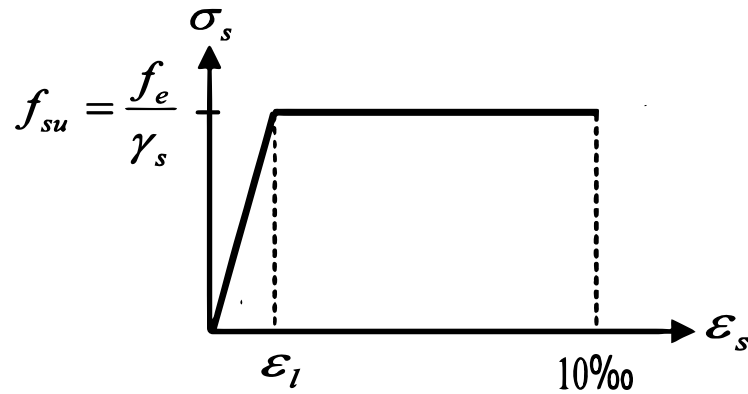


fig.2 : Diagramme de calcul de l'acier à l'ELU

2.3.1. Droites de déformation - Pivots

Pour les calculs à l'ELU, on suppose qu'un point de la droite de déformation dans la section est fixé. Ce point s'appelle le **pivot** (fig.3), et il correspond soit :

- À la déformation limite (maximale) de traction dans les aciers $\varepsilon_s = 10\text{‰}$, c'est le Pivot A ;
- À la déformation limite (maximale) en compression du béton $\varepsilon_{bc} = 3,5\text{‰}$, c'est le Pivot B ;
- À une déformation en compression uniquement du béton ($2\text{‰} \leq \varepsilon_{bc} \leq 3,5\text{‰}$), c'est le Pivot C.

Remarque :

Pour un calcul en flexion simple, on aura une section qui sera en pivot A ou en pivot B.

Le bon fonctionnement de la section de béton armé se situe aux alentours de la droite AB, car les deux matériaux acier et béton travaillent au mieux.

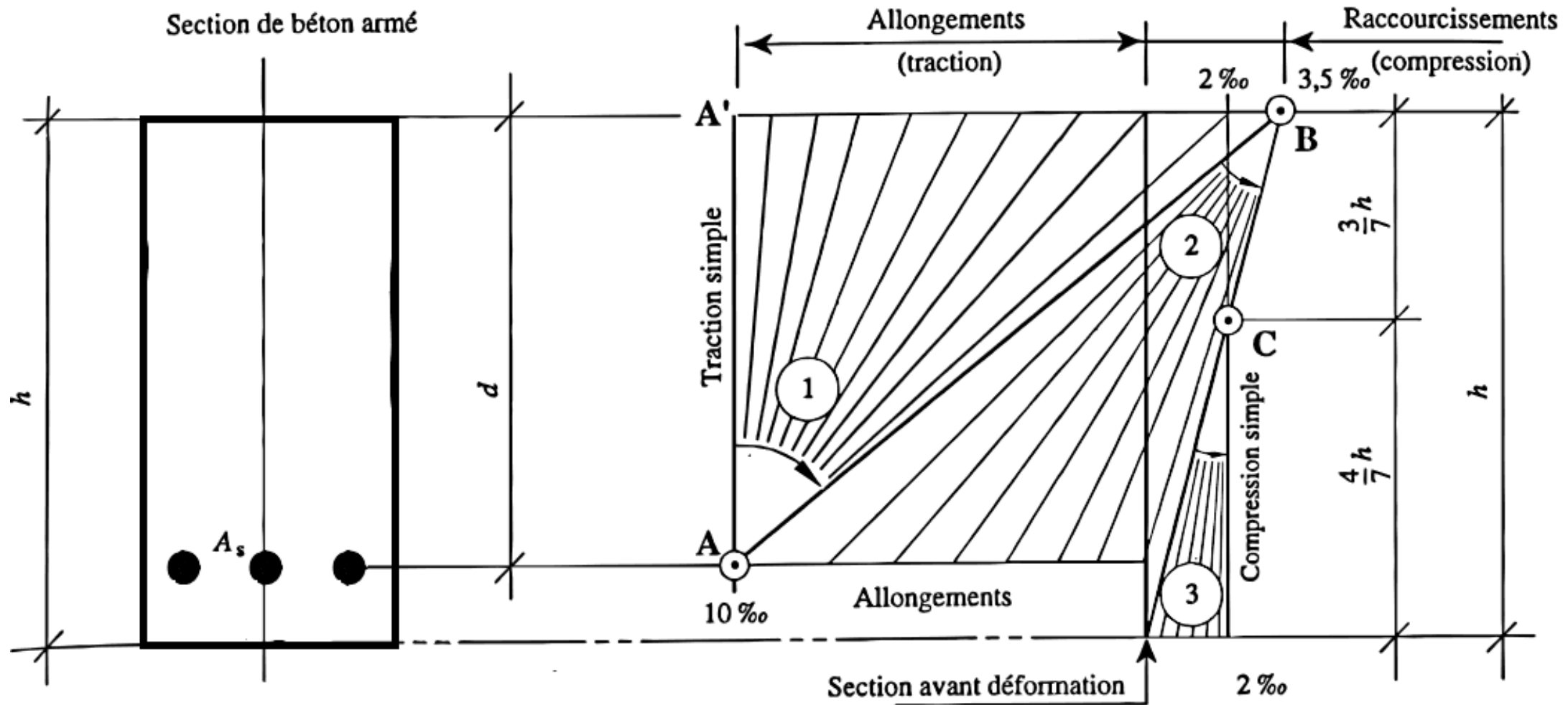


fig.3 : Définition des différentes droites de déformation en flexion simple à l'ELU.

Pivot A – domaine (1)Déformations

$$\begin{cases} \varepsilon_s = 10 \text{ ‰} \\ 0 \leq \varepsilon_{bc} \leq 3,5 \text{ ‰} \end{cases}$$

L'ELUR est atteint par les armatures.

Modes de sollicitations et type d'éléments concernés

- Traction simple (tirant)*
- Section entièrement tendue en flexion composée (tirant)*
- Section partiellement comprimée en flexion simple ou composée (poutre ou tirant)*

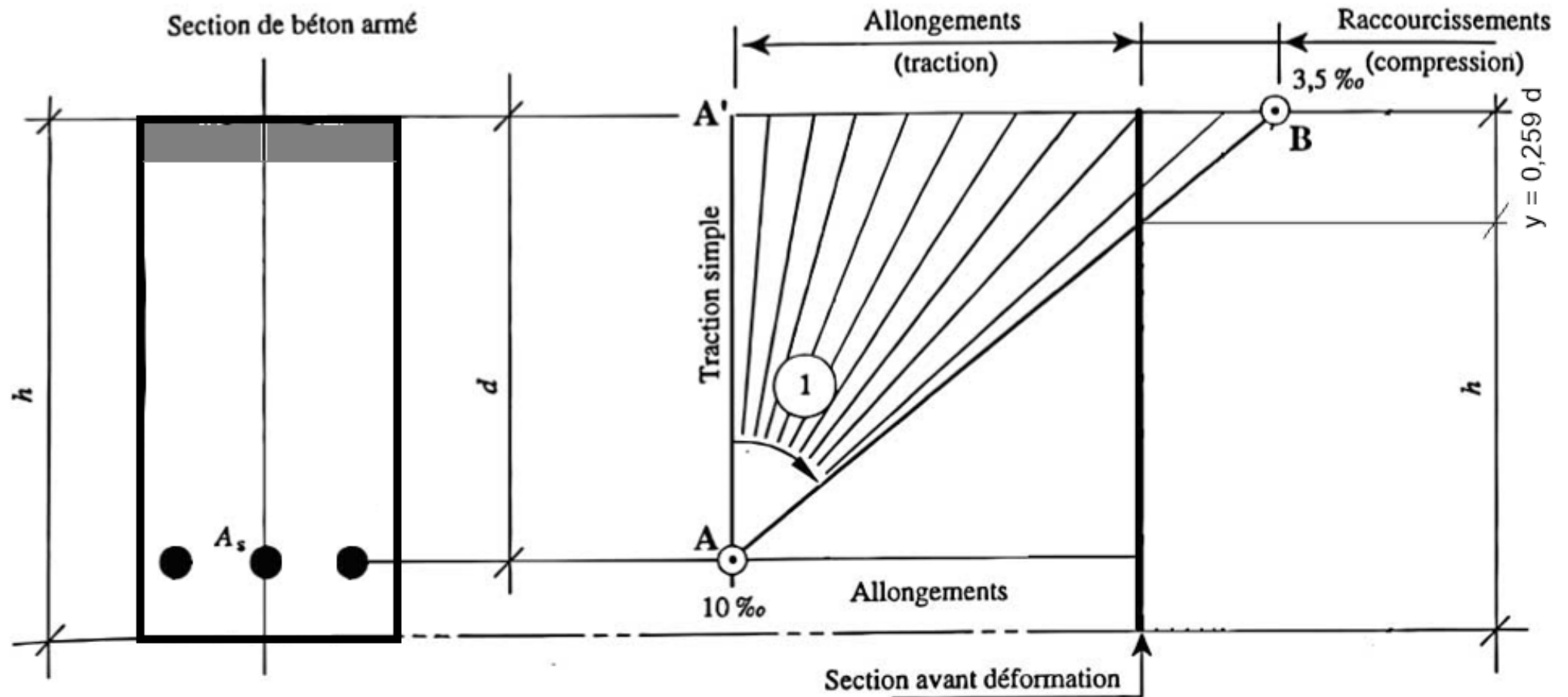


fig.3 (a) : Pivot A

Pivot B – domaine (2)Déformations

$$\begin{cases} \varepsilon_{bc} = 3,5 \text{ ‰} \\ \varepsilon_s \leq 10 \text{ ‰} \end{cases}$$

Modes de sollicitations et type d'éléments concernés

L'ELUR est atteint par le béton en flexion est la section est partiellement comprimé en flexion simple ou en flexion composée.

