

INSTITUT SUPERIEUR DES ETUDES
TECHNOLOGIQUES DE SFAX

DEPARTEMENT GENIE CIVIL قسم الهندسة المدنية

Manuel de cours de

CALCUL DE STRUCTURE

Préparé par : Samir - ELLOUZE
Wissem - ZOUARI

Année universitaire 2009/2010

SOMMAIRE

Chapitre I – Notions Générales sur la théorie des Structures.....05

I- la théorie des Poutres

1. Définition des Poutres
2. Hypothèses
3. Actions mécaniques extérieures.
4. Equilibre des actions mécaniques.
5. Efforts intérieurs.

II- Etude du degré d'hyperstaticité d'une structure.....11

- 1- Introduction
- 2- Degré d'hyperstaticité

Chapitre II – Déformation des Poutres.....17

I. I- Poutres droites isostatiques

- 1- Formules de NAVIER-BRESSE
- 2- Formules Usuelles
- 3- Rotations aux extrémités d'une poutre droite
- 4- Applications

II- Travées hyperstatiques Encastrées

- 1- Introduction
- 2- Détermination des moments d'encastrements
- 3- Application

III- Notions d'appuis élastiques

Chapitre III – Poutres Continues.....36

I-Introduction

II- Notations Utilisées

III- Méthode de Résolution

- 1- Méthode des Rotations (WILSON-MANEY)
- 2- Méthode des trois Moments (CLAPEYRON)

Chapitre IV – Les théorèmes Energétiques.....48

I- Introduction

II- Travail des Forces extérieures, Energie de déformation

- 1- Poutre soumise à un effort Normal
- 2- Poutre soumise à un effort tranchant
- 3- Poutre soumise à un moment fléchissant
- 4- Poutre soumise à une torsion

III- Les théorèmes Energétiques

- 1- Théorème de CASTIGNALO
- 2- Théorème de la charge fictive
- 3- Théorème de MENABREA
- 4- Théorème de réciprocité de MAXWELL-BETTI

IV- Méthodes de Calcul des Intégrales

- 1- Méthode de VERECHAGUINE
- 2- Les intégrales de Mohr.

Chapitre V– Résolution des Structures hyperstatiques par la méthode des Forces66

I- Objectif de cette méthode

II- Principe de la Méthode

III- Etapes de Calculs

Chapitre VI – Les lignes d'influences73

I- Généralités

II- Définitions

- 1- Lignes d'influences
- 2- Lignes enveloppes

III- Applications Aux poutres droites isostatiques

- 1- Lignes d'influences des réactions d'appuis
- 2- Lignes d'influences de l'effort tranchant
- 3- Lignes d'influences de moment fléchissant
- 4- Détermination des Sollicitations

IV- Applications aux poutres continues hyperstatiques

BIBLIOGRAPHIES

Chapitre I :

NOTIONS GENERALES SUR LATHEORIE DES STRUCTURES

I. LA THEORIE DES POUTRES :

I.1. Définitions :

▪ Poutre :

Solide élastique engendré par une aire plane **S** dont le centre de gravité **G** décrit une courbe **L**. Le plan de **S** restant normal à **L**.

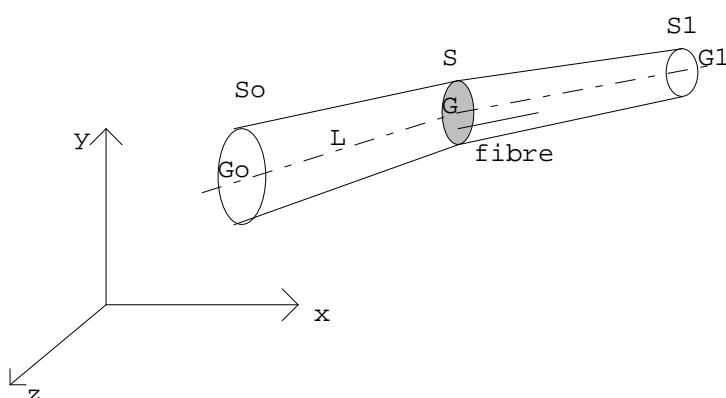
S : section droite,

S₀ : section origine

S₁ : section extrémité

L : fibre moyenne. Un point de **S** décrit une fibre.

Une poutre est liée à d'autres solides par l'un des 3 modes de liaison: appui simple, articulation, encastrement.



Cas courants:

Si **L** est gauche, plane ou droite la poutre est dite gauche, plane ou droite.

Les poutres les plus utilisées sont des *poutres à plan moyen*: le plan de **L** est un plan de symétrie géométrique et mécanique.

Si **S** est constante, la poutre est à section constante. Souvent **S** varie le long de **L** pour proportionner la poutre aux efforts qu'elle supporte: poutre à section variable.

I.2. Les hypothèses de la théorie des poutres :

Les hypothèses de la théorie des poutres résultent du fait que les poutres ont une dimension prépondérante vis à vis aux autres dimensions. Les dimensions de la section droite doivent être petites par rapport à la longueur de la courbe (**C**).

Si en désignant par :

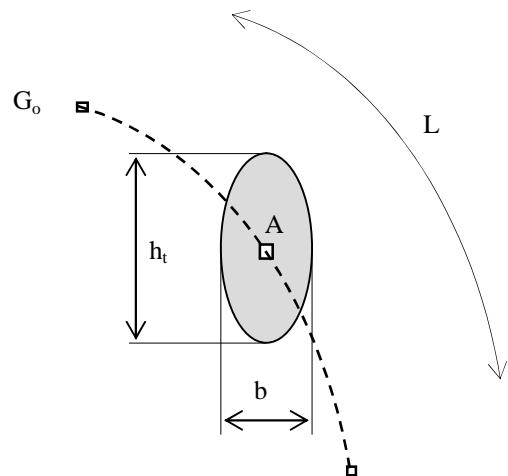
ht: plus grande dimension transversale de la section droite

b: plus petite dimension transversale de la section droite.

L: longueur développée de la ligne moyenne.

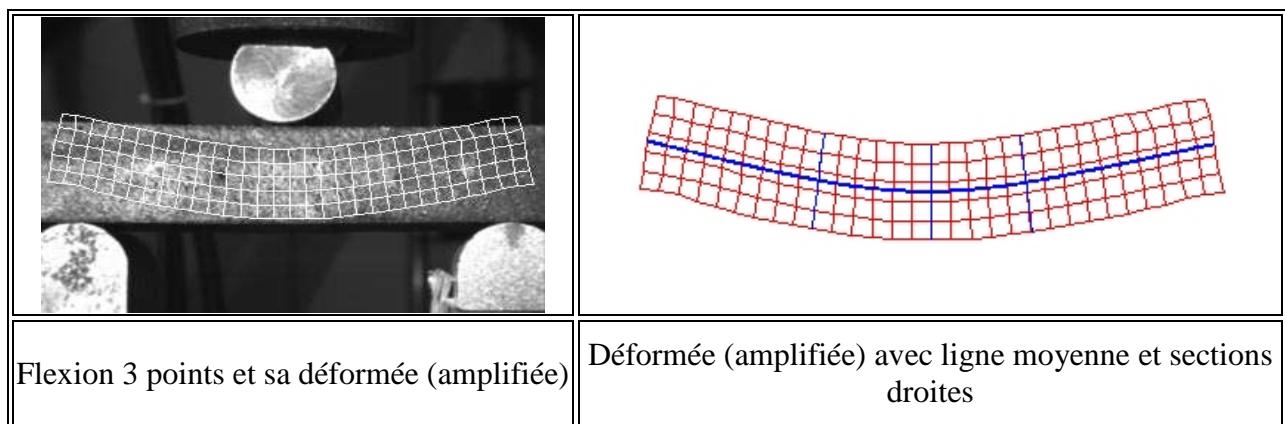
R: rayon de courbure de la poutre.

$$\text{Il faut : } \left\{ \begin{array}{l} \frac{ht}{b} \leq 10 \\ \frac{1}{30} \leq \frac{ht}{L} \leq \frac{1}{5} \dots \dots \text{Poutres} \\ \frac{1}{100} \leq \frac{ht}{R} \leq \frac{1}{5} \dots \dots \text{Arcs} \end{array} \right.$$



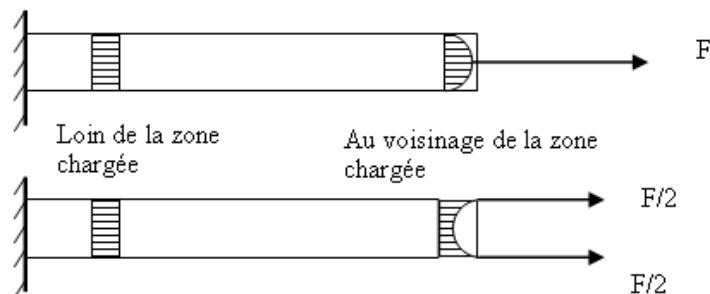
▪ Principe de NAVIER - BERNOUILLI :

Les sections planes et normales à la fibre moyenne restent après déformation de la poutre planes et normales à la fibre moyenne.



▪ Principe de saint VENANT :

Dans une section éloignée du point d'application d'une force, les contraintes et les déformations ne dépendent que de la résultante et du moment fléchissant créé par la force.



En général la distance égale à la plus grande dimension transversale suffit pour remplir cette condition.

I.3. Actions mécaniques extérieures.

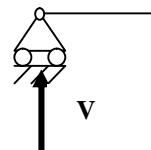
Si on isole une poutre (ou un tronçon de poutre), on appelle actions mécaniques extérieures les actions mécaniques appliquées par le milieu extérieur sur la partie isolée.

On distingue deux sortes d'actions mécaniques extérieures :

- **Les charges** : Ce sont les efforts au quels la poutre doit résister et elles sont considérées comme étant appliquées sur la ligne moyenne. On distingue :
 - Les charges concentrées : Il s'agit des forces et des couples qui s'exercent en un point de la poutre.
 - Les charges réparties : Ce sont des densités linéiques de forces et de moments appliquées sur une portion de la ligne moyenne.
- **Les actions de liaison** : Ces actions sont exercées par les liaisons qui maintiennent la poutre en place. Les réactions et moments d'appuis qui s'opposent aux déplacements et rotations.

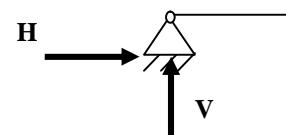
- Appui simple : 2 libertés.

Il engendre 1 liaison donc 1 inconnu.



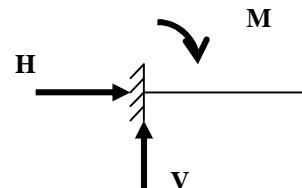
- Articulation: 1 liberté.

Elle engendre 2 liaisons donc 2 inconnus.



- Encastrement: 0 libertés.

Il engendre 3 liaisons donc 3 inconnus.



I.4. Equilibre des systèmes mécaniques.

- a. **Structure spatiale** : Soient $oxyz$ un repère trirectangle.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système mécanique en général soit en équilibre sont :

- **Le théorème de la résultante :**

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad \text{implique} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{proj} \vec{F}_{ext} / x = 0 \\ \sum \text{proj} \vec{F}_{ext} / y = 0 \\ \sum \text{proj} \vec{F}_{ext} / z = 0 \end{array} \right\} \quad \text{3 équations d'équilibre.}$$

- **Le théorème du moment :**

$$\sum \vec{M}_{ext} = \vec{0} \quad \text{implique} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{M}_{ext} / x = 0 \\ \sum \vec{M}_{ext} / y = 0 \\ \sum \vec{M}_{ext} / z = 0 \end{array} \right\} \quad \text{3 équations d'équilibre.}$$

On peut écrire en général 6 équations d'équilibre.

b. Structure plane : Dans le cas d'un système plan, xy par exemple, le système d'équations se réduit à :

- **Le théorème de la résultante :**

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \text{ implique } \left\{ \begin{array}{l} \sum \text{proj} \vec{F}_{ext} / x = 0 \\ \sum \text{proj} \vec{F}_{ext} / y = 0 \end{array} \right\} \quad \text{2 équations d'équilibre.}$$

- **Le théorème du moment :**

$$\sum M \vec{F}_{ext} = \vec{0} \text{ implique } \sum M \vec{F}_{ext} / z = 0 \quad \text{1 équation d'équilibre.}$$

Les équations deviennent 3 équations d'équilibre.

I.5. Efforts intérieurs :

- **Définition :**

Soit une poutre chargée en équilibre. Si on coupe cette poutre par un plan normal à la ligne moyenne, on obtient une partie dite "partie gauche" et une partie dite "partie droite".

- **Repère et convention des signes.**

Soit (Σ) la section droite de la poutre contiguë aux deux parties, de centre G.

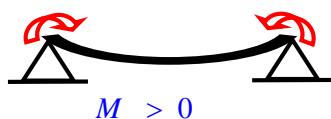
Le repère est lié au centre de gravité G des sections droites :

- Gx est l'axe tangent à la fibre moyenne de la poutre orienté de la gauche vers la droite.
- Les axes Gy et Gz , portés par les axes principaux d'inertie de la section droite.

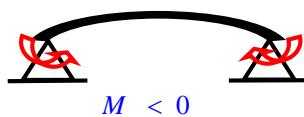
- **Convention de sollicitation**

Effort normal positif \Leftrightarrow compression.

Moment fléchissant positif \Leftrightarrow le vecteur moment est dirigé vers les y ou les z négatifs



Les fibres inférieures sont tendus



Les fibres supérieures sont tendus

- **Eléments de réduction du torseur des efforts internes :**

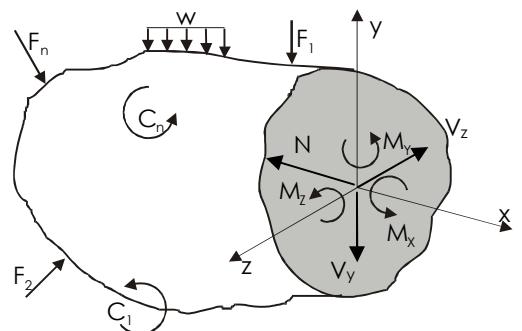
Les efforts internes dans une section équilibrivent les forces externes appliquées sur le corps et sont déterminés en appliquant les équations d'équilibre au centre de gravité de la section :

La partie gauche de la poutre agit par un système de forces sur la partie droite, ce système de forces se réduit au centre de gravité G de la section droite (Σ) à un torseur $\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M} \end{array} \right\}_G$

\vec{R} : Résultante générale $\vec{R} = N\vec{x} + V_y\vec{y} + V_z\vec{z}$

\vec{M} : Moment résultant $\vec{M} = M_t\vec{x} + M_{fy}\vec{y} + M_{fz}\vec{z}$

- N : effort normal perpendiculaire à la section, appliqué au centre de gravité de la section,
- V_y : effort tranchant parallèle à l'axe y , tangentiel à la section,
- V_z : effort tranchant parallèle à l'axe z , tangentiel à la section,
- $M_x = M_t$: moment de torsion autour de l'axe x normal à la section,
- $M_y = M_{fy}$: moment de flexion autour de l'axe y ,
- $M_z = M_{fz}$: moment de flexion autour de l'axe z .



La partie droite de la poutre agit au centre de gravité de la section (\square) sur la partie gauche par un

torseur opposé. Soit $\left\{ \begin{array}{c} -\vec{R} \\ -\vec{M} \end{array} \right\}_G$

En écrivant l'équilibre **de la partie gauche** on aura :

$N = \Sigma \text{proj} \vec{F}_{\text{ext}} / x$	$M_t = \Sigma \text{proj} \vec{M}_{\text{ext}} / x$
$V_y = \Sigma \text{proj} \vec{F}_{\text{ext}} / y$	$M_{fy} = \Sigma \text{proj} \vec{M}_{\text{ext}} / y$
$V_z = \Sigma \text{proj} \vec{F}_{\text{ext}} / z$	$M_{fz} = \Sigma \text{proj} \vec{M}_{\text{ext}} / z$

Donc $M_f(x)$, $M_t(x)$, $N(x)$ et $V(x)$ sont les sommes des sollicitations réduites en G qui s'exercent sur la partie gauche de la poutre donc à gauche de l'abscisse x .

- **Équations intrinsèques des poutres :**

$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$	$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)$	$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x)$
---------------------------	----------------------------	--------------------------------

II. ETUDE DU DEGRE D'HYPERSTATICITE D'UNE STRUCTURE.

Si le nombre des inconnus est supérieur à celui des équations d'équilibre, le système est dit hyperstatique extérieur d'ordre « d° ».

$$\underline{d^\circ_{ext} = i - e}$$

Tel que : d°_{ext} : degré d'hyperstaticité extérieur
i : nombre d'inconnus extérieurs
e : nombre d'équations.

