Centre de formation Cnam – INPHB

Chaire des travaux publics

2015-2016

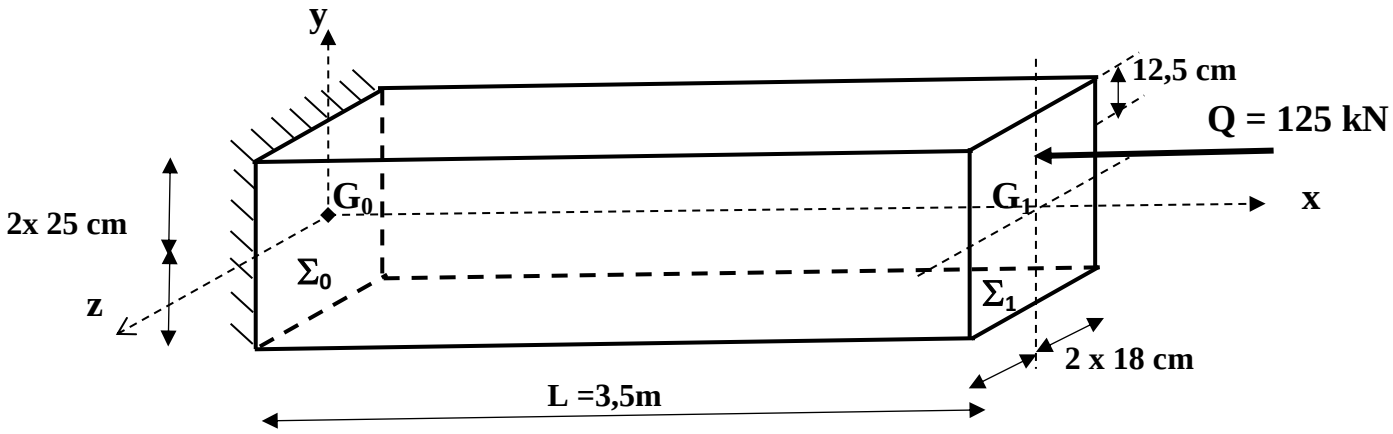
Résistance des matériaux pour l'ingénieur constructeur CCV 107

Professeur : TRA Bi et ZAGBAI

Examen de la deuxième session **Durée : 3 heures**

Polycopies et TD autorisés ***Calculatrices autorisée***

Exercice 1 : Etude d'une poutre console en béton armé



Poids propre de la poutre : Densité du béton 2,5

I.1 Indiquer la nature des sollicitations dans la poutre

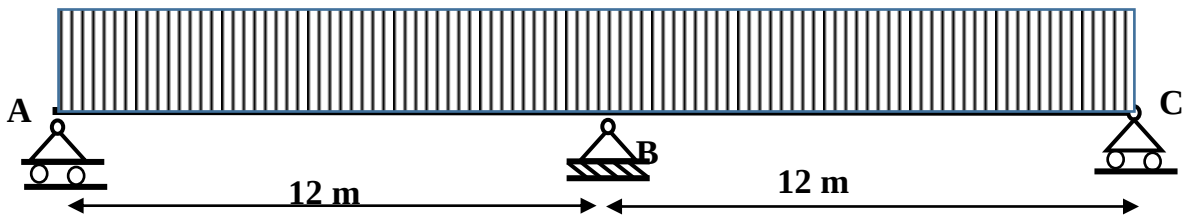
I.2 Déterminer et représenter les efforts internes dans la poutre

I.3 Déterminer la contrainte normale dans les sections Σ_0 et Σ_1

I.4 Déterminer et schématiser les contraintes tangentielles dans les sections Σ_0 et Σ_1