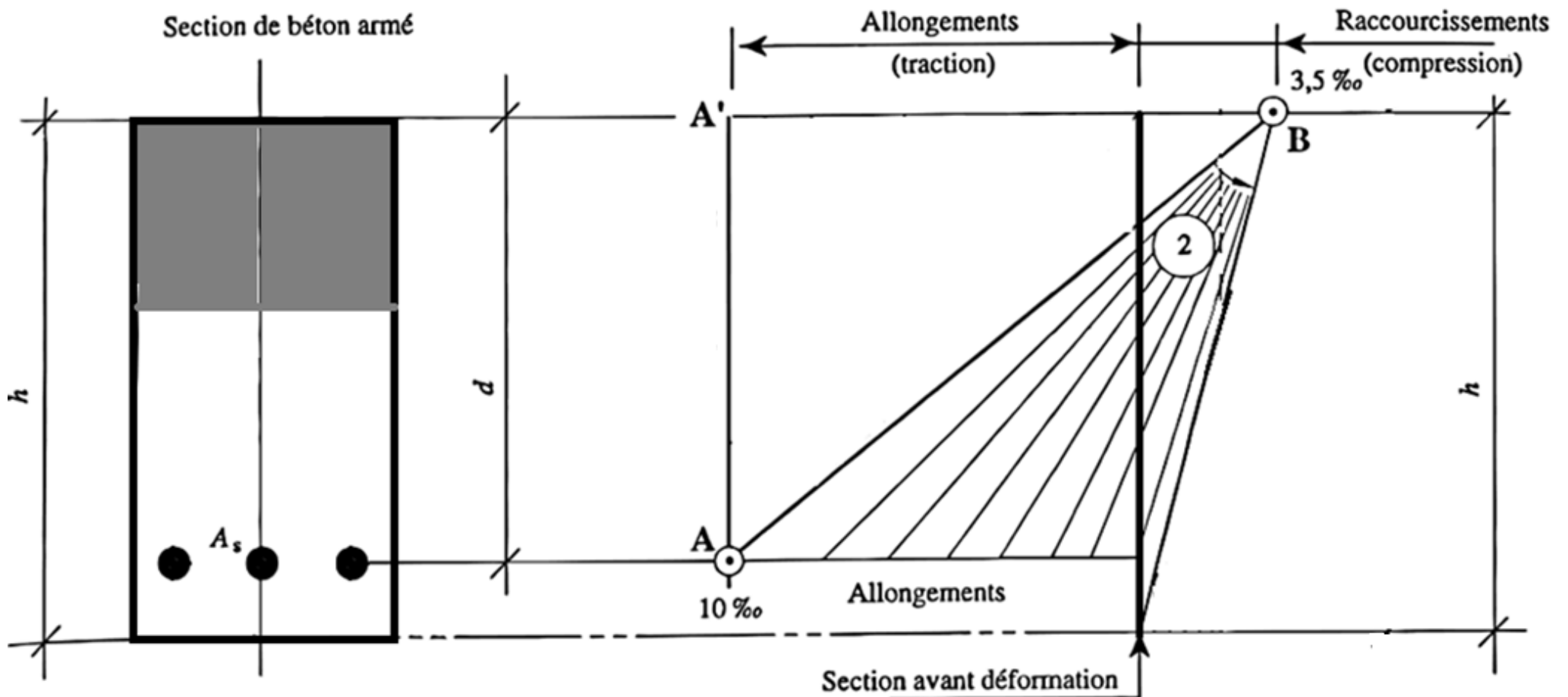


fig.3 (b) : Pivot B

Pivot C – domaine (3)

La déformation du béton est telle que : $\varepsilon_{bc} \leq 2 \text{ ‰}$ sur la fibre la moins comprimée et $2 \text{ ‰} \leq \varepsilon_{bc} \leq 3,5 \text{ ‰}$ sur la fibre la plus comprimée (fig.3c).

L'ELUR est atteint par compression du béton et la section est entièrement comprimée.

C'est le cas de la compression simple ou de la flexion composée avec section entièrement comprimée.

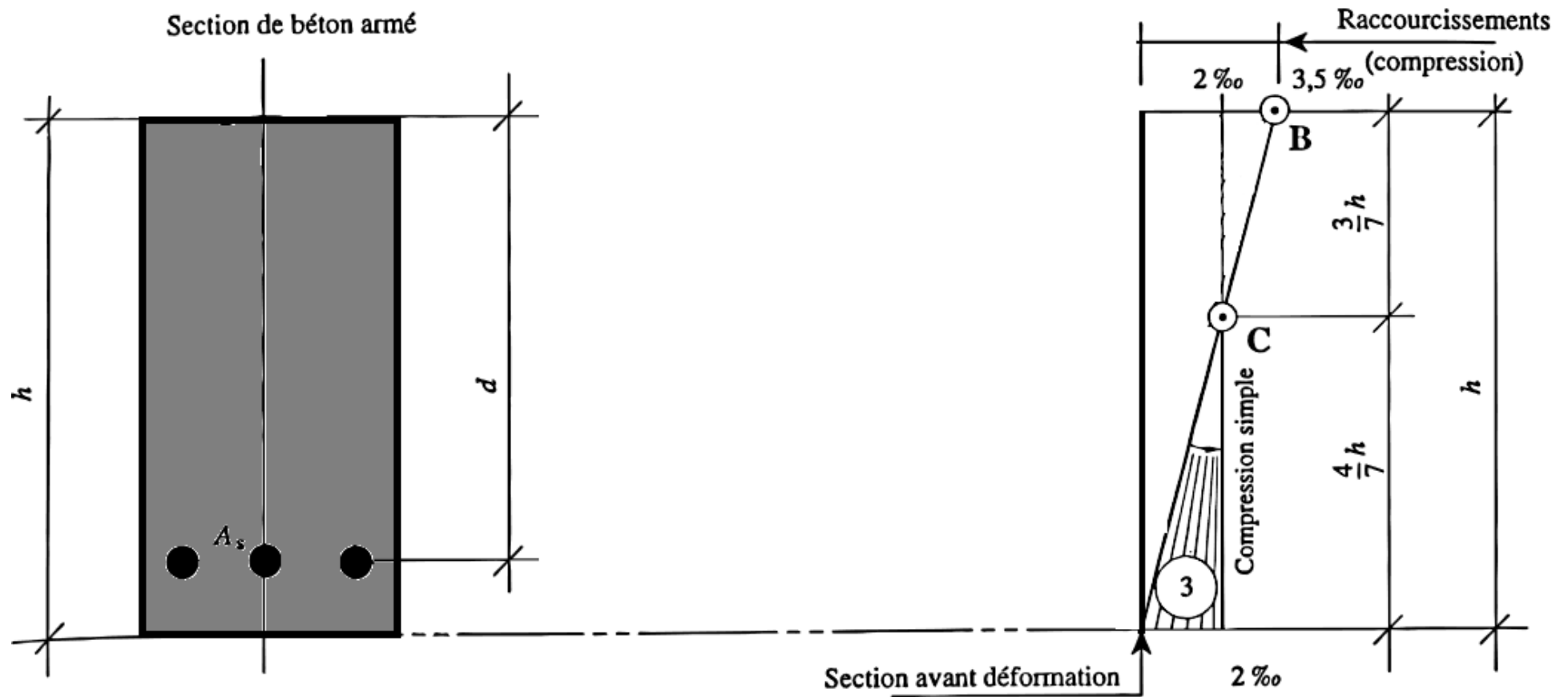


fig.3 (c) : Pivot C

2.4. Etude des cas limites

On se propose dans ce qui suit de déterminer la position de l'axe neutre (y) en fonction des différentes déformations limites ultimes de l'acier et du béton.

2.4.1. Etat limite ultime aux pivots A et B

On considère dans ce cas que le béton atteint sa déformation ultime de 3,5 ‰ et que l'acier atteint sa déformation ultime de 10 ‰ et on s'intéresse à la position de l'axe neutre (y) donnée à partir de la fibre la plus comprimée du béton (fig.4).

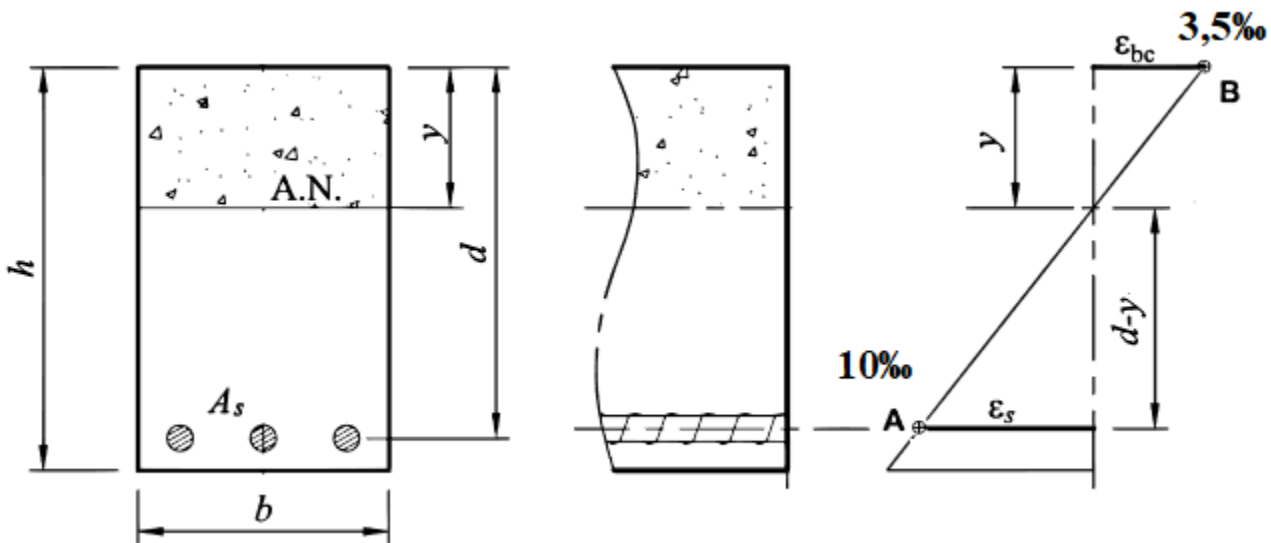


fig.4 : Etat limites aux pivots A et B

En considérant les triangles semblables du diagramme des déformations on obtient :

$$\frac{\varepsilon_{bc}}{y} = \frac{\varepsilon_s + \varepsilon_{bc}}{d} \Rightarrow y = \frac{\varepsilon_{bc}}{\varepsilon_s + \varepsilon_{bc}} d$$

$$y = \frac{3,5}{3,5 + 10} d$$

Soit $y = 0,259 d$ en posant $\alpha = 0,259$ on aura $y = \alpha d$

On en déduit donc la position de l'axe neutre $y = 0,259 d$ (soit $\alpha = 0,259$).