1. Degré d'hyperstaticité d'une poutre continue

On désigne par :

s : nombre d'appuis simple
a : nombre d'articulation
e : nombre d'encastrement

$$\underline{d^\circ = 1s + 2a + 3e - 3}$$

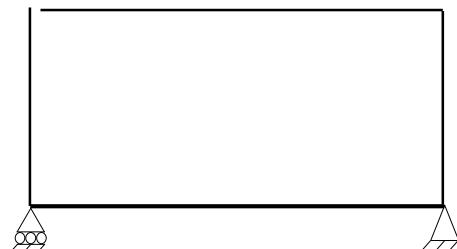
2. Degré d'hyperstaticité d'un portique

- **degré d'hyperstaticité extérieur :**

$$\underline{d^\circ_{ext} = 1s + 2a + 3e - 3}$$

- **degré d'hyperstaticité intérieur:**

On appelle liaisons intérieures des restrictions imposées aux déplacements réciproques des éléments du cadre.



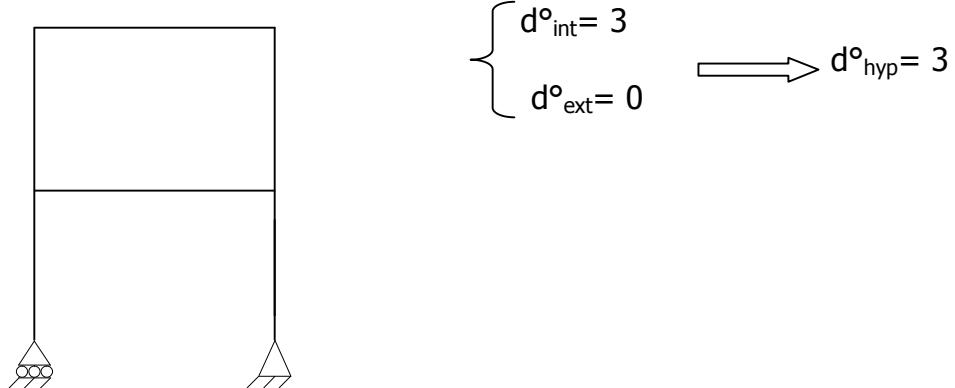
Si l'on relie les extrémités B et C en créant une articulation on supprime deux possibilités de mouvement on impose donc deux liaisons intérieures supplémentaires inconnues V et H et le système devient statiquement indéterminé intérieurement d'ordre 2

Autrement, le degré d'hyperstaticité intérieur correspond au nombre de coupures internes nécessaires pour rendre la structure isostatique intérieurement, à chaque coupure on libère trois inconnues.

Le degré d'hyperstaticité total est la somme entre degré d'hyperstaticité intérieur et extérieur.

- **Le degré d'hyperstaticité total est deux égal à ; $d^\circ = 0 + 2 = 2$**

Exemple : Déterminer le degré d'hyperstaticité total de la structure suivante :



3. méthode générale pour la détermination du degré d'hyperstaticité total

- **Méthode des Contours fermés**

Pour une structure de plusieurs contours fermés, le degré d'hyperstaticité total est :

$$d^{\circ}_{hyp} = 3C - A_r - 2A_s$$

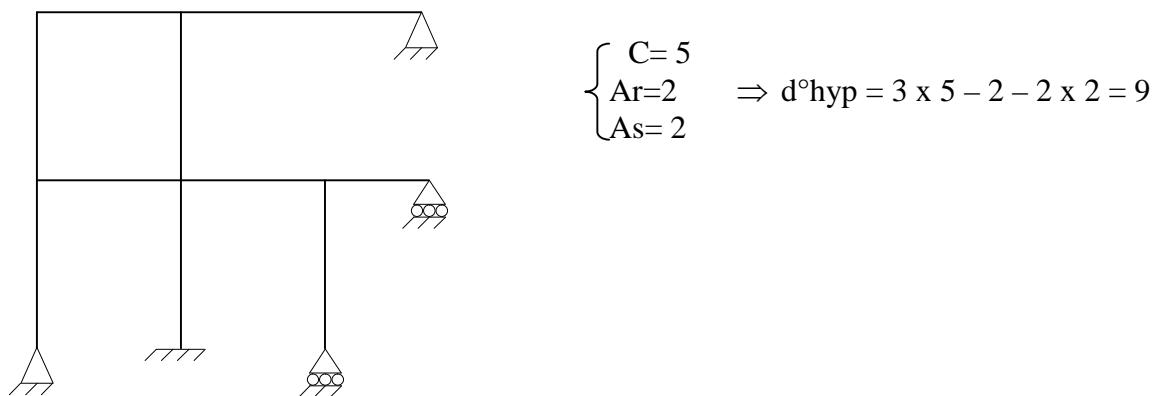
tel que: C : nombre de contours fermés

A_r : nombre d'articulation (Int+ Ext)

A_s : nombre d'appuis simple

Exemple

Déterminer le degré d'hyperstaticité total de la structure suivante :



- **Autre Méthode**

Le degré d'hyperstaticité total peut-être déterminé par la formule suivante :

$$d^{\circ}_{hyp} = \sum q_i L_i - [3b + \sum p_j N_j]$$

tel que :

$\sum q_i L_i$: est le nombre d'inconnus introduits par l'ensemble des liaisons intérieures et extérieures.

$\sum p_j N_j$: est le nombre d'équations issues des nœuds.

b : est le nombre de barres dans la structure (à raison de trois équations par barres).

NB :

Le nombre d'équations issues des nœuds est égal à :

- 3 équations pour un nœud de type encastrement.
- 2 équations pour un nœud de type articulation.
- Une équation pour un nœud de type appui simple.
-

De même le nombre d'inconnus introduits par l'ensemble des liaisons intérieures et extérieures est :

- 3 inconnus pour une liaison de type encastrement.
- 2 inconnus pour une liaison de type articulation.
- 1 inconnu pour une liaison de type appui simple.

DEFORMATION DES POUTRES

En cours de RDM nous avons étudié les déformations dans les poutres à partir de la relation établie par l'expression suivante : $\underline{EI y''(x) = M(x)}$.

Nous allons maintenant utiliser d'autres méthodes plus générales.

Considérons une poutre droite chargée dans son plan moyen (moment de torsion nul). Soit deux points $G_1(x_1, y_1)$ et $G_2(x_2, y_2)$ situés sur la fibre moyenne de cette poutre et $G(x, y)$ un point courant situé sur cette ligne entre G_1 et G_2 .

Sous l'effet de M , N , V et des variations de température, la fibre moyenne se déforme : u et v sont respectivement les projections du déplacement sur les axes (ox ; oy) et ω est l'angle de rotation de la section droite de la poutre en G .

NAVIER-BRESSE ont établi des relations entre ces divers éléments.

I – POUTRES DROITES ISOSTATIQUES

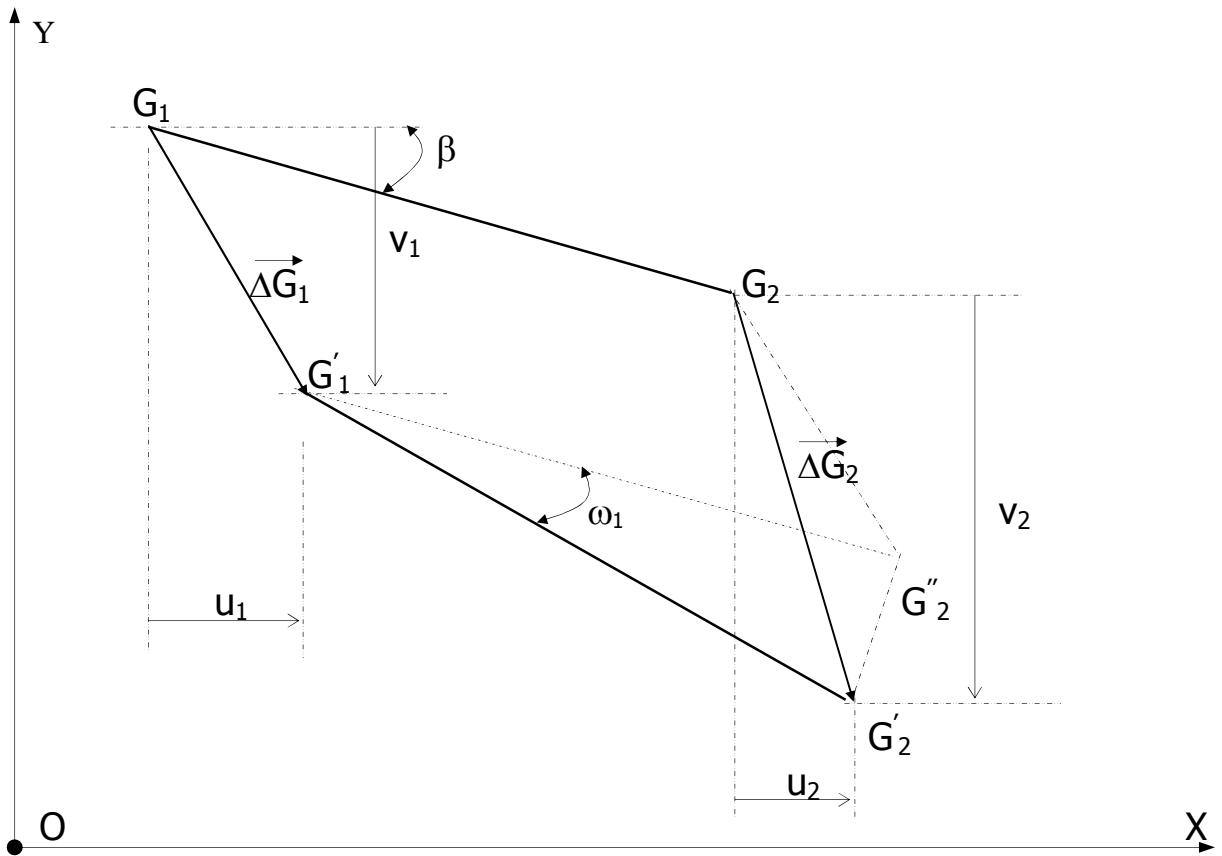
I.1- Formules de NAVIER-BRESSE

Pour exprimer les déformations globales relatives de G_2 par rapport à G_1 , nous analyserons, dans un souci de clarté, chaque transformation élémentaire prise séparément.

I.1.1- Poutre indéformable

Supposons que la poutre soit indéformable et libre de ses appuis ; soit β l'angle de G_1G_2 avec ox , faisons subir à la poutre un déplacement $\vec{\Delta G_1}$ de composante u_1 et v_1 , puis une rotation ω_1 , et exprimons le déplacement résultant : $\vec{\Delta G_2} - \vec{\Delta G_1}$.

(Voir figure suivante)



$$\vec{\Delta G}_2 = \vec{\Delta G}_1 + \vec{G''}_2 \vec{G}'_2$$

projection /ox : $\longrightarrow \quad u_2 = u_1 - \frac{\omega_1(Y_2 - Y_1)}{\sin \beta} \cdot \sin \beta$

projection /oy : $\longrightarrow \quad v_2 = v_1 + \frac{\omega_1(X_2 - X_1)}{\cos \beta} \cdot \cos \beta$

$$u_2 = u_1 - \omega_1 (y_2 - y_1).$$

$$v_2 = v_1 + \omega_1 (x_2 - x_1).$$

$$\omega_2 = \omega_1.$$

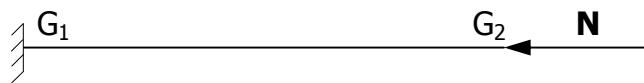
I.1.2 - Poutre déformable

Considérons maintenant une poutre déformable :

- **Soumise à un effort normal N**

D'après la loi de HOOK, nous avons :

$$\Delta \overrightarrow{G_2 G_1} = u_2 = -\frac{N}{ES} \cdot (x_2 - x_1)$$



$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \omega_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = -\frac{N}{ES} (x_2 - x_1) \\ v_2 = 0 \\ \omega_2 = 0 \end{cases}$$

- Soumise à une variation de température

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \omega_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = \lambda t (x_2 - x_1) \\ v_2 = 0 \\ \omega_2 = 0 \end{cases}$$

λ : Coefficient de dilatation thermique

- Soumise à un effort tranchant

A partir du loi de Hooke : $\tau = G \cdot \gamma$

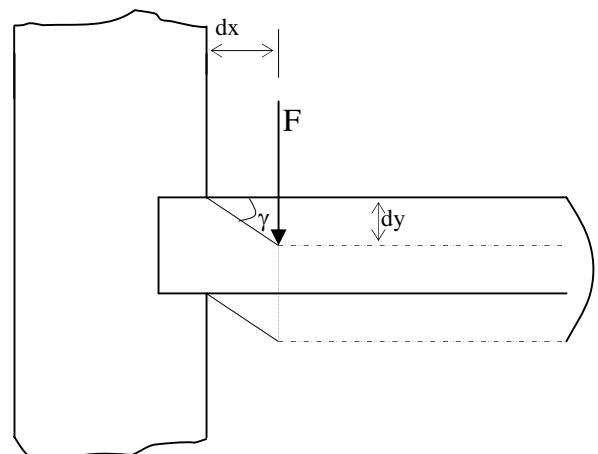
$$\text{Or : } \text{tg} \gamma = \frac{dy}{dx}$$

Puisque : $\gamma \ll 1 \Rightarrow \text{tg} \gamma \approx \gamma$

$$\text{Par la suite : } \tau = G \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{V}{S}$$

$$\text{d'où : } \frac{dy}{dx} = \frac{V}{GS} = \frac{v_2}{(x_2 - x_1)}$$

$$v_2 = \frac{V}{GS} \cdot (x_2 - x_1)$$



donc :

$$\begin{cases} u_2 \approx 0 \\ v_2 = \frac{V}{GS} (x_2 - x_1) \\ \omega_2 \approx 0 \end{cases}$$

- Soumise à un moment fléchissant

L'équation de la déformée: $y'' = \frac{M}{EI} = \frac{d\omega}{dx}$

On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 = 0 \\ v_2 = \frac{1}{EI} \int_{x_1}^{x_2} M (x_2 - x) dx \\ \omega_2 = \omega_1 + \frac{1}{EI} \int_{x_1}^{x_2} M dx \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\omega = \frac{M}{EI} . dx \Rightarrow \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M}{EI} dx \\ dV_2 = \frac{M}{EI} (x_2 - x) . dx \end{array} \right.$$

En faisant la sommation des résultats établis nous obtenons des équations connues sous le nom de formules NAVIER- BRESSE.

$$u_2 = u_1 - \omega_1 (y_2 - y_1) - \frac{N}{ES} (x_2 - x_1) + \lambda t (x_2 - x_1)$$

$$v_2 = v_1 + \omega_1 (x_2 - x_1) + \frac{V}{GS} (x_2 - x_1) + \frac{1}{EI} \int_{x_1}^{x_2} M (x_2 - x) dx.$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{1}{EI} \int_{x_1}^{x_2} M dx .$$

I.2 - Formules usuelles

Pratiquement on néglige les termes suivants:

- $\omega_1 (y_2 - y_1) \approx 0$: avant déformation la fibre moyenne est portée par l'axe ox.
($y_2 \approx y_1$).
- $\lambda t (x_2 - x_1) \approx 0$: la déformation due à la variation de température.
- $\frac{V}{GS} (x_2 - x_1) \approx 0$: la déformation due à l'effort tranchant.

d'où les formules de NAVIER-BRESSE utilisées dans le cas courant sont :

$$u_2 = u_1 - \frac{N}{ES} \int_{x_1}^{x_2} dx$$

$$v_2 = v_1 + \omega_1 (x_2 - x_1) + \frac{1}{EI} \int_{x_1}^{x_2} M (x_2 - x) dx.$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{1}{EI} \int_{x_1}^{x_2} M dx .$$

Ces expressions permettent de calculer les déplacements subis par une poutre comme le fait

l'équation : $y''(x) = \frac{M(x)}{EI}$

En prenant G_1 à l'origine O de l'axe ox et G_2 à une distance L de G_1 .

Les formules de NAVIER-BRESSE deviendront :

$$u_2 = u_1 - \frac{N}{ES} \int_{x_1}^{x_2} dx$$

$$v_2 = v_1 + \omega_1 L + \int_0^L \frac{M}{EI} (L - x) dx.$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \int_0^L \frac{M}{EI} dx .$$

Enfin à la droite d'une section d'abscisse x, les déformations ont pour équations : soit $G(\xi)$ un point courant.