Exercice 2 : Etude d'une poutre continue à inertie constante

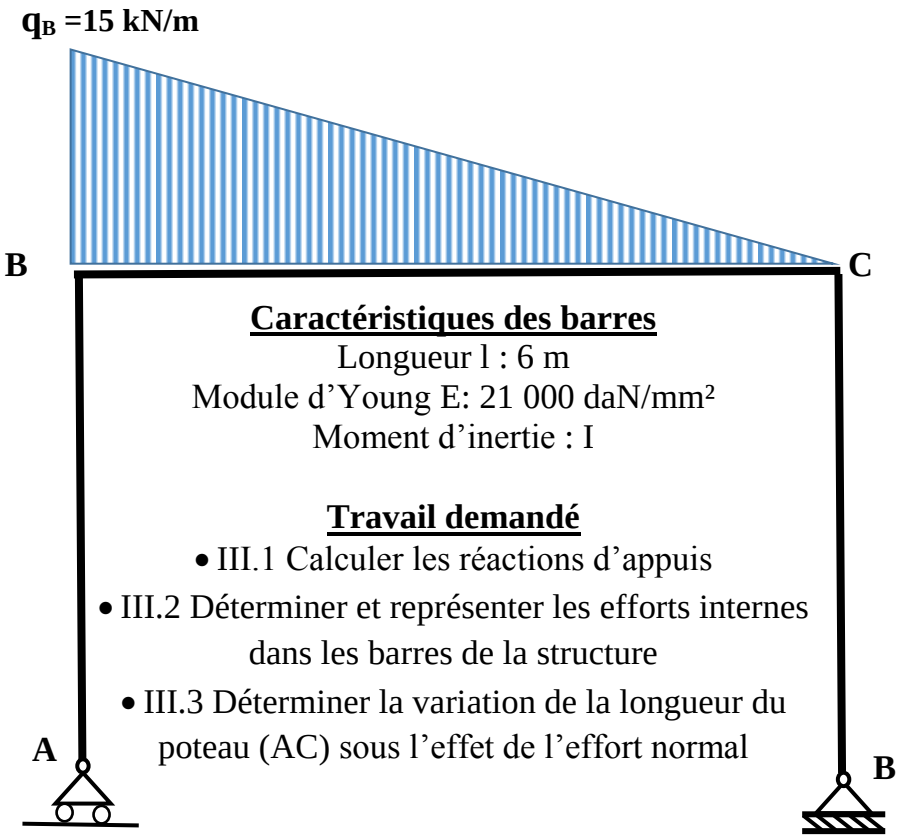
Q = 1,5 t /m



1/ Déterminer et représenter les efforts internes dans la poutre continue ci-dessus d'inertie I et de Module d'élasticité longitudinale E

2/ Calculer les réactions d'appuis (moments sur appuis, réactions verticales, réactions horizontales)

Exercice 3 : Etude d'un portique isostatique dont la traverse est soumise à une charge repartie triangulaire variant de q_B à 0



Caractéristiques des barres

Longueur l : 6 m

Module d'Young E: 21 000 daN/mm²

Moment d'inertie : I

Travail demandé

- III.1 Calculer les réactions d'appuis
- III.2 Déterminer et représenter les efforts internes dans les barres de la structure
- III.3 Déterminer la variation de la longueur du poteau (AC) sous l'effet de l'effort normal

Consignes Générales

- *La compréhension des questions fait partie de l'évaluation.*
- *Toute donnée manquante est laissée à votre initiative.*
- *S'il vous manque un résultat intermédiaire, faites des hypothèses cohérentes avec les données de l'examen.*
- *Seules les réponses faisant référence au numéro de la question seront évaluées.*

2) Déterminer la section S_2 qui permet de garder la poutre en position horizontale.
3) Calculer σ et déterminer les sections S_1 et S_2 pour que les deux barres restent dans le domaine élastique.

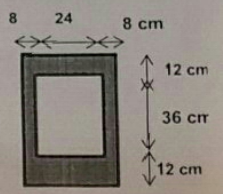
Consignes Générales

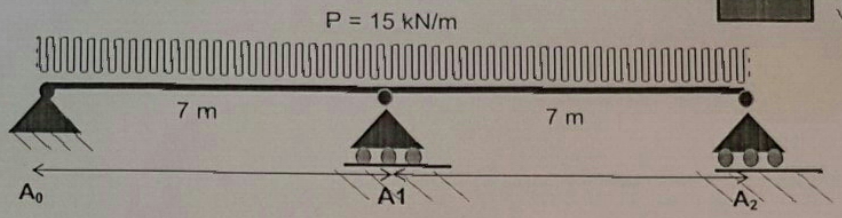
- *La compréhension des questions fait partie de l'évaluation.*
- *Toute donnée manquante est laissée à votre initiative.*
- *S'il vous manque un résultat intermédiaire, faites des hypothèses cohérentes avec les données de l'examen.*
- *Seules les réponses faisant référence au numéro de la question seront évaluées.*

Exercice 2 :

Étude d'une poutre continue à section creuse sur trois appuis

1. Déterminer et représenter les efforts internes dans la poutre continue ci-dessous
2. Calculer les réactions d'appuis
3. Déterminer les contraintes normales extrêmes en A_1
4. Déterminer les contraintes normales maximales en A_2





Exercice 2 :

Une poutre horizontale rigide AB (voir figure ci-dessous), de longueur l, est fixée à deux barres cylindriques élastiques verticales AA' et BB' aux points A et B : On applique une force au point C de la barre AB.