Les déformations de l'acier et du béton sont à leurs limites ultimes (pivots A ou B).

Dans ce cas, le travail des matériaux acier-béton est optimisé.

2.4.2. Etat limite ultime au pivot B avec une déformation ε_s à la limite élastique ($\varepsilon_s = \varepsilon_l$)

On considère dans ce cas que le béton atteint sa déformation ultime de 3,5 ‰ et que l'acier travaille à sa limite élastique ε_l . Le diagramme contrainte déformation de l'acier (fig.2) montre que la déformation élastique limite ε_l est atteinte pour une

$$\text{contrainte } \sigma_s = f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

On peut écrire : $\sigma_s = E_s \varepsilon_l$ avec $E_s = 200000 \text{ MPa}$ (module d'élasticité de l'acier).

Nuance d'acier	FeE400	FeE500
$\varepsilon_l = \frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{f_e / \gamma_s}{E_s}$	$\varepsilon_l = 1,74 \text{ ‰}$	$\varepsilon_l = 2,17 \text{ ‰}$

La position de l'axe neutre (fig.5) est donnée par :

$$y = \frac{3,5}{3,5 + 1,74} d = 0,668d$$

Avec $\alpha_L = 0,668$ (pour des aciers de nuance FeE400)

$$\text{et } y = \frac{3,5}{3,5 + 2,17} d = 0,617d$$

Avec $\alpha_L = 0,617$ (pour des aciers de nuance FeE500)

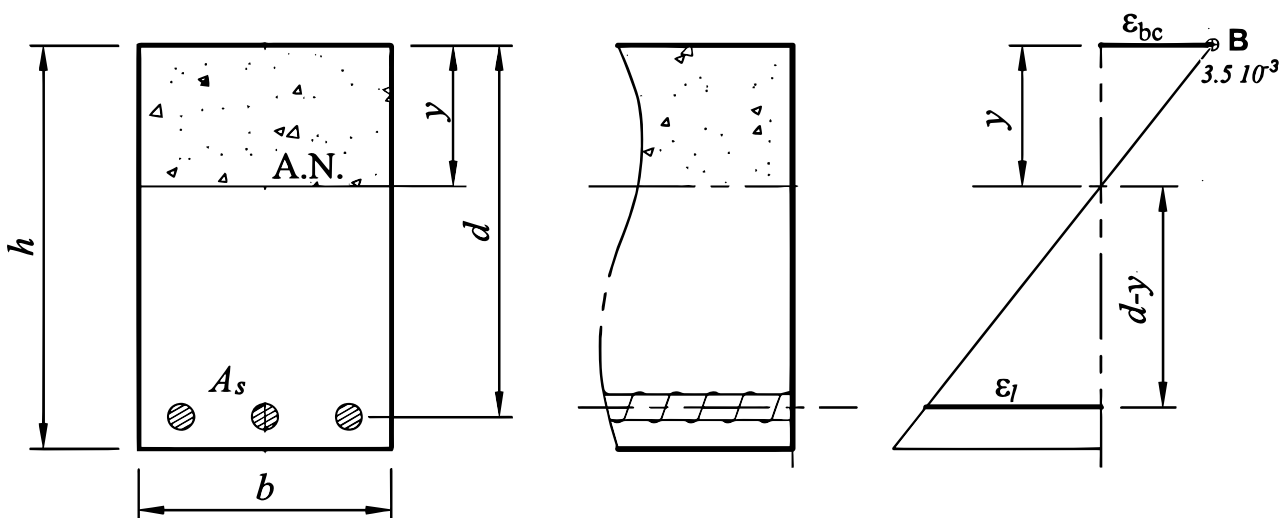


fig.5 : Diagramme des déformations au pivot B avec $\varepsilon_s = \varepsilon_l$

La connaissance de la valeur de α pour une déformation ε_t est très importante car au-delà de cette valeur ($\alpha > 0,617$ ou $\alpha > 0,668$) l'acier n'atteint même pas sa limite élastique, travaille insuffisamment tout en ayant une grande section.

2.4.3. Etat limite ultime au pivot A avec une déformation du béton de 2 ‰

Une autre valeur de α est aussi importante, celle correspondant à une déformation de l'acier de 10 ‰ et une déformation du béton de 2 ‰ (fig.6).

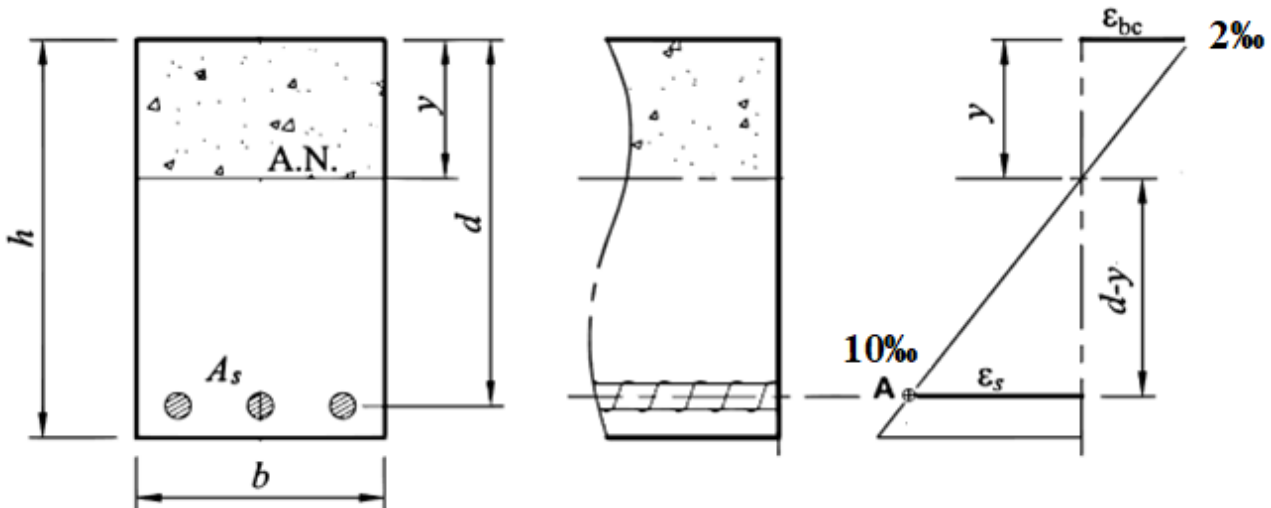


fig.6 : Diagramme des déformations au pivot A avec $\varepsilon_{bc} = 2\text{‰}$

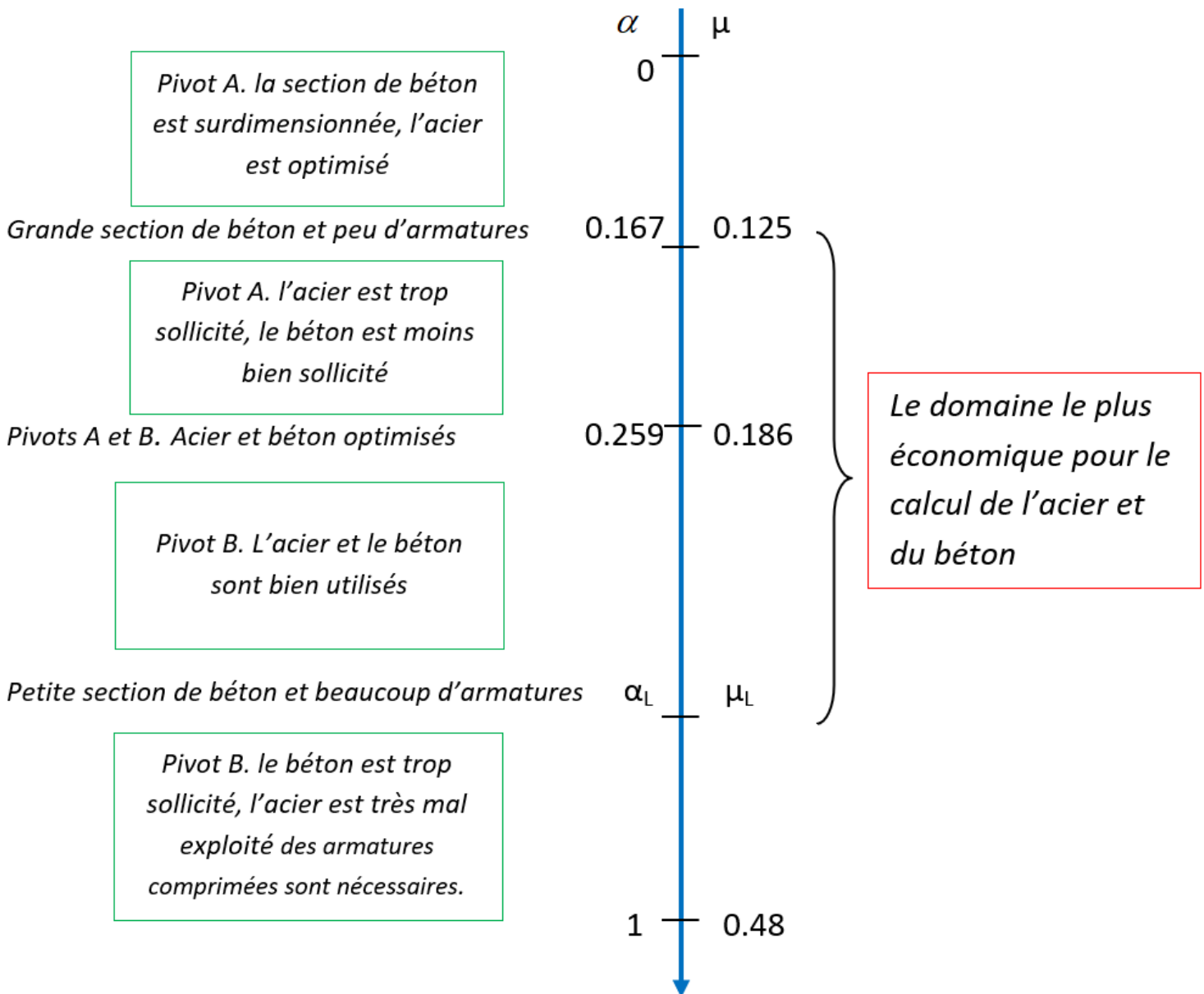
Un calcul similaire au précédent nous donne :

$$y = \frac{2}{2+10}d = 0,167d \quad \text{soit} \quad \boxed{\alpha = 0,167}$$

Une valeur α en dessous de 0,167 ($\alpha < 0,167$) le béton travaille mal et la section de béton est considérée comme surdimensionnée.