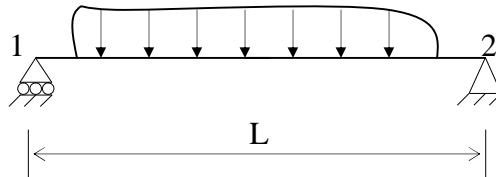
$$u(x) = u_1 - \frac{N}{ES} \int_{x_1}^{x_2} dx$$

$$v(x) = v_1 + \omega_1 (x - x_1) + \int_{x_1}^x \frac{M}{EI} (x - \xi) d\xi.$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \int_{x_1}^x \frac{M}{EI} d\xi.$$

I.3 – Rotations aux extrémités d'une poutre droite

Soit une poutre droite isostatique repose simplement sur deux appuis extrêmes de longueur L et munies d'une charge quelconque.



Pour : $x_1 = 0$; $x_2 = L$; les déplacements (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont nuls, par la suite les relations de NAVIER-BRESSE prennent la forme suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(L) = 0 \\ 0 = + \omega_1 L + \int_0^L \frac{M}{EI} (L - x) dx. \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = + \omega_1 L + \int_0^L \frac{M}{EI} (L - x) dx. \\ \omega_2 = \omega_1 + \int_0^L \frac{M}{EI} dx. \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = \omega_1 + \int_0^L \frac{M}{EI} dx. \end{array} \right. \quad (3)$$

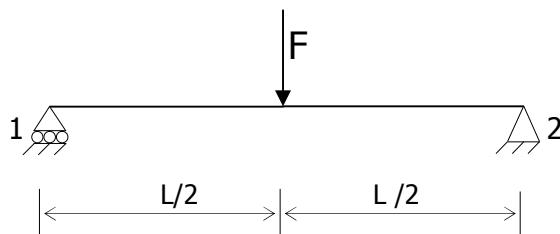
En utilisant les équations (2) et (3), on déduit finalement que les rotations aux extrémités d'une poutre quelconque sont :

$$\omega_1 = - \int_0^L \frac{M}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx.$$

$$\omega_2 = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{x}{L} dx.$$

I.4- Applications

1- Calculer les rotations aux extrémités de la poutre suivante, ainsi que la flèche maximale.



$$\text{On a: } \omega_1 = - \int_0^L \frac{M}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx.$$

$$\begin{cases} 0 \leq x < \frac{L}{2} : \Rightarrow M(x) = \frac{F}{2} \cdot x \\ \frac{L}{2} \leq x < L : \Rightarrow M(x) = \frac{F}{2} \cdot x - F \left(x - \frac{L}{2}\right) = -\frac{F}{2} \cdot x + F \cdot \frac{L}{2} \end{cases}$$

$$\text{On a alors : } \omega_1 = -\frac{1}{EI} \left[\int_0^{L/2} \frac{F}{2} \cdot x dx + \int_{L/2}^L \left(-\frac{F}{2}x + \frac{FL}{2} \right) dx \right]$$

de la même façon pour ω_2

d'où les rotations aux extrémités de cette poutre sont :

$$\begin{cases} \omega_1 = -\frac{FL^2}{16EI} \\ \omega_2 = \frac{FL^2}{16EI} \end{cases}$$

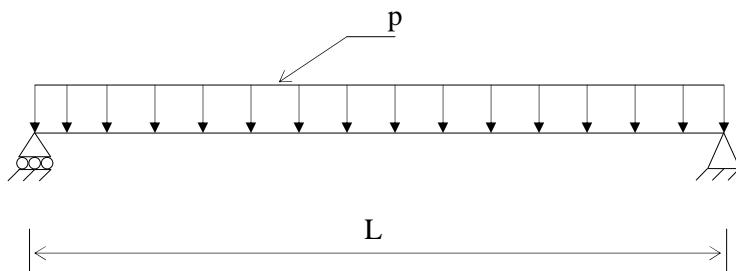
Les déplacements aux appuis sont nuls ($V_1 = V_2 = 0$).

La flèche au milieu ($x = L/2$).

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = \omega_1 \cdot \frac{L}{2} + \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \frac{F}{2}x \cdot (L/2 - x) dx.$$

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{FL^3}{48EI}$$

2 - Calculer les rotations aux extrémités de la poutre suivante, ainsi que la flèche maximale.



$$M(x) = \frac{pL}{2} \cdot x - \frac{p}{2} x^2$$

$$\text{On trouve : } \begin{cases} \omega_1 = -\frac{pL^3}{24EI} \\ \omega_2 = \frac{pL^3}{24EI} \end{cases}$$

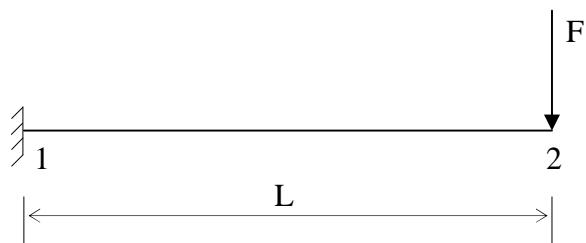
Les déplacements aux appuis sont nuls ($V_1 = V_2 = 0$).

La flèche au milieu ($x = L/2$).

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = \omega_1 \frac{L}{2} + \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{M}{EI} \left(\frac{L}{2} - x\right) dx$$

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{5PL^4}{384EI}$$

3 - Calculer la rotation ainsi que la flèche à l'extrémité de la poutre console suivante :



$$M(x) = -F(L - x)$$

On trouve alors:

$$\begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = \int_0^L \frac{M}{EI} dx = -\frac{FL^2}{2EI} \end{cases}$$

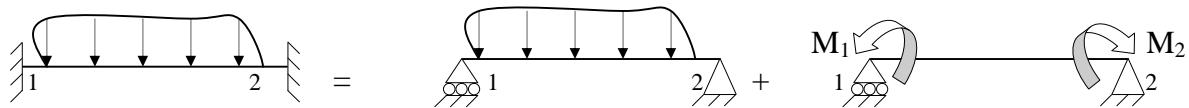
$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = \int_0^L \frac{M}{EI} (L - x) dx = -\frac{FL^3}{3EI} \end{cases}$$

II. TRAVEES HYPERSTATIQUES ENCASTREES

II.1- Introduction

Les formules de NAVIER-BRESSE établies pour les poutres isostatiques restent valables pour les travées hyperstatiques encastrées.

L'expression du moment fléchissant dans une section d'une poutre hyperstatique est obtenue d'après le théorème de superposition comme suit :



$$M(x) = m(x) + \left[M_1 \left(1 - \frac{x}{L} \right) - M_2 \frac{x}{L} \right]$$

d'où

$$M(x) = m(x) + M_1 \left(1 - \frac{x}{L} \right) - M_2 \frac{x}{L} \quad (1)$$

La dérivée de cette expression donne l'effort tranchant dans la travée hyperstatique.

$$V(x) = v(x) - \frac{M_2 + M_1}{L}$$

Tel que :

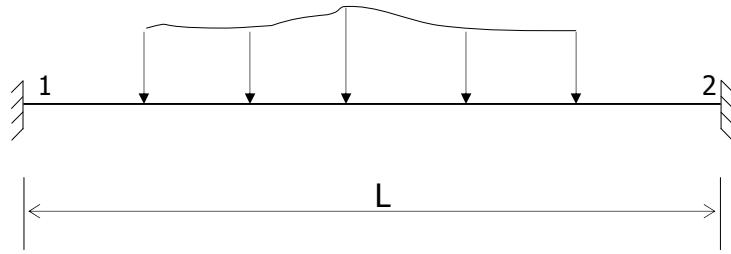
- M_1 et M_2 : Moments extérieurs de la travée considérée.
- $M(x)$ et $V(x)$: Expressions du moment fléchissant et de l'effort tranchant le long de la travée hyperstatique.
- $m(x)$ et $v(x)$: Expressions du moment fléchissant et de l'effort tranchant de la même travée isostatique associée.

Pour calculer les déformations d'une travée hyperstatique, on pourra donc se servir des formules de NAVIER-BRESSE, en prenant pour $M(x)$ l'expression (1) ci-dessus, après avoir déterminé les moments d'encastrement M_1 et M_2 , soit à partir de l'équation différentielle : $y''(x) = \frac{M(x)}{EI}$, soit par une autre méthode (En appliquant les formules de NAVIER-BRESSE).

Les formules de NAVIER-BRESSE dans ce cas sont des relations de déformation supplémentaires qui permettent de calculer M_1 et M_2 plus commodément qu'à partir de l'équation différentielle.

II.2 – Détermination des Moments d'encastrements

Soit une poutre à une travée bi encastrée, soumise à une charge quelconque.



On rappelle les formules de NAVIER-BRESSE :

$$\begin{cases} v_2 = v_1 + \omega_1 L + \int_0^L \frac{M}{EI} (L-x) dx. & (1) \\ \omega_2 = \omega_1 + \int_0^L \frac{M}{EI} dx & (2) \end{cases}$$

En utilisant les expressions (1) et (2), on obtient :

$$v_2 - v_1 = \omega_1 L + \int_0^L \frac{M}{EI} (L-x) dx.$$

$$\text{de plus : } \omega_1 = \omega_2 - \int_0^L \frac{M}{EI} dx$$

On obtient :

$$v_2 - v_1 = \omega_2 L - \int_0^L \frac{M}{EI} \cdot x \cdot dx.$$

• **Premier cas : Appuis de niveaux**

$$v_2 - v_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = - \int_0^L \frac{M}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx. \\ \omega_2 = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{x}{L} dx. \end{cases}$$

Remplaçons :

$$M(x) = m(x) + M_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right) - M_2 \frac{x}{L}, \text{ l'équation du moment de la travée hyperstatique :}$$

$$\begin{cases} \omega_1 = - \int_0^L \frac{m(x)}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx - \int_0^L \frac{M_1}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx + \int_0^L \frac{M_2}{EI} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx. \\ \omega_2 = \int_0^L \frac{m(x)}{EI} \frac{x}{L} dx + \int_0^L \frac{M_1}{EI} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx - \int_0^L \frac{M_2}{EI} \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx. \end{cases}$$

Or :
$$\begin{cases} \omega'_1 = - \int_0^L \frac{m(x)}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx \\ \omega'_2 = \int_0^L \frac{m(x)}{EI} \frac{x}{L} dx . \end{cases}$$
 sont les rotations aux extrémités de la travée isostatique associée.

de plus pour une poutre droite à inertie constante, on pose les intégrales suivants par des constantes a, b et c dites constantes mécaniques :

$$\begin{cases} a = \int_0^L \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{L}{3EI} \\ b = \int_0^L \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} dx = \frac{L}{6EI} \\ c = \int_0^L \frac{1}{EI} \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{L}{3EI} \end{cases}$$

On aura alors :

$$\omega_1 = \omega'_1 - a M_1 + b M_2.$$

$$\omega_2 = \omega'_2 + b M_1 - c M_2.$$

c'est un système à deux inconnues M_1 et M_2 , on faisant la résolution on trouve :

$$M_1 = \frac{c\omega'_1 + b\omega'_2}{ac - b^2}$$

A noter que $\omega_1 = \omega_2 = 0$ (Encastrement)

$$M_2 = \frac{a\omega'_2 + b\omega'_1}{ac - b^2}$$

Remplaçons a, b et c par leurs valeurs on aura :

$$M_1 = \frac{2EI}{L} (2\omega'_1 + \omega'_2)$$

$$M_2 = \frac{2EI}{L} (2\omega'_2 + \omega'_1)$$

Connaissant M_1 et M_2 , nous pouvons tracer $M(x)$ et $V(x)$, ainsi on peut calculer la flèche en chaque point de la poutre.

- **Deuxième cas : Appuis dénivélés**

Supposons qu'un appui soit dénivélé par rapport à un autre, C'est à dire : $v_2 - v_1 \neq 0$

On rappelle que :

$$\begin{cases} v_2 = v_1 + \omega_1 L + \int_0^L \frac{M}{EI} (L - x) dx. \\ v_2 = v_1 + \omega_2 L - \int_0^L \frac{M}{EI} x dx. \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 - v_1 = \omega_1 L + \int_0^L \frac{M}{EI} (L - x) dx. \\ v_2 - v_1 = \omega_2 L - \int_0^L \frac{M}{EI} x dx. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{v_2 - v_1}{L} = \omega_1 + \int_0^L \frac{M}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx. \\ \frac{v_2 - v_1}{L} = \omega_2 - \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{x}{L} dx. \end{cases}$$

On pose :

$$\Omega = \frac{v_2 - v_1}{L}$$

On remplace M par l'équation du moment de la travée hyperstatique,

on aura :

$$\begin{cases} \Omega = \omega_2 \cdot \dot{\omega}_2 - b M_1 + c M_2 \\ \Omega = \omega_1 \cdot \dot{\omega}_1 + a M_1 - b M_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_2 = \dot{\omega}_2 + b M_1 - c M_2 + \Omega \\ \omega_1 = \dot{\omega}_1 - a M_1 + b M_2 + \Omega \end{cases}$$

Or : $\omega_1 = \omega_2 = 0$, (travée bi encastrée)

De plus pour une travée droite à inertie constante, on aura :

$$\begin{cases} M_1 = \frac{2EI}{L} \cdot \left(2\omega_1 \cdot \dot{\omega}_2 + 3 \cdot \frac{(v_2 - v_1)}{L} \right) \\ M_2 = \frac{2EI}{L} \left(2\omega_2 \cdot \dot{\omega}_1 + 3 \cdot \frac{(v_2 - v_1)}{L} \right) \end{cases}$$

Si on compare ces formules à celles pour le cas d'appuis de niveaux, on remarque une variation du moment de : $\Delta M = \frac{6EI}{L^2} \cdot (v_2 - v_1)$

Remarques :

- Si plusieurs cas de charges agissent sur la travée, on a en général intérêt à prendre séparément chaque charge, à calculer les rotations isostatiques puis les moments d'encastrement et on applique le principe de superposition.

- Dans le cas d'une travée encastrée à l'une de ses extrémités et sur appui simple à l'autre extrémité, nous disposons d'une donnée nouvelle.

Soit M_2 par exemple à l'appui est nul

$M(x)$ s'écrit de la façon suivante :

$$M(x) = m(x) + M_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right) - 0$$

$$\omega_1 = - \int_0^L \frac{M}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = 0.$$

Portant $M(x)$ dans cette équation :

$$\omega_1 = - \int_0^L \frac{m(x)}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx - \int_0^L \frac{M_1}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx = 0$$

On trouve :

$$M_1 = \frac{\omega_1}{a} = \frac{3EI\omega_1}{L}$$

On fait de la même façon, si l'origine de la travée est un appui simple ($M_1 = 0$)

$$\text{D'où : } M(x) = m(x) - M_2 \cdot \frac{x}{L}$$

$$\omega_2 = \int_0^L \frac{M}{EI} \cdot \frac{x}{L} dx = 0$$

Portant $M(x)$ dans cette équation :

$$\omega_2 = \int_0^L \frac{m(x)}{EI} \cdot \frac{x}{L} dx - \int_0^L \frac{M_2}{EI} \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = 0$$

$$\text{On trouve : } M_2 = \frac{\omega_2}{c} = \frac{3EI\omega_2}{L}$$

- La valeur du moment d'encastrement d'une travée hyperstatique peut-être déterminée par les expressions suivantes :

On rappelle que :

$$\begin{cases} M_1 = \frac{2EI}{L} (2\omega_1 + \omega_2) \\ M_2 = \frac{2EI}{L} (2\omega_2 + \omega_1) \end{cases}$$

$$\text{Or : } \begin{cases} \omega_1 = - \int_0^L \frac{m(x)}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = \frac{-S}{EI} \left(1 - \frac{X_G}{L}\right) \\ \omega_2 = \int_0^L \frac{m(x)}{EI} \cdot \frac{x}{L} dx = \frac{S}{EIL} X_G \end{cases}$$

En remplaçant ω'_1 et ω'_2 par leur expression dans les équations des moments d'encastrements M_1 et M_2 , on obtient alors :

$$\begin{cases} M_1 = \frac{-2S}{L} \left[2 - \frac{3X_G}{L} \right] \\ M_2 = \frac{2S}{L} \left[\frac{3X_G}{L} - 1 \right] \end{cases}$$

telque :

- S : l'aire de la surface du diagramme de moment fléchissant de la travée isostatique associée.
- X_G : l'abscisse du centre de gravité du diagramme tracé.
- L : la portée de la travée hyperstatique étudiée.

Pour un diagramme symétrique ($X_G = \frac{L}{2}$), les moments d'encastrements M_1 et M_2 deviennent :

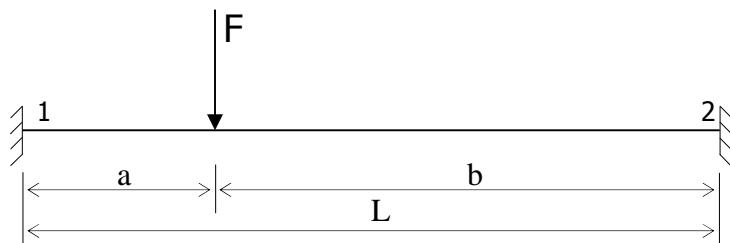
$$\begin{cases} M_1 = \frac{-S}{L} \\ M_2 = \frac{S}{L} \end{cases}$$

II.3- Applications :

Soit une poutre d'inertie constante, à une travée bi encastrée, soumise à une force concentrée.