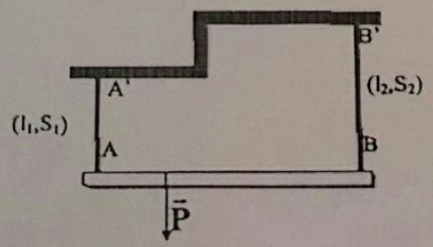


Figure 0

On néglige les poids propres de AB, AA' et BB'.
On donne P= 3000 N ; l_1 = 500 mm ; l_2 = 700 mm, E = 20.10^4 N/mm^2 , S_1= S_2 = 40 mm^2;
σ_e = 300 N/ mm^2, le coefficient de sécurité S= 6, AC = AB/3

1) Calculer les allongements Δl_1 et Δl_2 des deux barres AA' et BB', représenter l'allure de la poutre AB après chargement.

le cnam
Conservatoire national des arts et métiers

Centre de formation Cnam – INPHB

Chaire des travaux publics

2015-2016

Résistance des matériaux pour l'ingénieur constructeur CCV 107

Professeur : TRA Bi et ZAGBAÏ

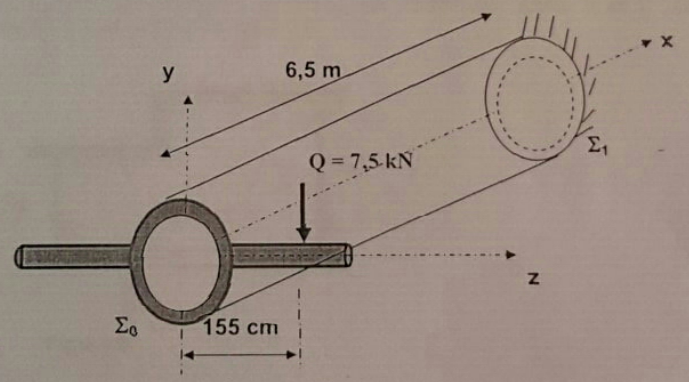
Examen de la première session — **Durée : 3 heures**

Polycopies et TD autorisés — *Calculatrices autorisées*

Exercice 1 :

Étude d'un tronçon de poutre cylindrique

1. Indiquer la nature des efforts auxquels est soumise une section courant de la poutre
2. Donner les expressions des différents moments dans une section courante de la poutre et leurs valeurs dans les sections Σ_0 et Σ_1
3. Calculer les contraintes tangentielles dans les sections Σ_0 et Σ_1
4. Calculer les contraintes normales dans les sections Σ_0 et Σ_1

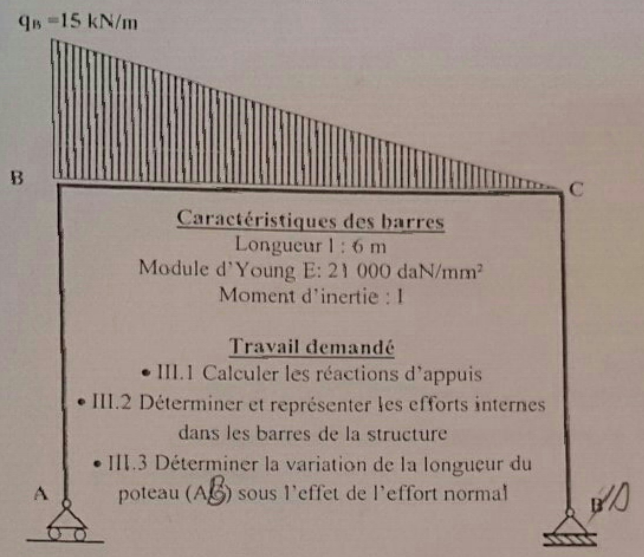


Rayon extérieur du cylindre : 40 cm ; épaisseur : 3 cm

le cnam

Conservatoire national des arts et métiers

Exercice 3 : Etude d'un portique isostatique dont la traverse est soumise à une charge repartie triangulaire variant de q_B à 0