2.4.4. Conclusion

La valeur de α une fois calculée, comparée aux valeurs limites établies précédemment, nous renseigne sur les modes de déformations de l'acier et du béton et nous permet ainsi d'optimiser leurs sections. Les résultats obtenus en fonction de α et μ sont résumés comme suit (fig.7) :

fig.7 : Valeurs de α et mode d'état limite

Nuance acier	FeE400	FeE500
α_l	0,668	0,617
μ_l	0,392	0,372

2.5. Calcul des sections rectangulaires à l'ELU (méthode simplifiée)

Soit une section rectangulaire de largeur b et de hauteur h , sollicitée par un moment de flexion M_u (fig.8).

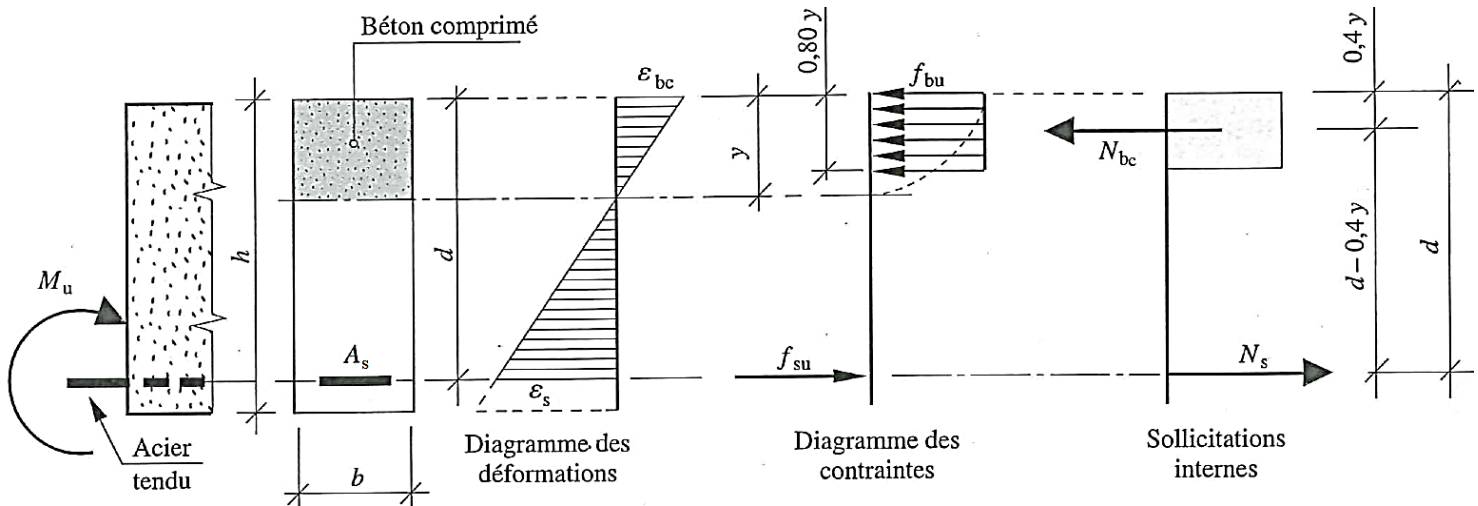


fig.8 : Déformations, contraintes et sollicitations internes

f_{bu} : contrainte ultime en compression du béton ($f_{bu} = 0,85 f_{cj} / \gamma_b$) ;

$\sigma_s = f_{su}$: contrainte ultime des aciers en traction ($\sigma_s = f_{su} = f_e / \gamma_s$) ;

N_{bc} : résultante des contraintes du béton comprimé ;

N_s : résultante des contraintes des aciers tendus ;

Z : bras de levier.

Les résultantes des contraintes au niveau des aciers (N_s) et du béton comprimé (N_{bc}) sont données par les figures 8 et 9 :

$$N_s = A_s \sigma_s = A_s f_e / \gamma_s$$

$$N_{bc} = 0,8 y b f_{bu} = 0,8 \alpha d b f_{bu}$$

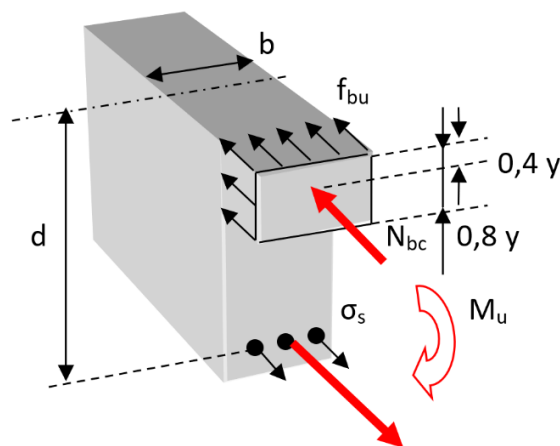


fig.9 : Répartition des contraintes

Le bras de levier Z est donné par $Z = d - 0,4 y = d - 0,4 \alpha d$

Soit $Z = (1 - 0,4 \alpha) d$

En écrivant les équations d'équilibre des moments on obtient :

$$N_{bc} Z = M_u \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$N_s Z = M_u \quad \dots\dots\dots(2)$$

L'équation (1) nous donne :

$$0,8 \alpha d b f_{bu} (1 - 0,4 \alpha) d = M_u$$

$$0,8 \alpha (1 - 0,4 \alpha) = M_u / b d^2 f_{bu}$$

On aura $0,8 \alpha (1 - 0,4 \alpha) = \mu$ avec $\mu = M_u / b d^2 f_{bu}$ (Moment réduit)

$$- 0,32 \alpha^2 + 0,8 \alpha = \mu$$

$$0,32 \alpha^2 - 0,8 \alpha + \mu = 0$$

Soit $0,4 \alpha^2 - \alpha + (\mu/0,8) = 0$

Equation du second degré d'inconnue α .

$$\Delta = 1 - 4 (0,4) \mu / 0,8$$

$$\Delta = 1 - 2 \mu$$

D'où

$$\alpha = (1 - \sqrt{1 - 2\mu}) / 0,8$$

$$\alpha = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) \quad \text{et} \quad \mu = 0,8\alpha(1 - 0,4\alpha)$$

Une fois α calculée, en utilisant la figure 5 on peut déterminer dans quel mode d'état limite travaille notre section et optimiser ainsi les sections de l'acier et du béton. D'autre part, l'équation (2) devient :

$$A_s \sigma_s (1 - 0,4\alpha) d = M_u \Rightarrow A_s = \frac{M_u}{Z \sigma_s}$$

Pour $\alpha = 0,259$ soit $\mu = 0,186$ l'acier et le béton sont à leurs limites ultimes (pivots B ou A), on considère donc que pour toute valeur de $\alpha > \mathbf{0,259}$ soit $\mu > \mathbf{0,186}$, l'acier et le béton sont bien utilisés mais cette valeur ne doit pas dépasser celle de α limite qui correspond à $\alpha_L = \mathbf{0,668}$ soit $\mu_L = \mathbf{0,392}$ pour les FeE400 ou $\alpha_L = \mathbf{0,617}$ soit $\mu_L = \mathbf{0,372}$ pour les FeE500 (voir fig.7), car dans ce cas le béton est trop sollicité et l'acier est sous exploité ce qui entraîne une grande quantité d'aciers tendus pour une quantité relativement réduite d'aciers comprimés.

On préfère donc, dans la suite de ce cours, de redimensionner la section de béton en augmentant par exemple sa hauteur, au lieu de faire un dimensionnement avec aciers comprimés.

Tableau 1 : Valeurs caractéristiques de α et μ

α	0,167	0,259	0,617	0,668	1
μ	0,125	0,186	0,372	0,392	0,48
			Aciers FeE500	Aciers FeE400	

2.6. Organigrammes pour le calcul des poutres à section rectangulaire en flexion simple à l'ELU

2.6.1. Vérification des dimensions et calcul de la section d'acier

On se propose de vérifier les dimensions et de calculer les aciers d'une section rectangulaire en flexion simple à l'ELU.

Données : b ; h ; d (géométrie de la section de béton) ,
 f_{c28} ; f_e ; γ_b ; γ_s (Caractéristiques des matériaux et M_u le moment ultime)

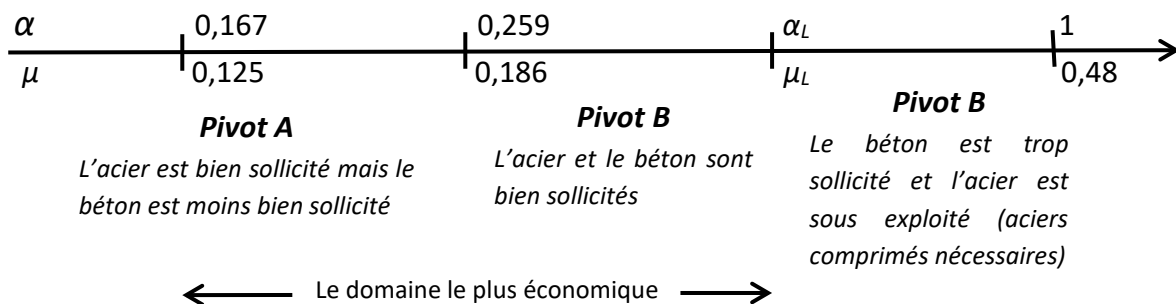
$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\phi \gamma_b} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{M_u}{b d^2 f_{bu}}$$

Dans le cas courant $d = 0,9h$
 $\gamma_b = 1,5$ dans le cas courant et
 $\gamma_b = 1,15$ dans le cas accidentel

$$\alpha = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2\mu} \right)$$

Pour optimiser l'utilisation des aciers on doit avoir $\alpha < \alpha_L$ ($\alpha_L = \mathbf{0,668}$ soit $\mu_L = \mathbf{0,392}$ pour les FeE400 et $\alpha_L = \mathbf{0,617}$ soit $\mu_L = \mathbf{0,372}$ pour les FeE500).

Dans le cas contraire redimensionner la section en augmentant sa hauteur.



$$Z = (1 - 0,4\alpha) d$$

$$A_s = \frac{M_u}{Z \sigma_s}$$

$$\sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s} \quad \text{et} \quad A_s > A_{s\min} = \frac{0,23 b d f_{tj}}{f_e}$$

$\gamma_s = 1,15$ dans le cas courant, $\gamma_s = 1$ dans le cas accidentel

2.6.2. Moment résistant d'une poutre en flexion simple à l'ELU

Connaissant la géométrie de la poutre et la section d'acier (A_s), on calcule le moment résistant de cette section.