1°/ Déterminer les rotations de la travée isostatique associée, en déduire les moments d'encastrements.

2°/ Trouver l'expression de la flèche au niveau du point d'application de la force F .



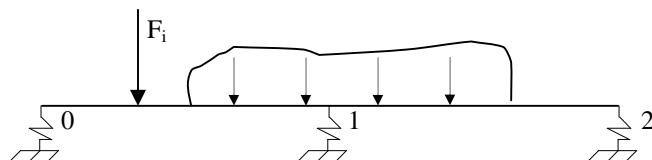
On trouve :

$$1^{\circ/} \quad \begin{cases} \omega_1 = \frac{-Fab(L+b)}{6EI} \\ \omega_2 = \frac{Fab(L+a)}{6EI} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} M_1 = -\frac{Fab^2}{L} \\ M_2 = -\frac{Fba^2}{L} \end{cases}$$

$$2^{\circ/} \quad v = \frac{-2Fab^2}{3EI(L+2b)}$$

III- NOTIONS D'APPUIS ELASTIQUES

Un appui est dit élastique si la réaction qu'il transmet à la poutre est proportionnelle à la flèche au droit de cet appui :



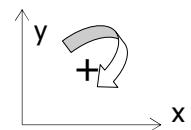
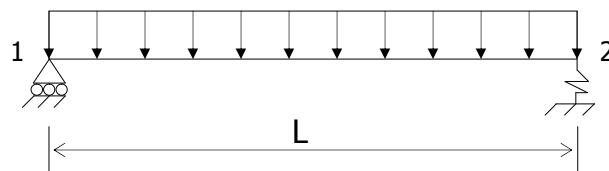
$$F = K \cdot v$$

Tel que :

- F : force transmise.
- V : déplacement selon l'axe de l'appui élastique
- K : rigidité de l'appui élastique
- $\frac{1}{K}$: souplesse de l'appui

Exemple :

Soit une poutre à une travée soumise à une charge uniformément répartie q , reposant sur un appui simple à l'origine et un appui élastique à l'autre extrémité.



Trouver la réaction au point 2 (R_2) :

Solution :

En utilisant la formule de NAVIER-BRESSE :

$$v_2 = v_1 + \omega_1 \cdot L + \frac{1}{EI} \int_0^L M(L-x) \cdot dx = - \frac{R_2}{k}$$

Avec $M(x) = R_2(L-x) - q \frac{(L-x)^2}{2}$

On trouve :

$$R_2 = \frac{q \cdot L}{2(1 + \frac{3EI}{kL^3})}$$

$(v_2 = - \frac{R_2}{k}$ est négative puisque la flèche et la réaction sont de sens opposés)

Chapitre III :

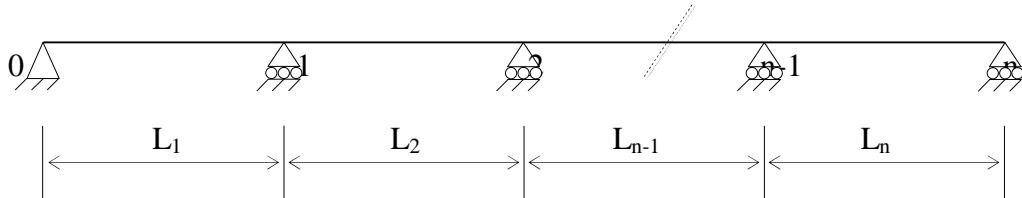
POUTRES CONTINUES

I – INTRODUCTION

Une poutre reposant sur plus de deux appuis est dite poutre continue.

Les systèmes comportant plus d'inconnus que d'équations d'équilibres, est donc hyperstatiques.

On cherche dans ce chapitre à déterminer les moments sur appuis intermédiaires de la poutre continue représentée ci-dessous :



Pour cela, nous allons étudier deux méthodes basées sur les relations de déformation qui permettent de déterminer les inconnus hyperstatiques du système :

- Méthode des rotations, basée sur les relations de WILSON-MANEY.
- Méthode des trois moments basée sur les formules de CLAPEYRON.

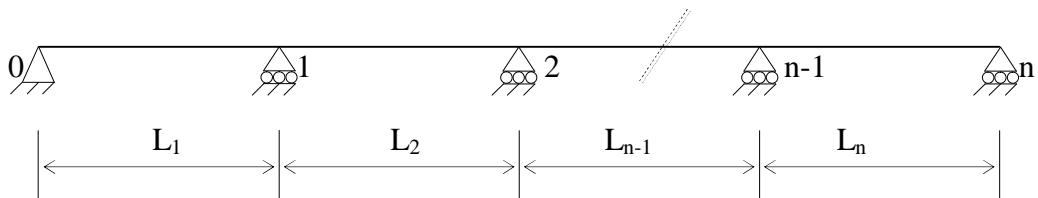
Dans ce chapitre, on va prendre par hypothèses :

Les déformations dues à l'effort tranchant sont négligeables.

On suppose que l'inertie I_{GZ} peut varier d'une travée à une autre (L'inertie est constant par travée) de la poutre.

II – NOTATIONS UTILISEES

Soit la poutre continue suivante :



Par conventions :

- Le tronçon « i-1 ; i », est noté la travée « i » de longueur L_i.

- $\omega_{i-1,i}$ et $\omega_{i,i-1}$: désignent les rotations des sections d'extrémités de la travée « i » isostatique associée :

- $\omega_{i-1,i}^*$: représente la rotation gauche de la travée « i » supposée isostatique.
 $\omega_{i,i-1}^*$: représente la rotation droite de la travée « i » supposée isostatique.

- ω_i : représente la rotation de l'appui « i » de la poutre continue.

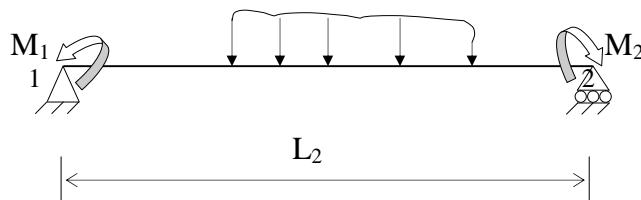
- V_i : déplacement vertical de l'appui « i ».

III – METHODE DE RESOLUTION

III.1 – Méthode des Rotations

III.1.1- Relations de WILSON – MANEY

Considérons une travée (hyperstatique) d'une poutre continue soumise à une charge quelconque.



Soient :

- M_1 et M_2 : les moments extérieurs qui lui sont appliqués.
- ω_1 et ω_2 : les rotations des appuis 1 et 2.
- $V_2 - V_1$: la valeur de la dénivellation de l'appui 2 par rapport à l'appui 1.

$$M(x) = m(x) + M_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right) - M_2 \frac{x}{L}$$

1° Considération : Supposant que cette travée n'est pas chargée entre ses appuis

dans ce cas : $m(x) = 0$.

$$\omega'_1 = \omega'_2 = 0.$$

ω'_1 et ω'_2 sont les rotations de la poutre isostatique associée à la travée hyperstatique.

D'où : $M(x) = M_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right) - M_2 \frac{x}{L}$.

A partir des formules de NAVIER-BRESSE.

$$\begin{cases} V_2 = V_1 + \omega_1 L + \int_0^L \frac{M}{EI} (L-x) dx \\ \omega_2 = \omega_1 + \int_0^L \frac{M(x)}{EI} dx. \end{cases}$$

Implique :

$$\begin{cases} \frac{V_2 - V_1}{L} = \omega_1 + \int_0^L \frac{M(x)}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx \\ \omega_2 - \omega_1 = \int_0^L \frac{M(x)}{EI} dx. \end{cases}$$

On remplace le moment : $M(x) = M_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right) - M_2 \frac{x}{L}$

on obtient :

$$\begin{cases} \frac{V_2 - V_1}{L} = \omega_1 + \frac{M_1}{EI} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx - \frac{M_2}{EI} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} dx \\ \omega_2 - \omega_1 = \int_0^L \frac{M_1}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx - \int_0^L \frac{M_2}{EI} \frac{x}{L} dx \end{cases}$$

On rappelle que :

$$\begin{cases} a = \int_0^L \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{L}{3EI} \\ b = \int_0^L \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} dx = \frac{L}{6EI} \\ c = \int_0^L \frac{1}{EI} \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{L}{3EI} \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} \frac{V_2 - V_1}{L} = \omega_1 + a M_1 - b M_2 \\ \omega_2 - \omega_1 = \frac{L}{2EI} M_1 - \frac{L}{2EI} M_2 \end{cases}$$

Le système d'équations sera donc :

$$\begin{cases} M_1 - M_2 = \frac{2EI}{L}(\omega_2 - \omega_1) \\ 2M_1 - M_2 = \frac{2EI}{L}(-3\omega_1 + 3\frac{V_2 - V_1}{L}) \end{cases}$$

Après résolution , on trouve :

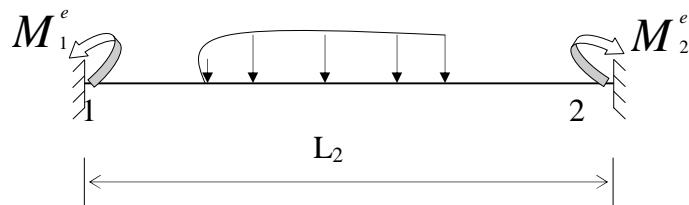
$$\begin{cases} M_1 = \frac{-2EI}{L} \left(2\omega_1 + \omega_2 - 3 \left(\frac{V_2 - V_1}{L} \right) \right) \\ M_2 = \frac{-2EI}{L} \left(2\omega_2 + \omega_1 - 3 \left(\frac{V_2 - V_1}{L} \right) \right) \end{cases}$$

Si on décompose ces expressions :

$$\begin{cases} M_1 = \frac{-2EI}{L} (2\omega_1 + \omega_2) + \frac{6EI}{L^2} (V_2 - V_1) \\ M_2 = \frac{-2EI}{L} (2\omega_2 + \omega_1) + \frac{6EI}{L^2} (V_2 - V_1) \end{cases}$$

On constate qu'il existe une partie due au moment extérieur, et une autre partie due à la dénivellation des appuis.

2° Considération : Nous considérons maintenant que les appuis sont de niveaux ($V_2 - V_1 = 0$) et que la travée ne subit pas de rotations c'est à dire qu'elle se comporte comme une poutre encastrée à ses deux extrémités et si la travée est chargée entre les appuis 1 et 2 :



$$M(x) = m(x) + M_1^e(1 - \frac{x}{L}) - M_2^e \frac{x}{L}$$

Par superposition des deux considérations de chargements, les équations fondamentales de déformations connues par les noms des ingénieurs américains WILSON et MANEY sont.

$$M_1 = \frac{-2EI}{L} \left(2\omega_1 + \omega_2 - 3 \left(\frac{V_2 - V_1}{L} \right) \right) + M_1^e$$

$$M_2 = \frac{-2EI}{L} \left(2\omega_2 + \omega_1 - 3 \left(\frac{V_2 - V_1}{L} \right) \right) + M_2^e$$

Si on généralise pour la travée (i, i+1) :

$$M_{i,i+1} = \frac{-2EI}{L_{i+1}} (2\omega_i + \omega_{i+1} - 3 \left(\frac{V_{i+1} - V_i}{L_{i+1}} \right)) + M_i^e$$

$$M_{i+1,i} = \frac{-2EI}{L_{i+1}} (2\omega_{i+1} + \omega_i - 3 \left(\frac{V_{i+1} - V_i}{L_{i+1}} \right)) + M_{i+1}^e$$

III.1.2- Méthode de résolution

Pour la résolution des poutres continues par la méthode des rotations :

1° - On écrit les relations de WILSON-MANEY pour chaque travée.

2° - On remplace les déformations et les sollicitations remarquables par leur valeur :

- Appuis simples et articulations : déplacement $V=0$ et moment $M=0$.
- Appui élastique : déplacement $V \neq 0$ et moment $M=0$.
- Encastrements : déplacement $V=0$ et rotation $\omega=0$.

3° - L'équilibre statique de la structure permet d'écrire que la somme des moments autour de chaque appui est nul (équilibre des nœuds).

Exemple : Equilibre du nœud 2

On écrit $\mathbf{M}_{21} + \mathbf{M}_{23} = \mathbf{0}$.

4° - On aura à la fin un système d'équations en déformations (ω) qu'on résout.

5° - On remplace les résultats trouvés dans les expressions des moments extérieurs aux appuis.

6° - On déduit enfin les équations et les valeurs des moments fléchissant et des efforts tranchants le long de la structure étudiée.

III.1.3 – Application

Soit une poutre continue à trois travées, encastrée à ses extrémités A et D et reposant sur des appuis simples en B et C. Les travées AB et CD sont soumises à une charge ponctuelle centrée $F=2400$ daN. La travée centrale BC est soumise à une charge uniforme répartie $q=1600$ daN/m.

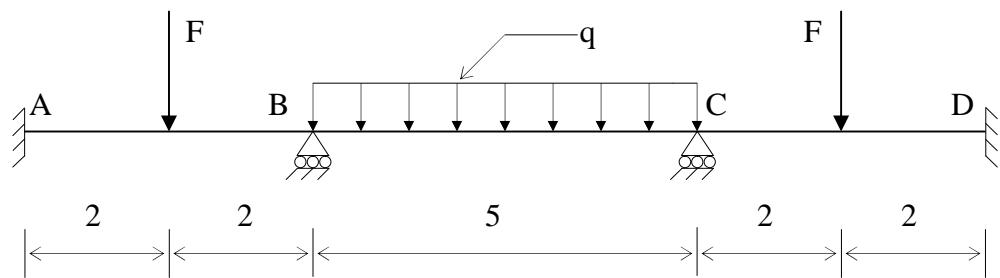
On donne :

- $AB = CD = 4$ m
- $BC = 5$ m
- $EI = C^t e$.

1 – En utilisant la méthode de WILSON-MANEY, déterminer les moments fléchissant M_A , M_B , M_C et M_D .

2 – Ecrire les équations des moments fléchissant et efforts tranchant le long de la poutre ABCD ; puis tracer les diagrammes correspondants.

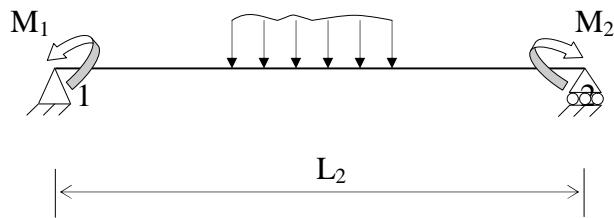
3 - En déduire les actions de liaisons en A, B, C et D.



III.2 – Méthode des trois Moments

III.2.1 - Formules de CLAPEYRON

Soit la travée (hyperstatique) d'une poutre continue soumise à une charge quelconque :



$$M(x) = m(x) + M_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + M_2 \frac{x}{L}$$

Tel que : M_1 et M_2 sont les moments fléchissant appliqués aux noeuds 1 et 2.

- **Appuis de niveaux :**

Dans le chapitre II (déformations des Poutres page 29), on a écrit le système d'équations en M_1 et M_2 (dans cette paragraphe M_1 et M_2 sont des moments extérieurs).

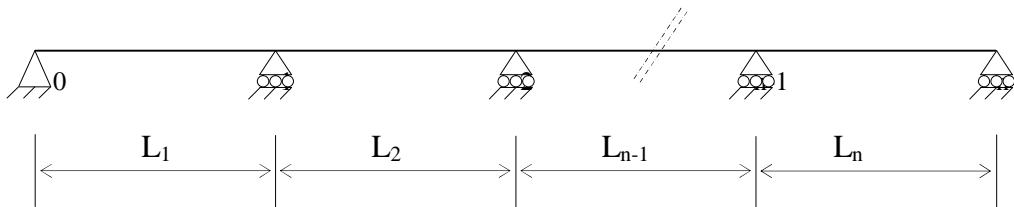
$$\begin{cases} \omega_1 = \omega'_1 - a M_1 - b M_2 \\ \omega_2 = \omega'_2 + b M_1 + c M_2 \end{cases}$$

$$a = \int_0^L \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{L}{3EI}$$

On rappelle que :

$$\begin{cases} b = \int_0^L \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} dx = \frac{L}{6EI} \\ c = \int_0^L \frac{1}{EI} \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{L}{3EI} \end{cases}$$

Si on étudie la flexion de la poutre continue à n travées de longueurs L_i et de moments d'inerties I_i (avec i allant de 1 à n).