Caractéristiques des barres

Longueur l : 6 m

Module d'Young E: 21 000 daN/mm²

Moment d'inertie : I

Travail demandé

- III.1 Calculer les réactions d'appuis
- III.2 Déterminer et représenter les efforts internes dans les barres de la structure
- III.3 Déterminer la variation de la longueur du poteau (AB) sous l'effet de l'effort normal

Consignes Générales

- *La compréhension des questions fait partie de l'évaluation.*
- *Toute donnée manquante est laissée à votre initiative.*
- *S'il vous manque un résultat intermédiaire, faites des hypothèses cohérentes avec les données de l'examen.*
- *Seules les réponses faisant référence au numéro de la question seront évaluées.*

le cnam

Conservatoire national des arts et métiers

Centre de formation Cnam – INPHB

Chaire des travaux publics

2015-2016

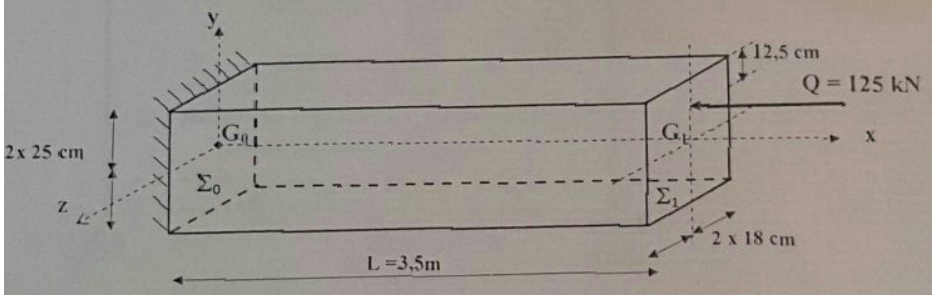
Résistance des matériaux pour l'ingénieur constructeur CCV 107

Professeur : TRA Bi et ZAGBAI

Examen de la deuxième session — **Durée : 3 heures**

Polycopies et TD autorisés — *Calculatrices autorisée*

Exercice 1 : Etude d'une poutre console en béton armé



Poids propre de la poutre : Densité du béton 2,5

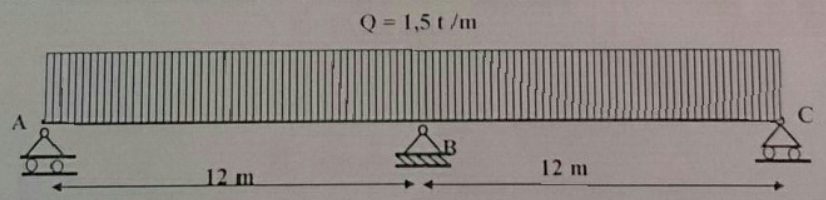
I.1 Indiquer la nature des sollicitations dans la poutre

I.2 Déterminer et représenter les efforts internes dans la poutre

I.3 Déterminer la contrainte normale dans les sections Σ_0 et Σ_1

I.4 Déterminer et schématiser les contraintes tangentielles dans les sections Σ_0 et Σ_1

Exercice 2 : Etude d'une poutre continue à inertie constante



1/ Déterminer et représenter les efforts internes dans la poutre continue ci-dessus d'inertie I et de Module d'élasticité longitudinale E

2/ Calculer les réactions d'appuis (moments sur appuis, réactions verticales, réactions horizontales)