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\theta \gamma_b}$$

$$\alpha = \frac{A_s \sigma_s}{0,8 b d f_{bu}} < \alpha_l$$

$$M_{rbu} = Z A_s \sigma_s$$

$$Z = (1 - 0,4\alpha) d$$

Le moment résistant M_{rbu} doit être supérieur au moment ultime ($M_{rbu} > M_u$). Dans le cas contraire un redimensionnement est nécessaire.

3. VERIFICATION DES SECTIONS RECTANGULAIRES A L'ELS EN FLEXION SIMPLE

On s'intéresse dans ce qui suit à la vérification des poutres à sections rectangulaires, sollicitées en flexion simple à l'ELS, plus précisément à l'état limite de service vis-à-vis de la durabilité.

3.1. Hypothèses de calcul et Notation

- Les sections droites planes restent planes après déformations ;
- On considère qu'il n'y a pas de glissement entre l'acier et le béton ;
- La résistance à la traction du béton est négligée ;
- Le béton et l'acier sont considérés comme des matériaux linéairement élastiques : c'est-à-dire que les contraintes sont proportionnelles aux déformations :

$$\sigma_{bc} = f_{bc} = E_b \varepsilon_{bc}$$

$$\sigma_s = f_s = E_s \varepsilon_s$$

$$\sigma_{bc} = f_{bc} : \text{contrainte de service du béton ;}$$

$$\sigma_s = f_s : \text{contrainte de service de l'acier ;}$$

$$E_b : \text{module de déformation instantanée du béton (} E_{ij} = 11000 f_{cj}^{1/3} \text{) ;}$$

$$E_s : \text{module de déformation instantanée de l'acier (} E_s = 200000 \text{ MPa) ;}$$

$$\varepsilon_s, \varepsilon_{bc} : \text{déformations unitaires élastiques de l'acier et du béton ;}$$

- Par convention on prend $n = \frac{E_s}{E_b} = 15$ (une section d'acier A est représentée par une section de béton égale à n.A)

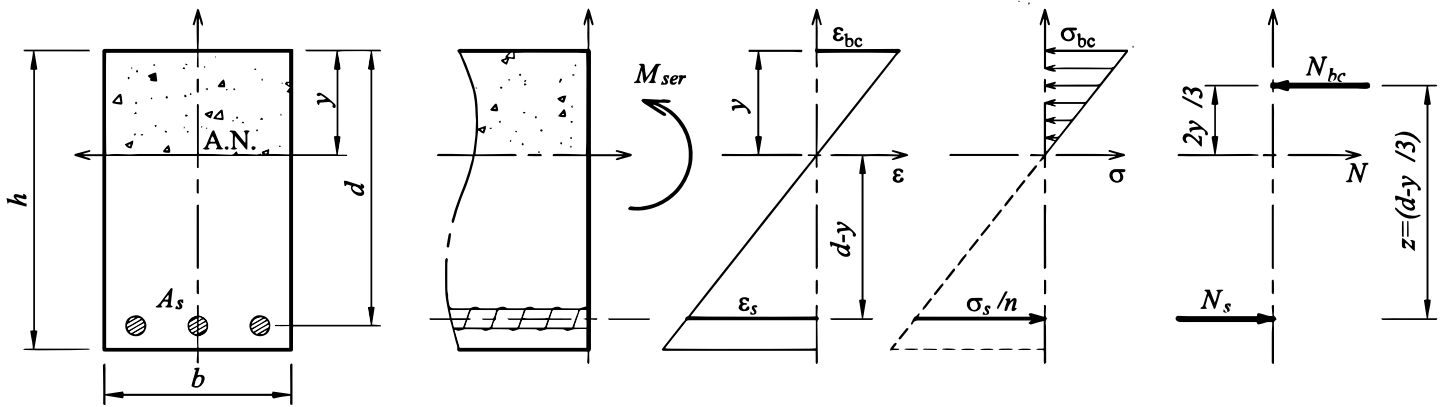


Fig.10 : Notations utilisées pour les calculs en flexion simple à l'ELS

3.2. Etat limite de service vis-à-vis de la durabilité

On se propose de déterminer les contraintes en service et faire une vérification vis à vis de la limite de compression du béton et de la limite d'ouverture des fissures.

Le dimensionnement à l'ELU et la vérification des contraintes à l'ELS peut être établie lorsque la fissuration est peu préjudiciable ou préjudiciable dans le cas d'une fissuration très préjudiciable il faut faire le calcul à l'ELS.

3.2.1. Calcul des contraintes

Connaissant les caractéristiques géométriques de la section de béton (b , h , d), la section des aciers tendus A_s et le moment de flexion à l'état limite de service M_{ser} (fig.11), on calcule les contraintes de l'acier et du béton.

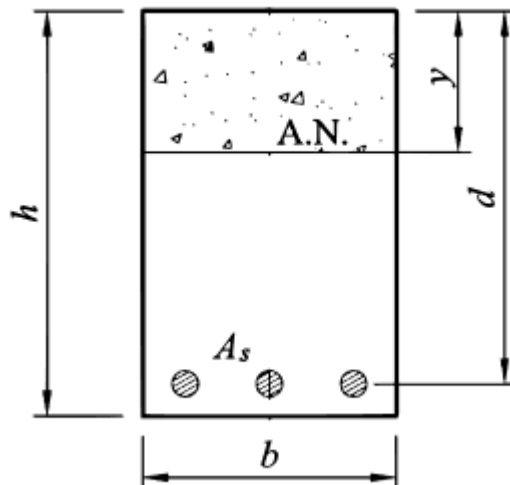


fig.11 : Caractéristiques géométriques de la section

y : Distance du centre de gravité de la section homogène à la fibre la plus comprimée

- **Position de l'axe neutre (y)**

On calcule le moment statique par rapport à l'axe neutre (le béton tendu est négligé) :

$\frac{y}{2}$: position du centre de gravité du béton comprimé

$b \times y$: section du béton comprimé

n : coefficient d'équivalence ($n=15$)

$$by\left(\frac{y}{2}\right) - nA_s(d-y) = 0 \quad \text{soit} \quad by^2 + 30A_sy - 30A_sd = 0 \quad (3)$$

y , est la solution de l'équation du second degré (3).

- **Le moment d'inertie I**

Le moment d'inertie (I) calculé par rapport à l'axe neutre est donné par :

$$I = \left[\frac{by^3}{12} + by\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 15A_s(d-y)^2 \right] \Rightarrow I = \frac{1}{3}by^3 + 15A_s(d-y)^2$$

Pour une répartition linéaire des contraintes (fig.12) on aura :

$$\sigma_{bc} = \left(\frac{M_{ser}}{I} \right) y \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_s}{n} = \left(\frac{M_{ser}}{I} \right) (d-y) \quad \text{on pose} \quad K = \frac{M_{ser}}{I}$$

$$\text{on obtient} \quad \sigma_{bc} = Ky \quad \text{et} \quad \sigma_s = nK(d-y)$$

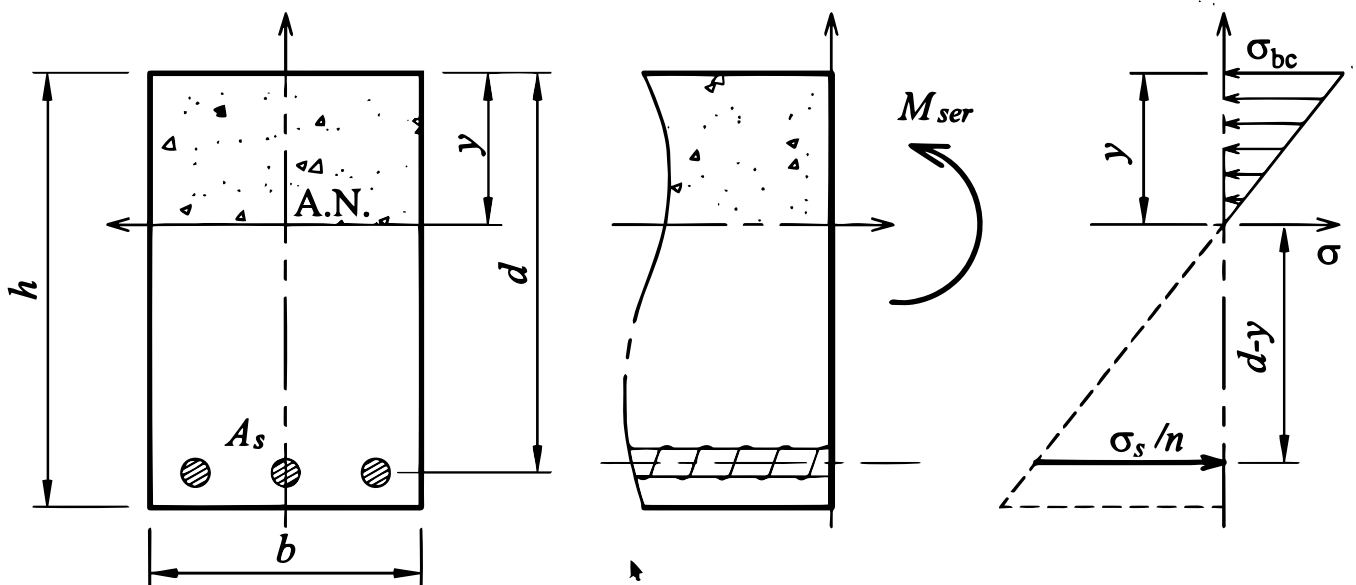


fig.12 : Répartition des contraintes

3.2.2. Vérification des contraintes

Les contraintes de service doivent rester inférieures aux limites suivantes en fonction du type de fissuration :

$$\sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc} = 0,6 f_{cj}$$

$$\sigma_s \leq \bar{\sigma}_s$$

- Fissuration peu préjudiciable : aucune limite pour $\bar{\sigma}_s$;
- Fissuration préjudiciable : $\bar{\sigma}_s = \max\left(\frac{f_e}{2} ; 110\sqrt{\eta f_{tj}}\right)$ pour les HA ;
- Fissuration très préjudiciable : $\bar{\sigma}_s = 0,8 \max\left(\frac{f_e}{2} ; 110\sqrt{\eta f_{tj}}\right)$ pour les HA ;

η coefficient de fissuration tel que : $\eta = 1,6$ pour les barres à haute adhérence sauf pour les aciers de diamètre inférieur à 6 mm où on prend $\eta = 1,3$.

f_{tj} résistance à la traction du béton à j jours : $f_{tj} = 0,6 + 0,06 f_{cj}$.