La condition géométrique de continuité de l'angle de rotation à l'appui i commun aux deux travées de longueurs L_i et L_{i+1} sous l'effet d'un chargement quelconque sur les travées conduit à écrire :

$$\omega_{i,i-1} = \omega_{i,i+1}.$$

Si on écrit les deux dernières équations pour les travées $(i-1, i)$ et $(i, i+1)$.

$$\begin{cases} \omega_{i,i+1} = \omega'_{i,i+1} - a_{i+1} M_i - b_{i+1} M_{i+1} \\ \omega_{i,i-1} = \omega'_{i,i-1} + b_i M_{i-1} + c_i M_i \end{cases}$$

On écrit la condition géométrique de continuité ($\omega_{i,i-1} = \omega_{i,i+1}$), on aura :

$$b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} = \omega'_{i,i+1} - \omega'_{i,i-1}.$$

Dans le cas où l'inertie serait constant pour toutes les travées de la poutre, on remplace les paramètres a, b et c par leurs valeurs, on aura l'équation suivante, dite équation des trois moments ou de CLAPEYRON :

$$L_i M_{i-1} + 2(L_i + L_{i+1}) M_i + L_{i+1} M_{i+1} = 6EI(\omega'_{i,i+1} - \omega'_{i,i-1}).$$

- **Appuis dénivelés :**

Dans le chapitre II, on a écrit le système d'équations en M_1 et M_2 (dans cette paragraphe M_1 et M_2 sont des moments extérieurs).

$$\begin{cases} \Omega = \omega_2 \cdot \omega'_2 - b M_1 - c M_2 \\ \Omega = \omega_1 \cdot \omega'_1 + a M_1 + b M_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_2 = \omega'_2 + b M_1 + c M_2 + \Omega \\ \omega_1 = \omega'_1 - a M_1 - b M_2 + \Omega \end{cases}$$

Si on étudie la flexion de la poutre continue à n travées de longueurs L_i et de moments d'inerties I_i (avec i allant de 1 à n).

On écrit les deux dernières équations pour les travées (i-1,i) et (i, i+1).

On pose :

$$\begin{cases} \Omega_i = \frac{V_i - V_{i-1}}{L_i} \\ \Omega_{i+1} = \frac{V_{i+1} - V_i}{L_{i+1}} \end{cases}$$

On trouve :

$$\begin{cases} \omega_{i,i+1} = \omega'_{i,i+1} - a_{i+1} M_i - b_{i+1} M_{i+1} + \Omega_{i+1} \\ \omega_{i,i-1} = \omega'_{i,i-1} + b_i M_{i-1} + c_i M_i + \Omega_i \end{cases}$$

On fait le même enchaînement , on obtient :

$$b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} = \omega'_{i,i+1} - \omega'_{i,i-1} + \Omega_{i+1} - \Omega_i$$

Dans le cas où l'inertie serait constante pour toutes les travées de la poutre, on remplace les paramètres a, b et c par leurs valeurs, on aura l'équation suivante, dite équation des trois moments ou de CLAPEYRON :

$$L_i M_{i-1} + 2(L_i + L_{i+1}) M_i + L_{i+1} M_{i+1} = 6EI(\omega'_{i,i+1} - \omega'_{i,i-1} + \Omega_{i+1} - \Omega_i).$$

III.2.2 - Méthode de résolution

1° - On écrit cette équation de CLAPEYRON pour toute la poutre.

2° - On obtient un système d'équations dont les inconnus sont les moments fléchissant sur appuis.

3° - On résout ce système

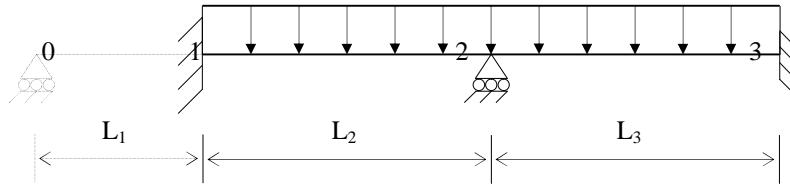
4° - On déduit enfin les équations et les valeurs des moments fléchissant et des efforts tranchants ; ainsi que les réactions d'appuis.

Remarque :

Dans le cas d'une poutre continue, dont les appuis aux extrémités sont encastrés, on ajoute une travée fictive non chargée, puis on procède de la même façon, le théorème de CLAPEYRON, en prenant soin évidemment d'annuler la portée fictive dans l'expression finale.

Exemple :

Soit une poutre à deux travées identiques, soumise à une charge uniformément répartie q , d'inertie constante, schématisée ci-dessous.



Déterminer les moments sur appuis.

Travée 1 et 2 :

$$L_1 M_0 + 2(L_1 + L_2) M_1 + L_2 M_2 = 6EI \left(\frac{-qL_2^3}{24EI} \right)$$

Travée 2 et 3 :

$$L_2 M_1 + 2(L_2 + L_3) M_2 + L_3 M_3 = 6EI \left(\frac{-qL_3^3}{24EI} - \frac{qL_2^3}{24EI} \right)$$

Comme: $M_1 = M_3$; $L_2 = L_3 = L$ et $L_1 = 0$,

On trouve un système de deux équations à deux inconnus :

$$\begin{cases} 2M_1 + M_2 = \frac{-qL^2}{4} \\ M_1 + 2M_2 = \frac{-qL^2}{4} \end{cases}$$

Finalement : $M_1 = M_2 = M_3 = -\frac{qL^2}{12}$

III.2.3 – Application

Soit une poutre continue à trois travées, encastrée à ses extrémités A et D et reposant sur des appuis simples en B et C. Les travées AB et CD sont soumises à une charge ponctuelle centré F=2400daN. La travée centrale BC est soumise à une charge uniforme répartie q=1600daN/m.

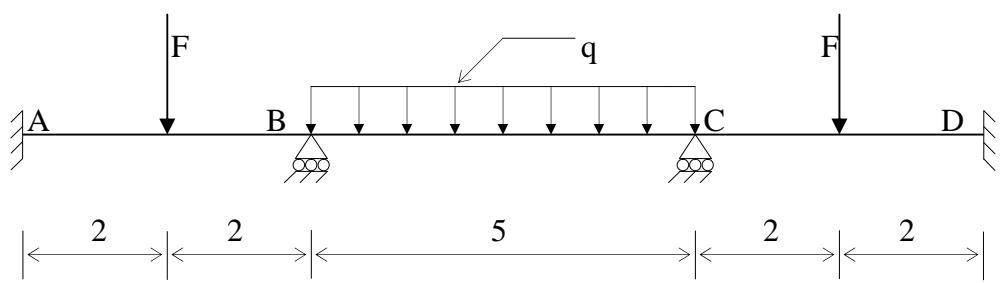
On donne :

- AB=CD=4 m
- BC=5 m
- EI=C^{te}.

1 – En utilisant la méthode de CLAPEYRON (Méthode des trois moments), déterminer les moments fléchissant M_A , M_B , M_C et M_D .

2 – Ecrire les équations des moments fléchissant et efforts tranchant le long de la poutre ABCD ; puis tracer les diagrammes correspondants.

3 - En déduire les actions de liaisons en A, B, C et D.



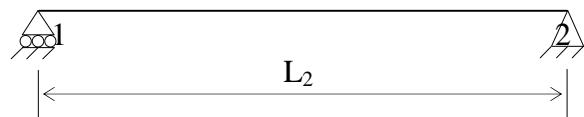
Chapitre IV :

LES THEOREMES ENERGETIQUES

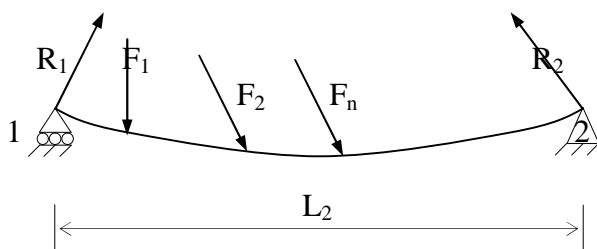
I – INTRODUCTION

- Etat initial :

Le poids propre de la poutre est négligé, aucune force n'agit sur le solide.



- Etat final:



Après l'application d'un certain nombre de forces extérieures connues, le solide se déforme et prend une nouvelle position d'équilibre.

Le théorème d'accroissement d'énergie cinétique appliqué entre les deux instants correspondants à l'état initial et à l'état final donne :

Le travail des forces extérieures + le travail des forces intérieures = l'énergie cinétique.

D'après les hypothèses de la RDM, les charges agissent lentement donc la vitesse tend vers zéro ce qui signifie que l'énergie cinétique est nulle.

$$\mathbf{W}_{\text{ext}} + \mathbf{W}_{\text{int}} = \mathbf{0}$$

On note par :

* W_{ext} : Le travail de toutes les forces extérieures appliquées au solide pendant la déformation élastique de l'état initial à l'état final.

* W_{int} : Représente le travail des forces intérieures au solide pendant la déformation.

Remarque :

Si les appuis sont fixes c'est à dire que les points d'applications des actions de contact aux appuis (les forces R_1 et R_2) sont immobiles, le travail des actions aux appuis est nul d'où :

$$W_{ext} = W(F_1) + W(F_2) + \dots + W(F_n).$$

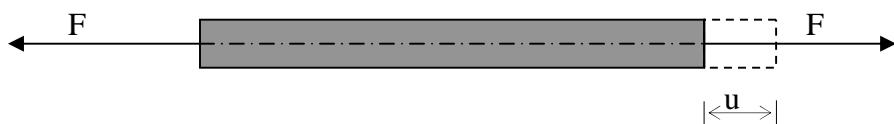
Par définition :

On appelle énergie de déformation, noté par W , le travail des forces intérieures changé de signe.

$$\begin{cases} W = -W_{int} \\ W = W_{ext} \end{cases}$$

II- TRAVAIL DES FORCES EXTERIEURES, ENERGIE DE DEFORMAION

II.1- Poutre soumise à un effort normal



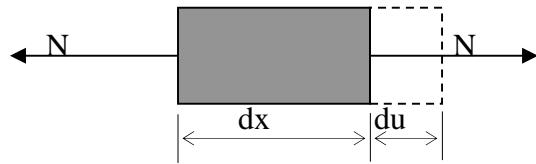
$$F = k \cdot u$$

La déformation est élastique implique : $0 \leq F \leq F_e$

$$dW_{ext} = F \, du$$

$$\begin{aligned} W_{ext} &= \int_0^u F \, du \\ &= \int_0^u k \cdot u \, du \end{aligned}$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \, F \cdot u.$$



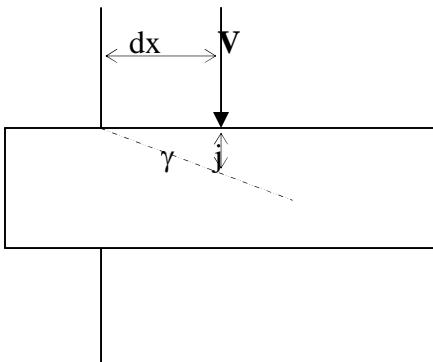
$$dW = \frac{1}{2} N du$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L N du$$

Connaissant : $\frac{du}{dx} = \frac{N}{ES} \Rightarrow du = \frac{N}{ES} dx.$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{ES} dx.$$

II.2- Poutre soumise à un effort tranchant



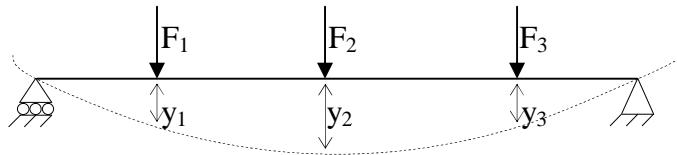
$$W_{ext} = \frac{1}{2} V j$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \frac{V}{S} = G\gamma \\ \gamma = \frac{V}{GS} \\ j = \gamma dx \quad (\gamma \ll 1) \end{array} \right. \longrightarrow dW_{ext} = \frac{1}{2} V \cdot \frac{V}{GS} \cdot dx$$

Par la suite :

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{V^2}{GS} dx.$$

II.3 - Poutre soumise à un moment fléchissant



$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

Par la suite :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} \, dx.$$

II.4 - Poutre soumise à une torsion

$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{2} C \cdot \alpha$$

$$dW = \frac{1}{2} C \cdot d\alpha$$

$$d\alpha = \theta \cdot dx \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{C}{GI_0} dx$$

$$\text{d'où :} \quad dw = \frac{C^2}{2GI_0} dx$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{C^2}{GI_0} \, dx.$$

Par sommation , l'énergie total de déformation s'écrit de la façon suivante :

$$W = \frac{1}{2} \left[\int_0^L \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{M^2}{EI} + \frac{V^2}{GS} + \frac{C^2}{GI_0} \right) dx \right]$$

De plus le travail total des Forces extérieures est :

$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{2} [F.u + \sum V_i j_i + \sum F_i y_i + \sum C_i \alpha_i]$$

III - LES THEOREMES ENERGETIQUES

III.1 - Théorème de CASTIGLIANO

La dérivée partielle de l'énergie potentielle d'un système par rapport à une force ; est égale au déplacement du point d'application de cette force suivant sa ligne d'action.

En fait, il s'agit de la projection du déplacement total suivant la direction considérée.

$$\frac{\partial W}{\partial F_i} = U_{F_i}^F$$

$U_{F_i}^F$: Déplacement dans la direction de F_i dû au cas de charge F

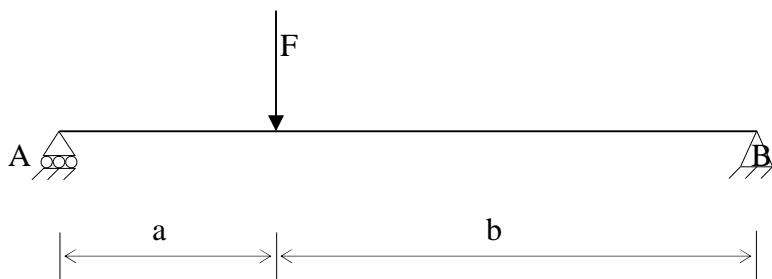
Remarque :

B. Ce théorème est général, il s'applique aussi bien à une force qu'à un moment, dans ce cas $U_{F_i}^F$ représente alors une rotation.

Applications :

I - A partir de la poutre suivante, d'inertie constante, soumise à une force concentrée F .

En appliquant le théorème de CASTIGLIANO, déterminer l'expression de la flèche (V_F), au niveau du point d'application de la force F .



V_F : déplacement du point d'application de F dans la direction de F

$$V_F = \frac{\partial W}{\partial F_i}$$

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx$$

$$V_F = \frac{\partial W}{\partial F_i} = \frac{1}{EI} \int_0^L \frac{M \cdot \partial M}{\partial F} dx .$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0 \leq x < a : } \quad M(x) = \frac{F \cdot b}{L} \cdot x \\ \mathbf{a \leq x < L : } \quad M(x) = \frac{F \cdot a}{L} \cdot (L - x) \end{array} \right.$$

d'où l'expression de la flèche est :

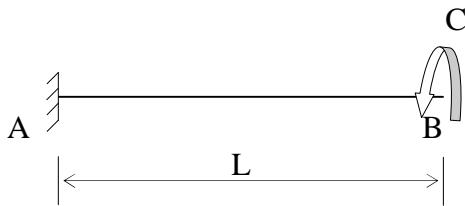
$$V_F = \frac{Fa^2b^2}{3EI}$$

Cas particulier $a = b = L/2$ (F au milieu)

$$V_F = \frac{FL^3}{48EI}$$

II- A partir de la poutre console suivante, d'inertie constante, soumise à un couple C au point B.

En appliquant le théorème de CASTIGLIANO, déterminer la rotation ω_B , à l'extrémité de cette poutre.



$$\omega_B = \frac{\partial W}{\partial C} = \frac{1}{EI} \int_0^L \frac{M \cdot \partial M}{\partial C} dx$$

$$0 \leq x < L : M(x) = C$$

$$\text{On trouve : } \omega_B = \frac{CL}{EI}$$

III.2 - Théorème de la charge fictive

Le théorème de CASTIGLIANO permet seulement de déterminer le déplacement suivant la direction de la force considérée.

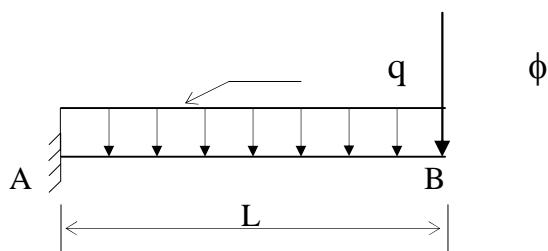
Par ailleurs, on peut avoir besoin de déterminer les déplacements des points quelconques dans n'importe quelles directions. Pour cela on peut appliquer en un point voulu, suivant une direction choisie, une force fictive notée souvent par ϕ , puis former l'expression de l'énergie interne du système y compris la force fictive.

En dérivant l'expression de l'énergie de déformation par rapport à la force fictive on trouve la valeur de déplacement du point considérée dans la direction de la charge fictive, en prenant soin évidemment d'annuler la charge fictive dans l'expression finale .

Applications :

I - A partir de la poutre console suivante, d'inertie constante, soumise à une charge répartie q .

En appliquant le théorème de la charge fictive, déterminer l'expression de la flèche (V_B), à l'extrémité de cette poutre.



$$V_B = \frac{1}{EI} \int_0^L \frac{M \partial M}{\partial \Phi} \cdot dx$$

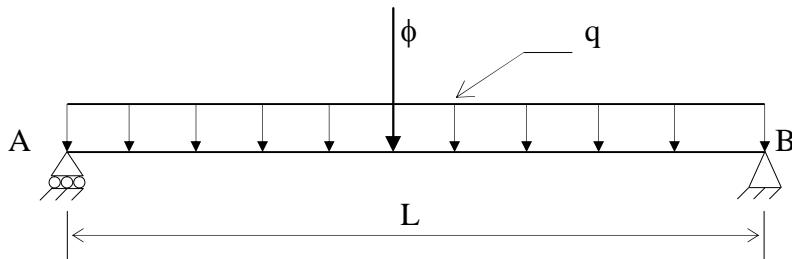
$$0 \leq x < L: M(x) = -\phi(L-x) - q \frac{(L-x)^2}{2}$$

d'où l'expression de la flèche est :

$$V_B = \frac{qL^4}{8EI}$$

II - A partir de la poutre suivante, d'inertie constante, soumise à une charge uniformément répartie q.

En appliquant le théorème de la charge fictive, déterminer l'expression de la flèche (V), au milieu de cette poutre.



Soit ϕ une charge fictive appliquée au milieu de la poutre (Puisque nous voulons chercher la flèche au milieu de la poutre)

$$V = \frac{\partial W}{\partial \phi}$$

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx$$

$$V = \frac{\partial W}{\partial \phi} = \frac{1}{EI} \int \frac{M \partial M}{\partial \phi} dx$$

$$\begin{cases} 0 \leq x < \frac{L}{2} : M(x) = (q \frac{L}{2} + \frac{\phi}{2})x - q \frac{x^2}{2} \\ \frac{L}{2} \leq x < L : M(x) = (q \frac{L}{2} + \frac{\phi}{2})x - q \frac{x^2}{2} - \phi(x - \frac{L}{2}) \end{cases}$$

d'où l'expression de la flèche est :

$$v = \frac{5qL^4}{384EI}$$

III.3 - Théorème de MENABREA

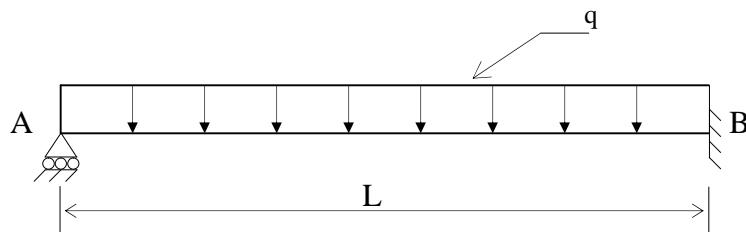
La dérivée partielle de l'énergie par rapport aux réactions d'appuis immobiles est nulle. (Les réactions peuvent être des forces et des moments d'encastrements).

$$\frac{\partial W}{\partial R_i} = 0$$

Application :

A partir de la poutre suivante, d'inertie constante, soumise à une charge répartie q , reposant simplement au point A et encastrée au point B.

En appliquant le théorème de MENABREA, déterminer l'expression de la réaction d'appui au point A de cette poutre.



$$\frac{\partial W}{\partial R_A} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{EI} \int \frac{M \cdot \partial M}{\partial R_A} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^L \frac{M \cdot \partial M}{\partial R_A} = 0 \quad \text{Avec : } 0 \leq x < L : M(x) = R_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

d'où l'expression de la réaction d'appui R_A est :

$$R_A = \frac{3qL}{8}$$

III.4 - Théorème de réciprocité de MAXWELL-BETTI

Une structure à deux cas de charges différentes :

- Cas de charge 1 : F_i
- Cas de charge 2 : Q_j

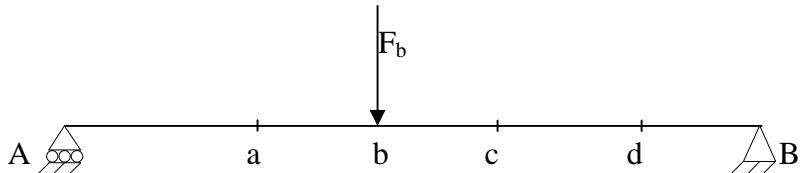
Le travail des forces du cas de charge (1) dans le déplacement du cas de charge (2) est égal au travail des forces du cas de charge (2) dans le déplacement du cas de charge (1).

$$\sum F_i U_{F_i}^{Q_j} = \sum Q_j U_{Q_j}^{F_i}$$

Exemple :

Une charge $F_b=900\text{daN}$ agissant en un point b d'une poutre, provoque en trois points a ,c et d des déplacements respectifs de 3 , 2 et 1mm.

En utilisant le théorème de MAXWELL-BETTI, calculer le déplacement du point b provoqué par les charges $F_a=1300\text{daN}$; $F_c=600\text{daN}$ et $F_d=1300\text{daN}$, agissant respectivement en a, c, et d.



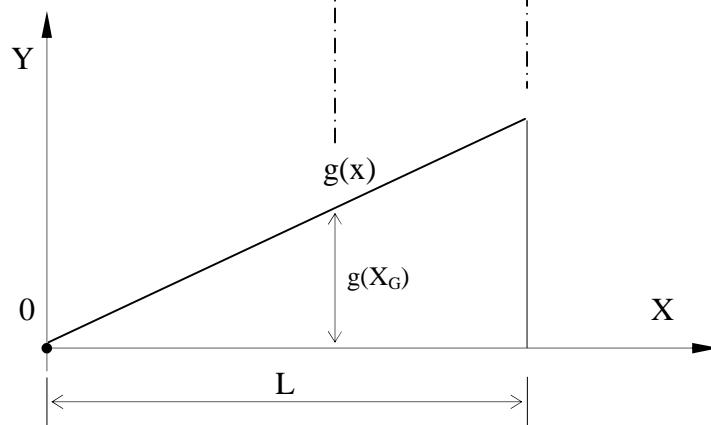
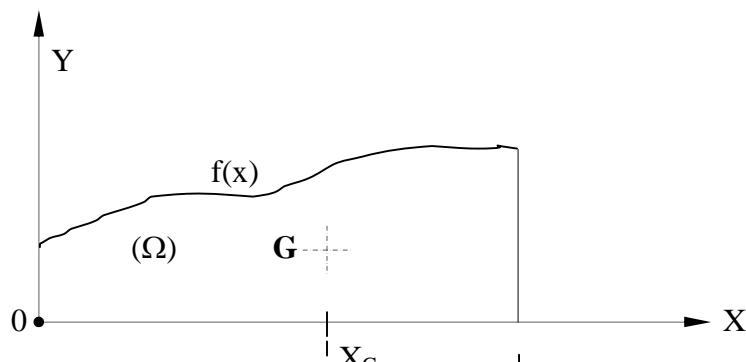
IV- METHODES DE CALCUL D'INTEGRALES

On peut calculer le produit $\int \frac{M \cdot \partial M}{\partial F} \cdot dx$, graphiquement sans passer par une intégration directe.

IV.1 - Méthode de VERECHANGUINE

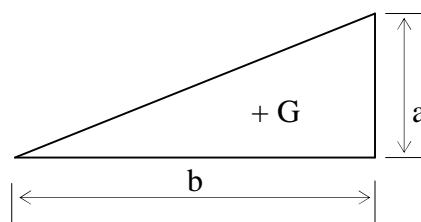
Le produit de deux intégrales dont l'une au moins linéaire est égal au produit de l'aire de l'épure non linéaire par l'ordonnée de son centre de gravité mesuré sur l'épure linéaire.

$$\mathbf{I} = \int_0^L f(x)g(x)dx = \Omega \mathbf{g}(\mathbf{x}_G)$$



Rappel de Certaines Propriétés Géométriques :

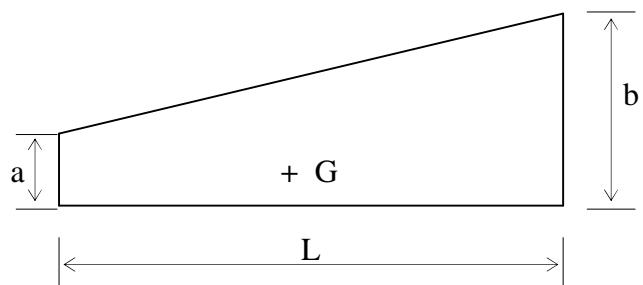
- Triangle:



$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \frac{a \cdot b}{2} \\ X_G = \frac{2b}{3} \\ Y_G = \frac{a}{3} \end{array} \right.$$

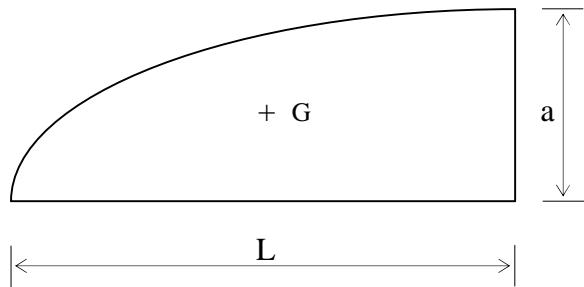
- Trapèze :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \frac{a+b}{2} \cdot L \\ X_G = \frac{(a+2b)L}{3(a+b)} \\ Y_G = \frac{a+b}{3} - \frac{ab}{3(a+b)} \end{array} \right.$$

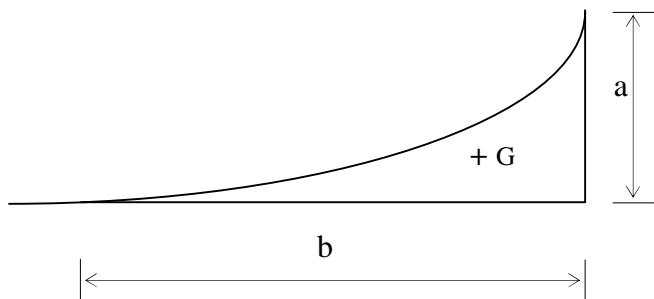


- **Parabole :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \frac{2.ab}{3} \\ X_G = \frac{5.b}{8} \\ Y_G = \frac{3.a}{8} \end{array} \right.$$



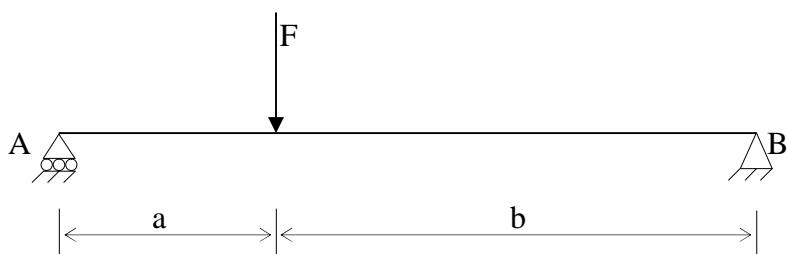
$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \frac{a.b}{3} \\ X_G = \frac{3.b}{4} \\ Y_G = \frac{a}{4} \end{array} \right.$$



Application :

A partir de la poutre suivante, d'inertie constante, soumise à une force concentrée F.

En appliquant la méthode de VERECHANGUINE, pour le calcul d'intégrale, déterminer l'expression de la flèche (V_F), au niveau du point d'application de la force F.

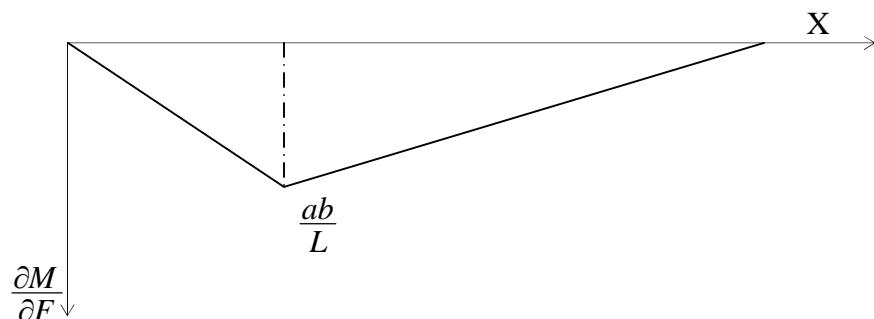
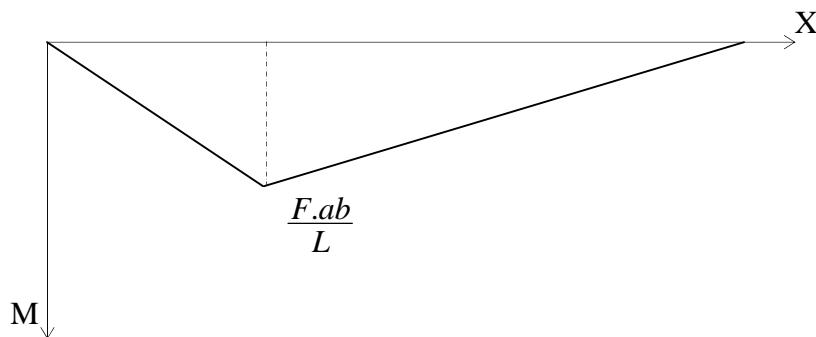
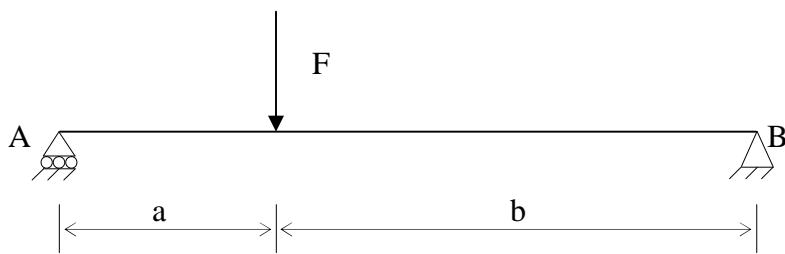


V_F : déplacement du point d'application de F dans la direction de F

$$V_F = \frac{\partial W}{\partial F_i} = \frac{1}{EI} \int_0^L \frac{M \cdot \partial M}{\partial F} dx .$$

Diagrammes des Moments :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x < a : M(x) = \frac{F.b}{L} \cdot x \\ a \leq x < L : M(x) = \frac{F.a}{L} \cdot (L-x) \end{array} \right.$$



d'où l'expression de la flèche est :

$$V_F = \frac{Fa^2b^2}{3LEI}$$

Cas particulier $a = b = L/2$ (F au milieu)

$$V_F = \frac{FL^3}{48EI}$$

IV.2 – Les intégrales de Mohr

Connaissant les moments d'extrémités, on peut calculer graphiquement le produit $\frac{1}{EI} \int_0^L M_1 M_2 dx$, en utilisant les abaques de Mohr. (Voir Annexes 1 et 2 aux pages suivantes).