3.2.3. Organigrammes pour la vérification des poutres à section rectangulaire en flexion simple à l'ELS

On se propose de vérifier les sections d'acier et du béton à l'ELS d'une section rectangulaire sollicitée en flexion simple.

Données : $b ; h ; d$ (géométrie de la section de béton),
La section d'acier A_s et le moment à l'ELS M_{ser} .

On calcule la position de l'axe neutre y ,
solution de l'équation

$$by^2 + 30A_s y - 30A_s d = 0$$

On calcule le moment d'inertie

$$I = \frac{1}{3}by^3 + 15A_s(d - y)^2$$

On calcule les contraintes :

$$\sigma_{bc} = Ky$$

$$\sigma_s = nK(d - y)$$

Avec : $K = \frac{M_{ser}}{I}$

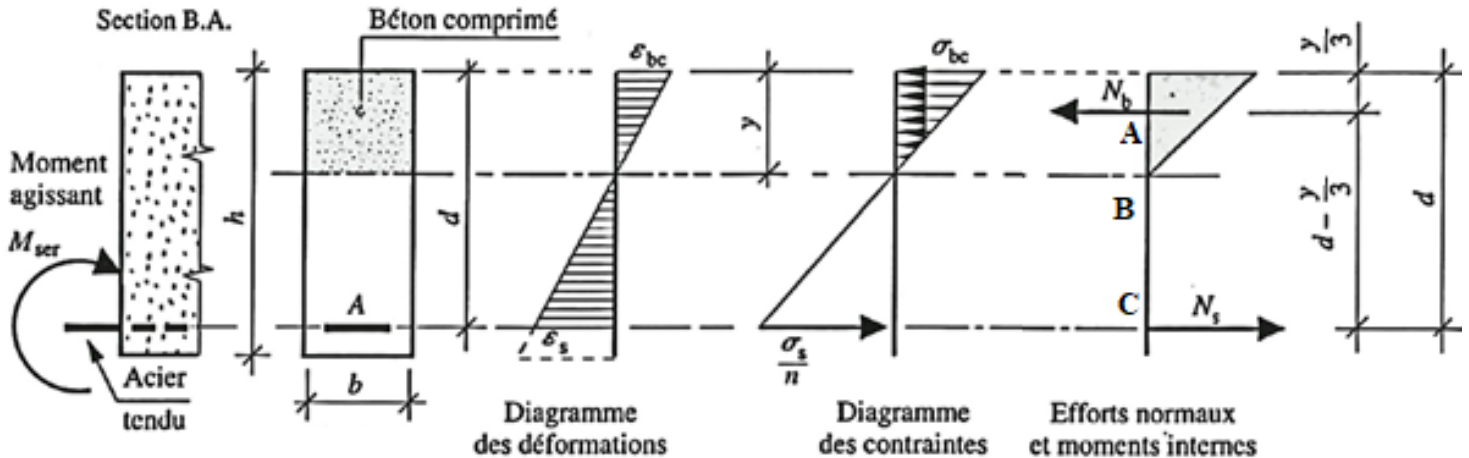
On doit vérifier que :

$$\sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc} = 0,6 f_{cj}$$

$$\sigma_s \leq \bar{\sigma}_s$$

3.2.4. Dimensionnement à l'ELS

Lorsque la fissuration est très préjudiciable et dans certains cas préjudiciable la combinaison dimensionnante en flexion simple est celle de l'ELS. On procède directement au calcul à l'ELS car dans ce cas la section d'acier nécessaire à l'ELS est toujours plus grande que celle nécessaire à l'ELU.



Equations d'équilibre

Somme des forces	Somme des moments
$\frac{1}{2}by\sigma_{bc} - A_s\sigma_s = 0$	$\sum M /_A \Rightarrow M_{ser} = A_s\sigma_s \left(d - \frac{y}{3} \right)$ $\sum M /_B \Rightarrow M_{ser} = \frac{1}{3}by^2\sigma_{bc} + A_s\sigma_s (d - y)$ $\sum M /_C \Rightarrow M_{ser} = \frac{1}{2}by\sigma_{bc} \left(d - \frac{y}{3} \right)$

Equations de compatibilité des déformations

$$\frac{\varepsilon_{bc}}{y} = \frac{\varepsilon_s}{d - y}$$

$$\frac{\sigma_{bc}}{y} = \frac{\sigma_s}{n(d - y)} \Rightarrow y = \frac{nd\sigma_{bc}}{n + \sigma_{bc} + \sigma_s}$$

En prenant : $\sigma_{bc} = \bar{\sigma}_{bc}$, $\sigma_s = \bar{\sigma}_s$ et $y = \alpha d$

Le moment $M_1 = \frac{1}{2} b y \bar{\sigma}_{bc} \left(d - \frac{y_1}{3} \right)$ est le moment au-delà duquel la section nécessite des aciers comprimés pour $y_1 = \frac{n d \bar{\sigma}_{bc}}{n + \bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_s}$

En combinant les équations d'équilibre et les équations de compatibilité avec ($y = \alpha d$) on obtient :

$$\bar{\sigma}_s \alpha^3 - 3 \bar{\sigma}_s \alpha^2 - \left(\frac{6 n M_{ser}}{b d^2} \right) \alpha + \frac{6 n M_{ser}}{b d^2} = 0 \quad ; \quad \text{On pose } \mu_{ser} = \frac{n M_{ser}}{b d^2 \bar{\sigma}_s}$$

$$\text{On aura : } \alpha^3 - 3 \alpha^2 - 6 \mu_{ser} (\alpha - 1) = 0$$

La solution α ($0 < \alpha < 1$) de cette équation nous permet de calculer la section d'acier

$$A_s = \frac{M_{ser}}{\bar{\sigma}_s d \left(1 - \frac{\alpha}{3} \right)} \quad (\text{équation des moments en A})$$

Une fois la section calculée, la vérification des contraintes se fait suivant l'organigramme de vérification des contraintes à l'ELS (3.2.3).

3.2.5. Organigrammes pour le dimensionnement des poutres à section rectangulaire en flexion simple à l'ELS

Dimensionnement d'une section rectangulaire à l'ELS sollicitée en flexion simple.

Données : M_{ser} , b , h , f_e , f_{c28}

$$\text{On calcule } M_1 = \frac{1}{2} b y \bar{\sigma}_{bc} \left(d - \frac{y_1}{3} \right) \quad \text{avec } y_1 = \frac{n d \bar{\sigma}_{bc}}{n + \bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_s}$$

Si : $M_{ser} > M_1$

Redimensionner la section de béton (augmenter b et/ou h) ou placer des aciers comprimés (mauvais choix)

Si : $M_{ser} < M_1$ les aciers comprimés ne sont pas nécessaires.

$$\text{On calcule : } \mu_{ser} = \frac{n M_{ser}}{b d^2 \bar{\sigma}_s}$$

On détermine α ($0 < \alpha < 1$) solution de l'équation : $\alpha^3 - 3 \alpha^2 - 6 \mu_{ser} (\alpha - 1) = 0$

$$\text{La section d'acier est donnée par : } A_s = \frac{M_{ser}}{\bar{\sigma}_s d \left(1 - \frac{\alpha}{3} \right)}$$

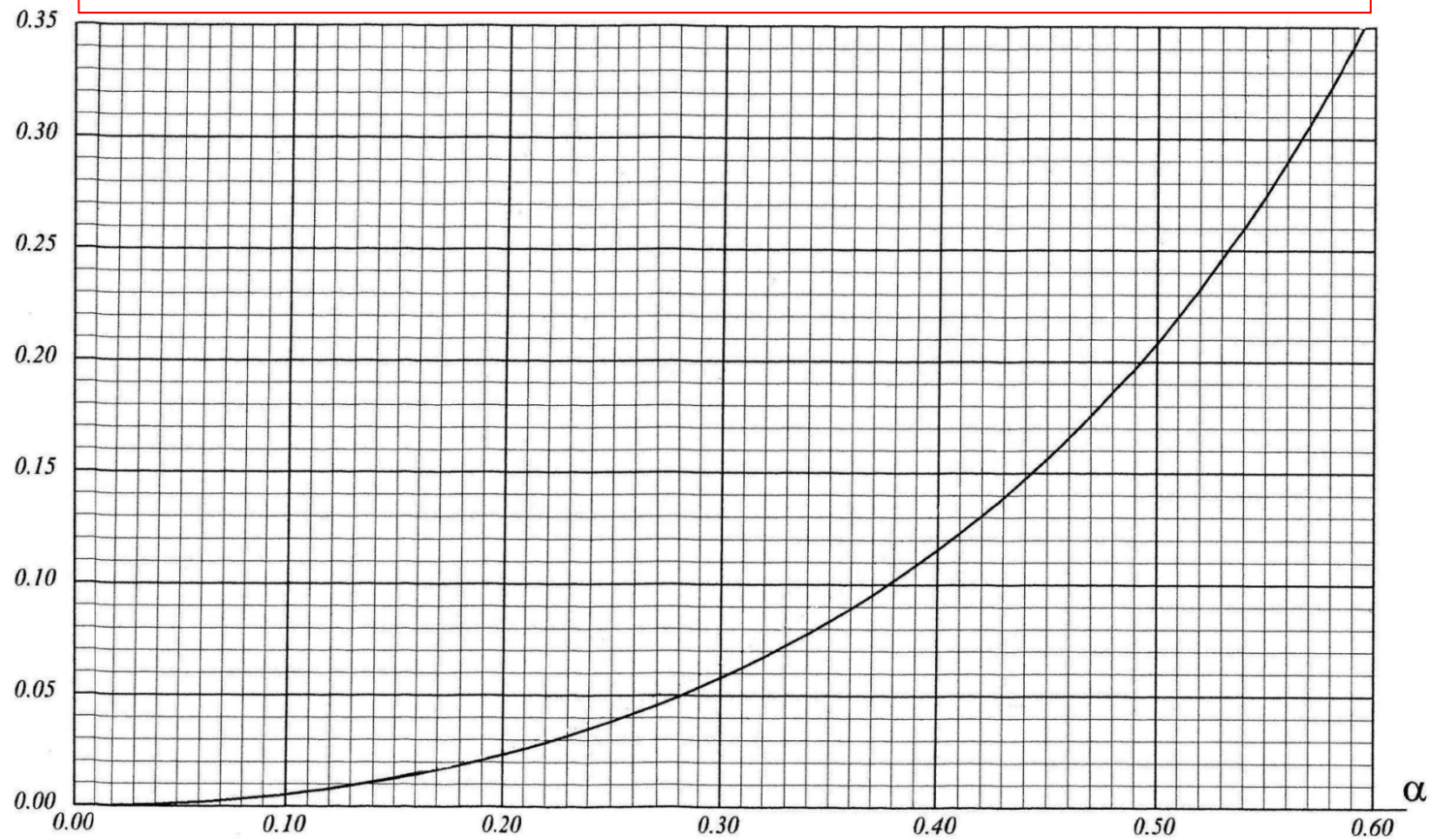
La vérification des contraintes est donnée par (3.2.3)

Dimensionnement des sections d'aciers à l'ELS (Flexion simple)

On calcule μ_{ser} on lit la valeur de α correspondante puis on calcule

$$A_s = \frac{M_{ser}}{\bar{\sigma}_s d \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)}$$

$$\mu_{ser} = \frac{nM_{ser}}{bd^2\bar{\sigma}_s}$$



4. PRINCIPE ET FONCTIONNEMENT DES SECTIONS EN T

Les dalles supportées par des poutres contribuent souvent au travail de celles-ci en reprenant une partie des contraintes de compressions générées par la flexion de cette poutre (fig.13).

Dans ce cas, Il est important de considérer la section sollicitée comme une section en T et non pas comme une section rectangulaire.

Notons que ceci n'est vrai que dans le cas où la poutre est soumise à un moment positif ; si le moment est négatif, la dalle ne participe pas au travail de la poutre et la section sollicitée est considérée comme rectangulaire.

Par simplification, on considère une répartition uniforme des contraintes sur la largeur de la table à utiliser. Cette largeur est appelée largeur efficace (fig.14) .

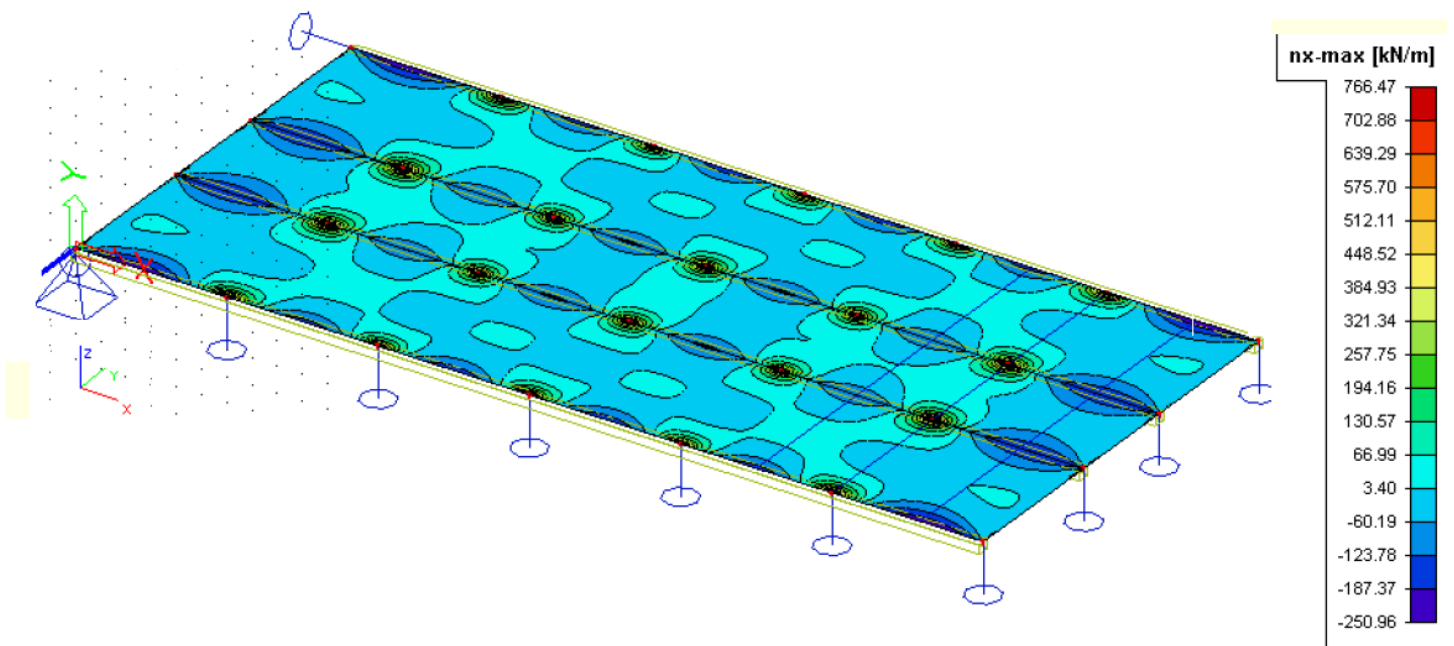


fig.13 : Efforts normaux selon (x) dans la dalle.

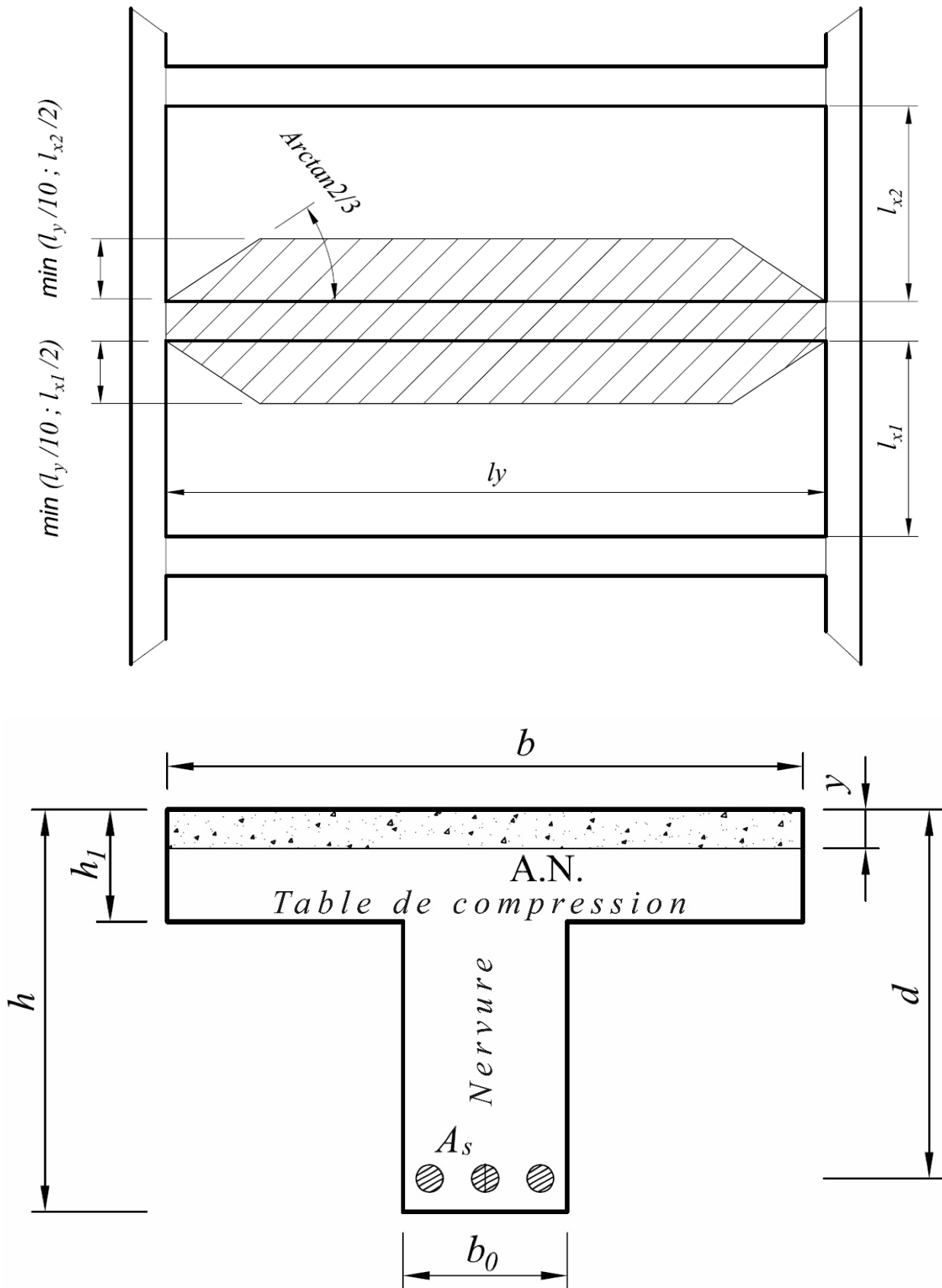


fig.14 : Dimensions des débords à prendre en compte pour le calcul d'une poutre en T.

4.1. Calcul des sections en T

Pour calculer les sections en T, il est nécessaire de savoir si l'axe neutre est dans la table de compression ou dans la nervure car le calcul s'effectue différemment selon chaque cas.

- **1^{er} cas** : L'axe neutre est dans la table de compression.

On a donc ($y < h_1$), le béton tendu étant négligé, la poutre en T se calcule exactement comme une poutre rectangulaire de largeur b , à l'ELU ou à l'ELS.

- **2^{ème} cas** : L'axe neutre est sous la table de compression.

On a donc ($y > h_1$), une partie de la contrainte normale est reprise par la table de compression de largeur b , l'autre par une partie de l'âme (nervure) de largeur b_0 et de hauteur $(0,8y - h_1)$ à l'ELU et $(y_1 - h_1)$ à l'ELS.

En effet, dans la majeure partie des cas, une poutre en T se calcule comme une poutre rectangulaire de largeur b et si ($y < h_1$) n'est pas vérifiée, il faut refaire le calcul avec les hypothèses d'une poutre en T.

Pour cela on calculera le moment résistant de la table (à l'ELU et à l'ELS) défini comme le moment que peut reprendre la table si elle est entièrement comprimée (l'axe neutre est situé au raccord entre la nervure et la table de compression).