Annexe :

Tableau des intégrales de MOHR : $\int^L m_i(x) m_j(x) dx$

$m_j(x)$	M_j	M_j	M_j	M_j	M_j
$m_i(x)$					
M_i	$LM_i M_j$	$\frac{1}{2} LM_i M_j$	$\frac{1}{3} LM_i (M_j + M')$	$\frac{2}{3} LM_i M_j$	$\frac{1}{3} LM_i M_j$
M'_i	$\frac{1}{2} LM_i M_j$	$\frac{1}{3} LM_i (2M_j + M')$	$\frac{1}{3} LM_i M_j$	$\frac{5}{12} LM_i M_j$	$\frac{1}{4} LM_i M_j$
M_i	$\frac{1}{2} LM_i M_j$	$\frac{1}{6} LM_i (M_j + 2M')$	$\frac{1}{3} LM_i M_j$	$\frac{1}{4} LM_i M_j$	$\frac{5}{12} LM_i M_j$
M'_i	$\frac{1}{2} LM_i M_j$	$\frac{1}{6} LM_i (2M_i + M')$	$\frac{1}{3} LM_i M_j$	$\frac{1}{12} LM_i M_j$	$\frac{1}{12} LM_i M_j$
M_i	$\frac{1}{2} LM_i M_j$	$\frac{1}{6} LM_i (M_i + M')$	$\frac{1}{3} LM_i M_j$	$\frac{1}{12} LM_i M_j$	$\frac{1}{12} LM_i M_j$
M'_i	$\frac{1}{2} LM_i (M_i + M')$	$\frac{1}{6} LM_i (2M_i + M')$	$\frac{1}{3} LM_i (M_i + M')$	$\frac{1}{12} LM_i$ $(5M_i + 3M')$	$\frac{1}{12} LM_i$ $(3M_i + 5M')$
M_i	$\frac{1}{2} LM_i M_j$	$\frac{1}{6} LM_i M_j$	$\frac{1}{3} LM_i M_j$	$\frac{1}{12} LM_i$ $(5M_i + 3M')$	$\frac{1}{12} LM_i$ $(3M_i + 5M')$
M'_i	$\frac{1}{2} LM_i M_j$	$\frac{1}{6} LM_i (M_i + M')$	$\frac{1}{3} LM_i (2M_j + M_i M_j')$	$\frac{1}{12} LM_i$ $(5M_i + 3M')$	$\frac{1}{12} LM_i$ $(3M_i + 5M')$
M_i	$\frac{1}{2} LM_i M_j$	$\frac{1}{6} LM_i (M_i + M')$	$\frac{1}{3} LM_i (M_j + M_i M_j')$	$\frac{1}{12} LM_i$ $(5M_i + 3M')$	$\frac{1}{12} LM_i$ $(3M_i + 5M')$
M'_i	$\frac{1}{2} LM_i M_j$	$\frac{1}{6} LM_i (1 + \frac{x'}{L})$	$\frac{1}{3} LM_i M_j \left(1 + \frac{xx'}{L^2}\right)$	$\frac{1}{12} LM_i M_j$ $\left(3 + \frac{3x'}{L} - \frac{x'^2}{L^2}\right)$	$\frac{1}{12} LM_i M_j$ $\left(3 + \frac{3x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)$
M_i	$\frac{1}{2} LM_i M_j$	$\frac{1}{4} LM_i M_j$	$\frac{5}{12} LM_i M_j$	$\frac{17}{48} LM_i M_j$	$\frac{7}{48} LM_i M_j$
M'_i	$\frac{1}{2} LM_i M_j$	$\frac{1}{4} LM_i M_j$	$\frac{5}{12} LM_i M_j$	$\frac{17}{48} LM_i M_j$	$\frac{7}{48} LM_i M_j$

Dans le tableau, M_i , M_j , M'_i , M'_j , sont les extréums des fonctions $m_i(x)$ et $m_j(x)$. Ils sont à prendre en valeurs algébriques.

Application :

A partir de la poutre suivante, d'inertie constante, soumise à une force concentrée F . En appliquant les intégrales de Mohr, déterminer l'expression de la flèche (V_F), au niveau du point d'application de la force F .

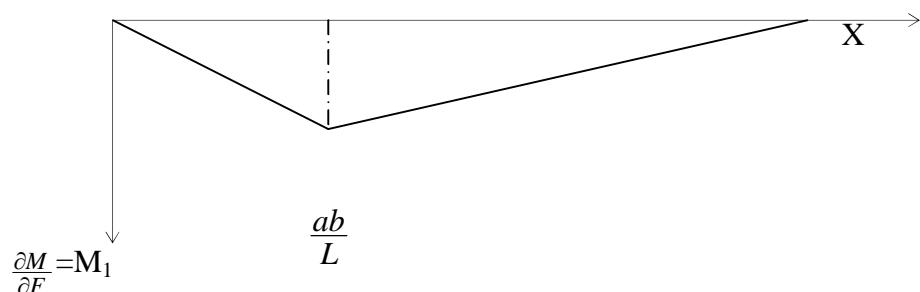
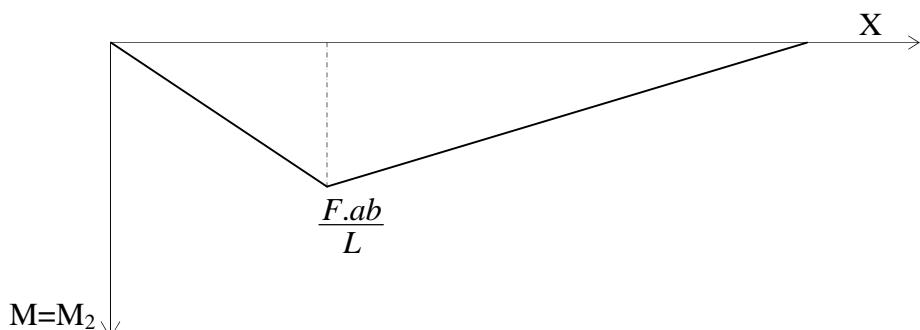
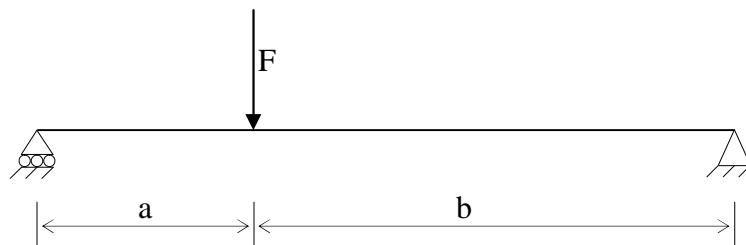


V_F : déplacement du point d'application de F dans la direction de F

$$V_F = \frac{\partial W}{\partial F_i} = \frac{1}{EI} \int_0^L \frac{M \cdot \partial M}{\partial F} \cdot dx .$$

Diagrammes des Moments :

$$\begin{cases} 0 \leq x < a : M(x) = \frac{F \cdot b}{L} \cdot x \\ a \leq x < L : M(x) = \frac{F \cdot a}{L} \cdot (L-x) \end{cases}$$



D'où l'expression de la flèche est :

$$V_F = \frac{1}{3} M_1 M_2$$

$$V_F = \frac{Fa^2b^2}{3LEI}$$

Chapitre V :

RESOLUTION DES STRUCTURES HYPERSTATIQUES PAR LA METHODE DES FORCES

I - OBJECTIF DE CETTE METHODE

L'objectif est de résoudre des structures hyperstatiques en utilisant la méthode des Forces.

Cette méthode est intéressante lorsque le degré d'hyperstaticité total $d^{\circ}\text{hyp} \leq 2$, mais elle peut s'appliquer quand le degré $d^{\circ}\text{hyp} > 2$, seulement il y a trop de diagrammes à tracer.

Cette méthode est basée sur les théorèmes Energétiques vus au chapitre précédent.

II – PRINCIPE DE LA METHODE

Soit une structure « S » , n fois hyperstatique , soumise à des charges quelconques.

Choisissons une structure isostatique fondamentale de référence « S_0 » , en effectuant n coupures : On fait autant de coupure que le degré d'hyperstaticité et on pose X_1 , X_2 ,..... X_n les réactions d'appuis ou sollicitations ainsi supprimées.

On appelle :

- Etat « 0 » : la structure isostatique S_0 soumise aux mêmes charges que la structure « S » .
- Etat « 1 » : la structure isostatique « S_1 » soumise à une force unitaire ou à un couple unitaire appliqué au niveau de la coupure « 1 » .
- Etat « n » : la structure isostatique « S_n » soumise à une force unitaire ou à un couple unitaire appliqué au niveau de la coupure « n » .

On obtient ainsi « $n+1$ » structure isostatique , dont « n » états de charges unitaires.

Associons à chaque état unitaire un facteur X_j ($j = 1$, n)

d'où :

$$\text{Etat hyperstatique} = \text{état} « 0 » + X_1.\text{état} « 1 » + X_2.\text{état} « 2 » + \dots + X_n.\text{état} « n »$$

On peut écrire donc :

$$\begin{cases} M = m_0 + \sum_{j=1}^n X_j m_j \\ N = n_0 + \sum_{j=1}^n X_j n_j \\ V = v_0 + \sum_{j=1}^n X_j v_j \end{cases}$$

III – ETAPES DE CALCULS

On suppose que la structure est soumise aux sollicitations N, V et M.

A partir du théorème MENABREA :

$$\frac{\partial W}{\partial X_i} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{EI} \int \frac{M \cdot \partial M}{\partial X_i} dx + \frac{1}{ES} \int \frac{N \cdot \partial N}{\partial X_i} dx + \frac{1}{GS} \int \frac{V \cdot \partial V}{\partial X_i} dx = 0 \quad \text{Avec : } i = 1, \dots, n$$

Or :

$$\begin{cases} m_i = \frac{\partial M}{\partial X_i} \\ n_i = \frac{\partial N}{\partial X_i} \\ v_i = \frac{\partial V}{\partial X_i} \end{cases}$$

En remplaçant M, N et V par leurs équations, on obtient :

$$\frac{1}{EI} \int (m_0 + \sum_{j=1}^n X_j m_j) m_i dx + \frac{1}{ES} \int (n_0 + \sum_{j=1}^n X_j n_j) n_i dx + \frac{1}{GS} \int (v_0 + \sum_{j=1}^n X_j v_j) v_i dx = 0$$

$$X_j \int \left(\frac{m_i m_j}{EI} + \frac{n_i n_j}{ES} + \frac{v_i v_j}{GS} \right) dx = - \int \left(\frac{m_0 m_i}{EI} + \frac{n_0 n_i}{ES} + \frac{v_0 v_i}{GS} \right) dx$$

On pose :

$$\begin{cases} \lambda_{ij} = \int \left(\frac{m_i m_j}{EI} + \frac{n_i n_j}{ES} + \frac{v_i v_j}{GS} \right) dx \\ \lambda_{i0} = \int \left(\frac{m_0 m_i}{EI} + \frac{n_0 n_i}{ES} + \frac{v_0 v_i}{GS} \right) dx \end{cases}$$

pour $i=j$: $\lambda_{ij} = \lambda_{ii} = \int \left(\frac{m_i^2}{EI} + \frac{n_i^2}{ES} + \frac{v_i^2}{GS} \right) dx$

On obtient alors le système d'équations de la forme suivante :

$$\lambda_{ij} \cdot X_j = -\lambda_{i0} \quad (i=1 \dots n, j=1 \dots n)$$

C'est à dire :

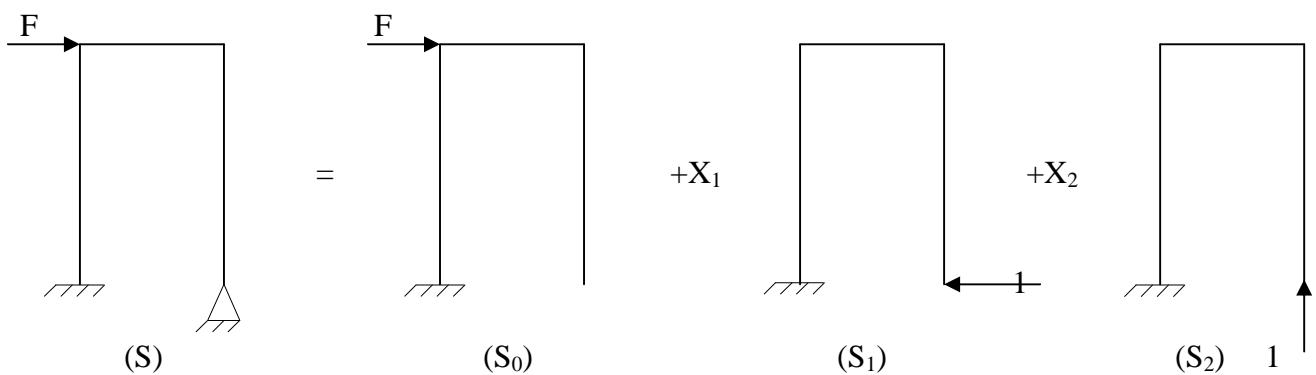
$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{11} \cdot X_1 + \lambda_{12} \cdot X_2 + \dots + \lambda_{1n} \cdot X_n = -\lambda_{10} \\ \lambda_{21} \cdot X_1 + \lambda_{22} \cdot X_2 + \dots + \lambda_{2n} \cdot X_n = -\lambda_{20} \\ \lambda_{n1} \cdot X_1 + \lambda_{n2} \cdot X_2 + \dots + \lambda_{nn} \cdot X_n = -\lambda_{n0} \end{array} \right.$$

On peut écrire sous forme Matricielle:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_{10} \\ \lambda_{20} \\ \dots \\ \lambda_{n0} \end{pmatrix}$$

Exemple :

Soit le portique suivant encastré dans un pieds de montant et articulé à l'autre.



Remarque:

Le déplacement dû à l'effort tranchant est négligeable devant celle de l'effort normal et moment fléchissant.

$$\begin{cases} M = m_0 + X_1 \cdot m_1 + X_2 \cdot m_2 \\ N = n_0 + X_1 \cdot n_1 + X_2 \cdot n_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial X_1} = m_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial M}{\partial X_2} = m_2 \\ \frac{\partial N}{\partial X_1} = n_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial X_2} = n_2 \end{cases}$$

En effet :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial X_1} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial X_2} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{EI} \int \frac{M \cdot \partial M}{\partial X_1} \cdot dx + \frac{1}{ES} \int \frac{N \cdot \partial N}{\partial X_1} \cdot dx = 0 \\ \frac{1}{EI} \int \frac{M \cdot \partial M}{\partial X_2} \cdot dx + \frac{1}{ES} \int \frac{N \cdot \partial N}{\partial X_2} \cdot dx = 0 \end{cases}$$

En remplaçant M et N par leur équation , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{1}{EI} \int (m_0 + X_1 \cdot m_1 + X_2 \cdot m_2) \cdot m_1 \cdot dx + \frac{1}{ES} \int (n_0 + X_1 \cdot n_1 + X_2 \cdot n_2) \cdot n_1 \cdot dx = 0 \\ \frac{1}{EI} \int (m_0 + X_1 \cdot m_1 + X_2 \cdot m_2) \cdot m_2 \cdot dx + \frac{1}{ES} \int (n_0 + X_1 \cdot n_1 + X_2 \cdot n_2) \cdot n_2 \cdot dx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 \cdot \int \left[\frac{m_1^2}{EI} + \frac{n_1^2}{ES} \right] \cdot dx + X_2 \cdot \int \left[\frac{m_1 \cdot m_2}{EI} + \frac{n_1 \cdot n_2}{ES} \right] \cdot dx = - \int \left[\frac{m_0 \cdot m_1}{EI} + \frac{n_0 \cdot n_1}{ES} \right] \cdot dx \\ X_1 \cdot \int \left[\frac{m_1 \cdot m_2}{EI} + \frac{n_1 \cdot n_2}{ES} \right] \cdot dx + X_2 \cdot \int \left[\frac{m_2^2}{EI} + \frac{n_2^2}{ES} \right] \cdot dx = - \int \left[\frac{m_0 \cdot m_2}{EI} + \frac{n_0 \cdot n_2}{ES} \right] \cdot dx \end{cases}$$

Or :

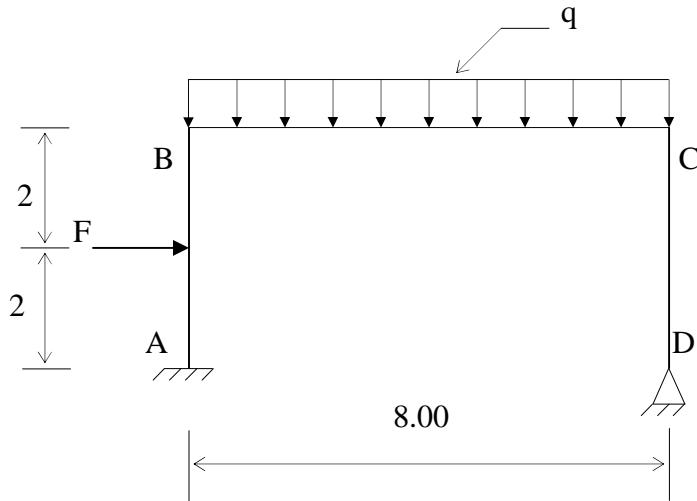
$$\begin{cases} \lambda_{11} = \int \left[\frac{m_1^2}{EI} + \frac{n_1^2}{ES} \right] \cdot dx \\ \lambda_{12} = \lambda_{21} = \int \left[\frac{m_1 \cdot m_2}{EI} + \frac{n_1 \cdot n_2}{ES} \right] \cdot dx \\ \lambda_{22} = \int \left[\frac{m_2^2}{EI} + \frac{n_2^2}{ES} \right] \cdot dx \\ \lambda_{10} = \int \left[\frac{m_0 \cdot m_1}{EI} + \frac{n_0 \cdot n_1}{ES} \right] \cdot dx \\ \lambda_{20} = \int \left[\frac{m_0 \cdot m_2}{EI} + \frac{n_0 \cdot n_2}{ES} \right] \cdot dx \end{cases}$$

Par la suite , on écrit la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_{10} \\ \lambda_{20} \end{pmatrix}$$

IV – APPLICATION

Soit un portique encastré en A et articulé en D, les nœuds B et C sont rigides .Le montant AB est soumis à une charge ponctuelle centrée horizontale $F=3600$ daN. La traverse BC est soumise à une charge répartie uniforme verticale $q=1200$ daN/m.