Les moments résistants M_t à l'ELU et à l'ELS sont donnés comme suit :

$$\begin{cases} M_{tu} = bh_1 f_{bu} \left(d - \frac{h_1}{2} \right) & \text{à l'ELU} \\ M_{tser} = b \frac{h_1}{2} \bar{\sigma}_{bc} \left(d - \frac{h_1}{3} \right) & \text{à l'ELS} \end{cases}$$

4.1.1. Calcul des sections en T à l'ELU

A l'ELU le moment résistant de la table de compression est : $M_{tu} = bh_1 f_{bu} \left(d - \frac{h_1}{2} \right)$

Soit M_u le moment à l'ELU, on distingue alors deux cas :

- $M_u \leq M_{tu}$: l'axe neutre est dans la table de compression, la section se calcule comme une section rectangulaire de largeur b et de hauteur utile d sollicitée par le moment ultime M_u .

- $M_u > M_{tu}$: l'axe neutre est dans la nervure, la section se calcule comme une section en T.

Dans ce cas on considère que les débords de la table de compression reprennent une partie du moment à l'ELU noté M_{uTable} et le reste $M_{uAme} = M_u - M_{uTable}$ est repris par l'âme.

On se ramène donc au calcul de deux sections rectangulaires, l'une de largeur $(b - b_0)$ et l'autre de largeur b_0 (fig.15).

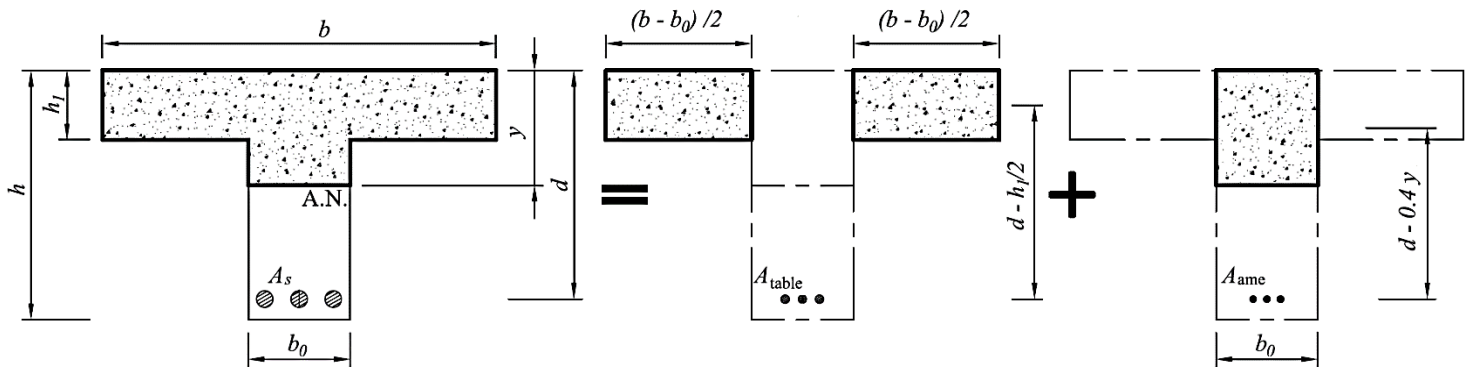


fig.15 : Principe du calcul de la section d'acier pour une poutre en T à l'ELU

Les étapes du calcul sont les suivantes :

- 1) Calcul de la part de moment repris par les débords de la table :

$$M_{uTable} = (b - b_0) h_1 f_{bu} \left(d - \frac{h_1}{2} \right)$$

- 2) Calcul de la part de moment que doit reprendre l'âme :

$$M_{uAme} = M_u - M_{uTable}$$

- 3) Calcul classique de la section d'acier (A_{sAme}) à prévoir pour reprendre M_{uAme} (calcul du moment réduit μ , de α , Z et σ_s puis (A_{sAme}) en évitant de mettre des aciers comprimés) :

$$A_{sAme} = \frac{M_u - M_{uTable}}{(1 - 0,4\alpha) d \sigma_s}$$

- 4) Calcul de la section d'acier nécessaire (A_{sTable}) pour reprendre le moment M_{uTable} de la table :

$$A_{sTable} = \frac{M_{uTable}}{\sigma_s \left(d - \frac{h_1}{2} \right)}$$

- 5) Calcul de la section d'acier nécessaire à mettre en place :

$$A_s = A_{sAme} + A_{sTable}$$

4.1.2. Calcul des sections en T à l'ELS

Les calculs à l'ELU sont conduits en décomposant la résultante des contraintes de compression du béton en deux résultantes fictives N_{bc1} et N_{bc2} (fig.16).

- N_{bc1} est la résultante de la poutre fictive rectangulaire équivalente ;
- N_{bc2} est la partie reprise par le béton fictif sous la table de compression ;
- La variation des contraintes de compression dans le béton est linéaire $\sigma(y) = Ky$.

Les contraintes fictives de compression du béton sont :

$$\begin{cases} N_{bc1} = \frac{1}{2} K b y^2 & \text{s'appliquant en } \frac{2}{3} y \\ N_{bc2} = \frac{1}{2} K (b - b_0) (y - h_1)^2 & \text{s'appliquant en } \frac{2}{3} (y - h_1) \end{cases}$$

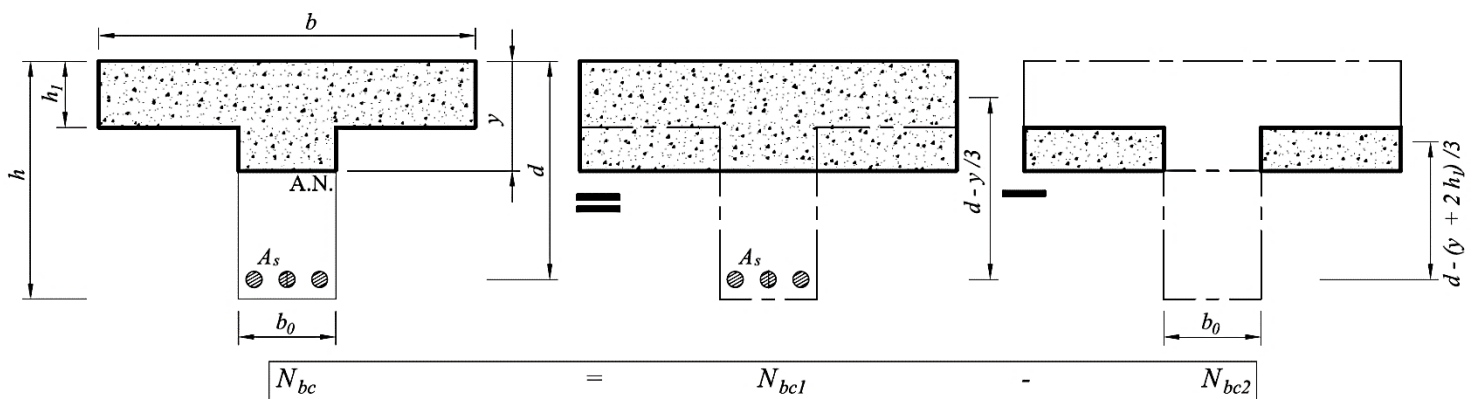


fig.16 : Principe du calcul de la section d'acier pour une poutre en T à l'ELS

Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} N_{bc1} - N_{bc2} - A_s \sigma_s = 0 & \text{selon } N \\ \frac{2}{3} y N_{bc1} - \frac{2}{3} (y - h_1) N_{bc2} + (d - y) A_s \sigma_s = M_{ser} & \text{selon } M \text{ sur l'AN} \end{cases}$$

De plus, comme pour le calcul d'une section rectangulaire, on admet que :

$$\begin{cases} \sigma_s = \bar{\sigma}_s \\ \sigma_s = nK(d - y) \\ \sigma_{bc} = Ky \end{cases}$$

Une section de béton armé est considérée comme non fragile si le moment fléchissant entraînant la fissuration de la section de béton conduit à une contrainte dans les aciers au plus égale à leur limite d'élasticité (condition de non fragilité). On évalue la sollicitation de fissuration en considérant la section de béton seul soumise à une contrainte normal variant de façon linéaire sur toute la section et en limitant les contraintes de traction f_{tj} .

En flexion simple, pour une poutre rectangulaire de dimension $(b \times h)$, la contrainte Maximale de traction est égale à :

$$\sigma_{bt_{\max}} = \sigma_b \left(\frac{h}{2} \right) = - \frac{M_{fiss}}{I_b} \left(\frac{h}{2} \right) = -f_{tj}$$

De l'expression du moment quadratique de la section de béton non armé non

fissuré, on en déduit l'expression de M_{fiss} : $I_b = \frac{bh^3}{12} \Rightarrow M_{fiss} = \frac{f_{tj}bh^2}{6}$

La condition de non fragilité suppose que lorsque la section de béton armé est soumise au moment fléchissant M_{fiss} , la contrainte dans les aciers est au plus égale à la limite élastique f_e , et le moment M dans la section est égale à : $M = A_s f_e Z_b$.

A partir des relations précédentes, la section minimale d'acier vérifiant la condition de non fragilité est donnée par la formule suivante :

$$A_{s\min} = \frac{f_{tj}bh^2}{f_e Z_b}$$

Si, on suppose que $Z_b \approx 0,9d \approx 0,9^2 h$ la section minimale d'acier s'écrit comme suit :

$$A_{s\min} = 0,23bd \frac{f_{tj}}{f_e}$$

5. VERIFICATION DES SECTIONS EN T A L'ELS

La vérification des sections en T à l'ELS est effectuée selon l'organigramme suivant :

*Données : géométrie de la section de béton,
la section d'acier A_s et le moment à l'ELS M_{ser} .*

On calcule la position de l'axe neutre y , solution de l'équation

$$\frac{b_0}{2} y^2 + (b - b_0) h_1 \left(y - \frac{h_1}{2} \right) - 15 A_s (d - y) = 0$$

On calcule le moment d'inertie

$$I = \frac{1}{3} b_0 y^3 + (b - b_0) \frac{h_1^3}{12} + (b - b_0) h_1 \left(y - \frac{h_1}{2} \right)^2 + 15 A_s (d - y)^2$$

On calcule les contraintes :

$$\sigma_{bc} = Ky$$

$$\sigma_s = 15K(d - y)$$

Avec : $K = \frac{M_{ser}}{I}$

On doit vérifier que :

$$\sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc} = 0,6 f_{cj}$$

$$\sigma_s \leq \bar{\sigma}_s$$