On donne :

- * $AB = CD = 4 \text{ m}$
- * $BC = 8 \text{ m}$
- * $I_{AB} = I_{CD} = I$
- * $I_{BC} = 2I$
- * $E = C^{\text{te}}$

- 1- Calculer le degré d'hyperstaticité du portique.
- 2- Donner les configurations possibles de calcul pour la résolution avec la méthode des forces et des coupures.
- 3- Parmi les configurations, on retient celle où l'appui A est un encastrement.

- Ecrire le système à résoudre ($\lambda_{ij} \cdot X_j = -\lambda_{i0}$)
- Tracer les diagrammes M_0, m_i, \dots (i varie de 1 au nombre de degré d'hyperstaticité).
- Calculer les coefficients λ_{ij} et $-\lambda_{i0}$
- Résoudre le système trouvé. ($\lambda_{ij} \cdot X_j = -\lambda_{i0}$)

4- Tracer alors le diagramme du moment fléchissant M le long du portique.

5- Déterminer le déplacement horizontal au nœud C tel que :

$$u_c = \frac{1}{EI} \int M \cdot M_0 dx$$

M : moment fléchissant de la structure hyperstatique

M_0 : moment fléchissant de la structure isostatique associée soumise à une force horizontale unitaire au nœud C.

Nota : L'énergie de déformation due à l'effort tranchant est négligeable.

Chapitre VI :

LES LIGNES D'INFLUENCES

I – GENERALITES

Lorsqu'une pièce est soumise à l'action d'une charge quelconque fixe, d'abscisse α . On détermine la valeur d'un effet (qui peut-être déformation, moment fléchissant, effort normal, effort tranchant, réactions d'appuis...), produit dans ses diverses sections droites d'abscisses variables x .

Cet effet est une fonction de x et de α , et l'on peut écrire :

$$\xi = f(x, \alpha) \quad (1)$$

Par contre si la pièce est soumise à une charge quelconque mobile, d'abscisse variable α , on pourra déterminer la valeur de l'effet produit en chaque section droite, choisie à l'avance, et d'abscisse fixe x ; on écrira :

$$\xi = g(\alpha, x) \quad (2)$$

L'étude de la nouvelle fonction (2), permet en particulier de déterminer la position de la charge qui provoque, dans une section droite que l'on veut étudier, le plus grand effet produit sur la structure.

II – DEFINITIONS

II.1 – Lignes d'Influences

On appelle ligne d'influence le graphe représentatif d'un effet dû à une charge mobile unitaire d'abscisse α dans une section fixe d'abscisse x .

II.2 – Lignes Enveloppes

Les lignes d'influences permettent de calculer dans chaque section les valeurs extrêmes des sollicitations.

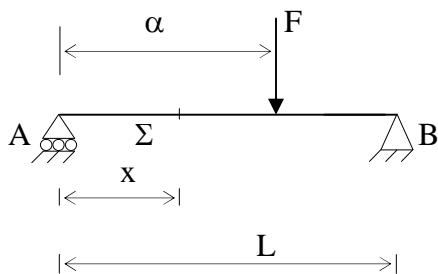
En portant les valeurs au droit de chaque section, on obtient les lignes enveloppes ou courbes enveloppes.

III – APPLICATION AUX POUTRES DROITES ISOSTATIQUES

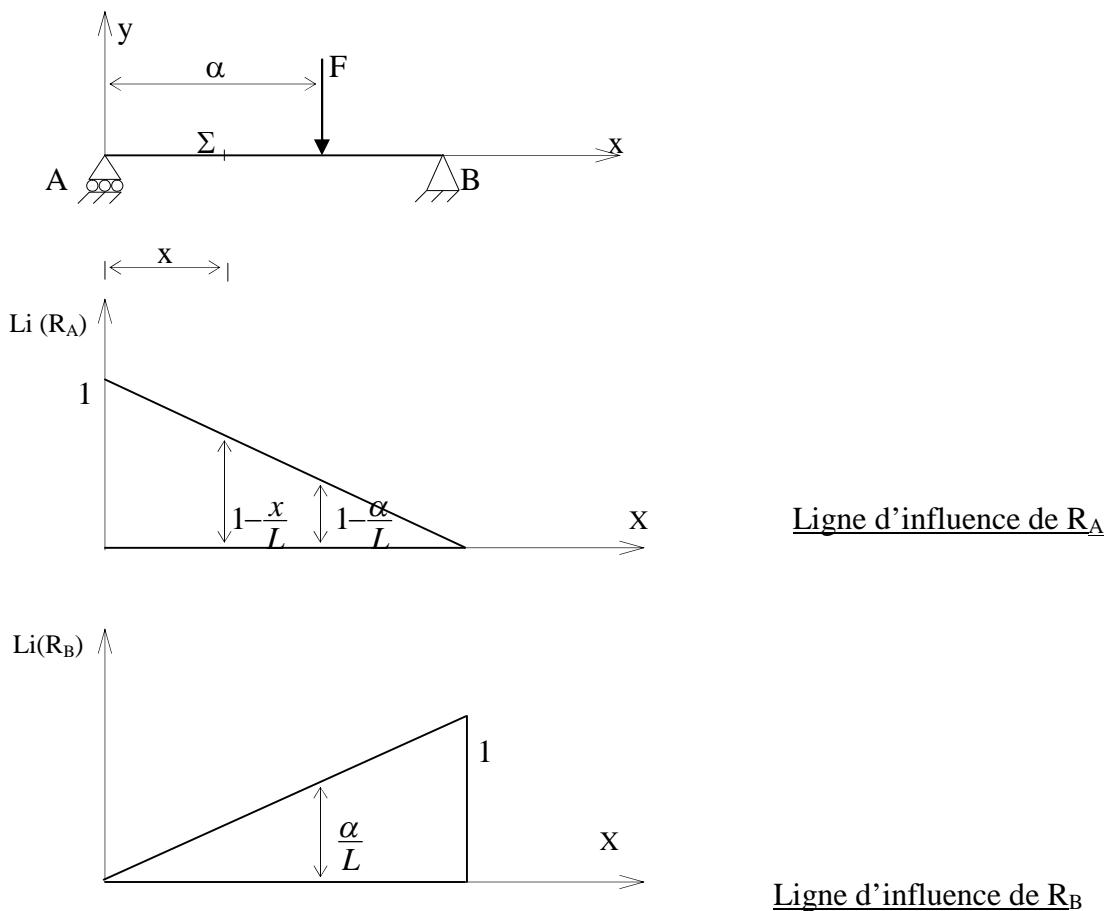
III.1 – Lignes d'influences des Réactions d'appuis

Sous l'effet d'une charge verticale unité ($F = 1$), d'abscisse α , les réactions d'appuis ont pour expression :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_A = (1 - \frac{\alpha}{L}) \\ R_B = \frac{\alpha}{L} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

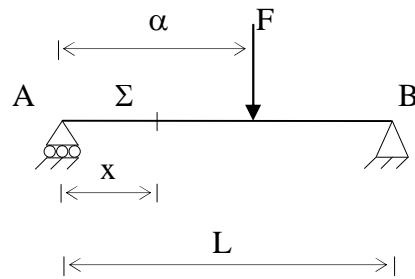


D'où le diagramme de la ligne d'influence :



III.2 – Ligne d'influence de l'effort tranchant

Sous l'effet d'une charge verticale unité ($F = 1$) d'abscisse α , l'effort tranchant dans la section droite d'abscisse x a pour expression :

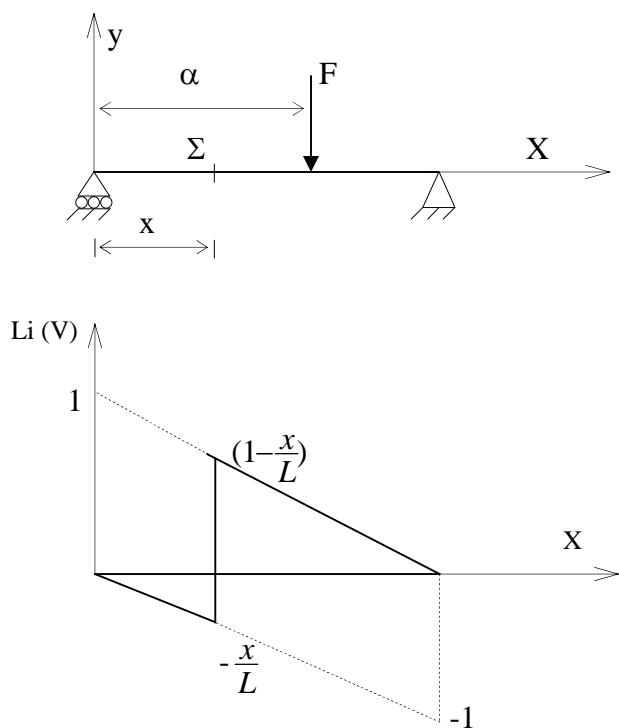


$$\begin{cases} x \leq \alpha : V(x) = (1 - \frac{x}{L}) & (1) \\ \alpha \leq x : V(x) = -\frac{x}{L} & (2) \end{cases}$$

La ligne d'influence de l'effort tranchant est donc définie par:

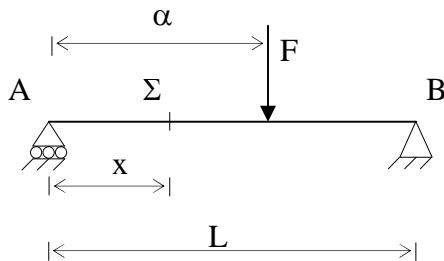
- L'équation (1) sur l'intervalle $[x, L]$.
- L'équation (2) sur l'intervalle $[0, x]$.

D'où le diagramme de la ligne d'influence :



III.3 – Ligne d'influence du moment fléchissant

Sous l'effet d'une charge verticale unité ($F = 1$) d'abscisse α , le moment fléchissant dans la section droite d'abscisse x a pour expression :

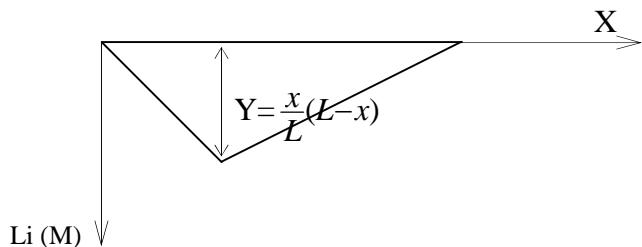
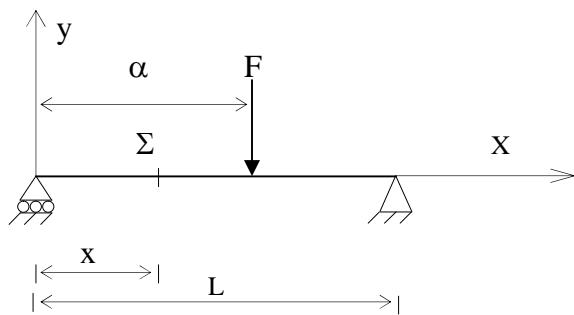


$$\begin{cases} x \leq \alpha : M(x) = (1 - \frac{\alpha}{L})x & (1) \\ \alpha \leq x : M(x) = (1 - \frac{x}{L})\alpha & (2) \end{cases}$$

La ligne d'influence du moment fléchissant est donc définie par:

- L'équation (1) sur l'intervalle $[x, L]$.
- L'équation (2) sur l'intervalle $[0, x]$.

D'où le diagramme de la ligne d'influence :



Cas particulier: $x = \alpha = \frac{L}{2} \Rightarrow y = \frac{L}{4}$

III.4 – Détermination des Sollicitations

- **Pour une Charge Concentrée :**

Pour une structure soumise à une charge concentrée F_i , l'expression des sollicitations est de la forme suivante :

- Réaction d'appui : $R = \sum_{i=1}^n F_i y_i$
- Effort tranchant : $V = \sum_{i=1}^n F_i y_i$
- Moment fléchissant : $M = \sum_{i=1}^n F_i y_i$

Tel que :

y_i : c'est l'ordonnée de F_i correspondant sur la ligne d'influence respectivement du réaction d'appui, effort tranchant et moment fléchissant.

- **Pour une Charge Répartie :**

Pour une structure soumise à une charge répartie q , l'expression des sollicitations est de la forme suivante :

- Réaction d'appui : $R = \int_{l_1}^{l_2} q \cdot y_i dy = q \cdot \Omega$
- Effort tranchant : $V = \int_{l_1}^{l_2} q \cdot y_i dy = q \cdot \Omega$
- Moment fléchissant : $M = \int_{l_1}^{l_2} q \cdot y_i dy = q \cdot \Omega$

Tel que :

Y_i : c'est l'ordonnée de l'origine et extrémité de la charge répartie sur la ligne d'influence, respectivement du réaction d'appui, effort tranchant et moment fléchissant.

Ω : c'est l'aire de la surface limitée par la charge répartie sur la ligne d'influence, respectivement du réaction d'appui, effort tranchant et moment fléchissant.

l_1, l_2 : c'est la position de l'origine et l'extrémité de la charge répartie.

Remarque :

Pour une structure, soumise simultanément à une charge concentrée $F(\alpha_i)$, et une charge répartie $q(\alpha)$. L'effet produit sur cette structure se fait par superposition :

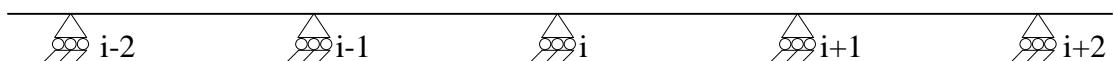
$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi(\alpha_i) \cdot Q(\alpha_i) + \int_{l_1}^{l_2} \xi(\alpha) \cdot q(\alpha) \cdot d\alpha$$

IV – APPLICATION AUX POUTRES CONTINUES HYPERSTATIQUES

On ne traite dans ce paragraphe que l'allure des lignes d'influences, afin de déterminer les travées à charger pour obtenir les moments maximums et minimums en un point de la poutre, sans connaître les valeurs des moments sur la ligne d'influence.

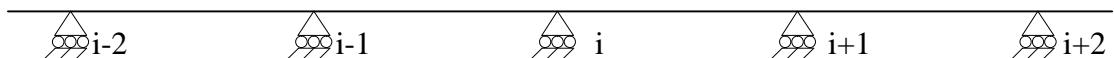
Exemple 1 :

Ligne d'influence de M_i (Section étudié en i sur appui) :



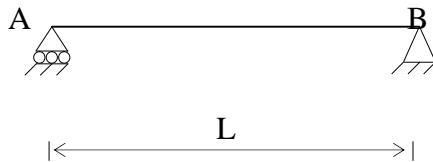
Exemple 2 :

Ligne d'influence de M_f d'une section Ω de la travée $(i-1 ; i)$:



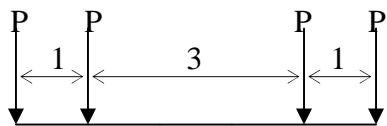
V – APPLICATION

Pour la section médiane ($x = \frac{L}{2}$) de la poutre suivante :



- 1- Tracer les lignes d'influences des réactions, de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

On donne le chargement composé par le groupe de forces suivant :



- 2- A partir de la ligne d'influence du moment fléchissant déjà tracée , calculer le moment fléchissant maximal que peut provoquer ce chargement dans la section médiane.
- 3- Calculer l'effort tranchant correspondant à partir de la ligne d'influence de l'effort tranchant.
- 4- Trouver les réactions d'appuis à partir des lignes d'influence.

On donne : $P = 100 \text{ KN}$
 $L = 10 \text{ m}$

BIBLIOGRAPHIE

1- Résistance des matériaux.

Marcel KERGUIGNAS
Guy CAIGNAERT
4^o édition
BORDAS, Paris, 1977
ISBN 2-04-010107-1

2 - Résistance des matériaux par la pratique .

Jean ROUX
Editions Eyrolles 1995
ISBN 2-212-00520-2

3 – Notions de résistance des matériaux .

Guy VILLARD
N^o d'édition :367/74
SNED- Alger 1974

4 – Calcul pratique des Structures.

Wolfgang A. JALIL
Philippe ADER
Editions Eyrolles , 1979 (2^o édition)

5 – Structures de Génie Civil

D-Didier
G-Simon
R-Pralat
Edition AFNOR 1998
ISBN AFNOR: 2-12-380213-1