le cnam

Conservatoire national des arts et métiers

Centre de formation Cnam – INPHB

Chaire des travaux publics

2016-2017

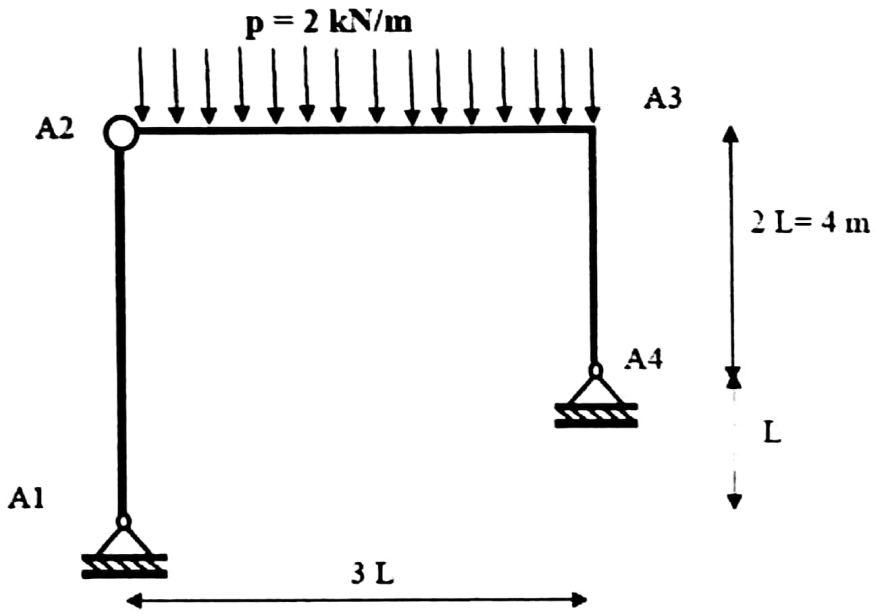
Résistance des matériaux pour l'ingénieur constructeur CCV 107

Professeurs : TRA Bi et ZAGBAI Arnaud

Examen de la première session — **Durée : 3 heures**

Polycopies et TD autorisés — ***Calculatrices autorisées***

Exercice 1 : (6 points)



1/ Calcules les réactions d'appuis

2/ Déterminer et représenter les efforts internes (M,N,T)

3/ Déterminer la variation de la longueur du poteau (A1. A2)l

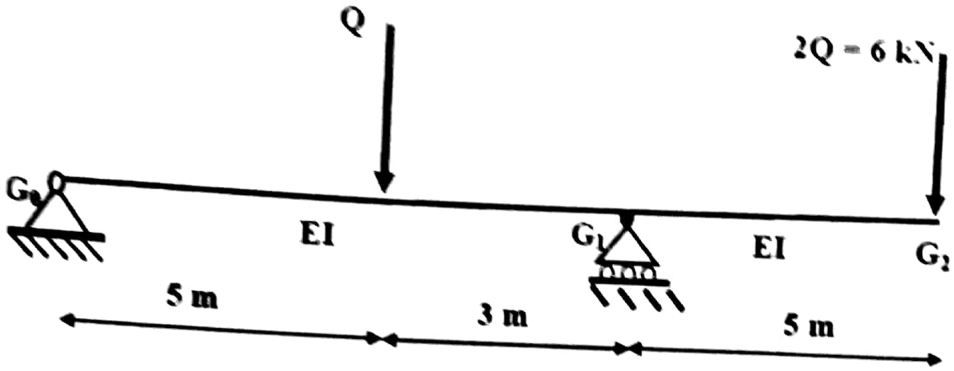
Module d'Young E: 21 000 daN/mm² Moment d'inertie : I. Section S= 40 cm²

Scanned by CamScanner

le cnam

Conservatoire national des arts et métiers

Exercice 2 : (4 points)

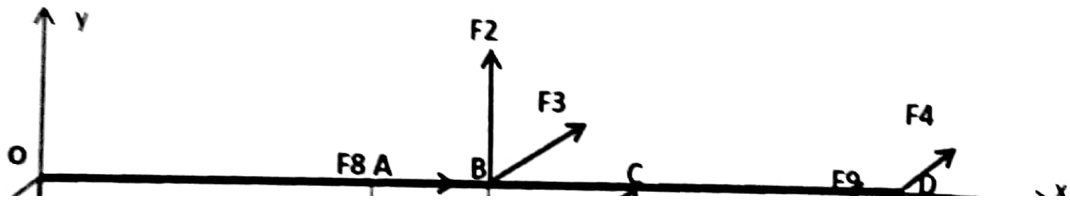


1/ Représenter les diagrammes des efforts internes dans la poutre ci-dessus

2/ Calculer les contraintes normales extrêmes dues au moment fléchissant dans les sections d'appui

Exercice 3 : (6 points)

On considère un arbre de transmission donné par la figure ci-dessous et les actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées. On se propose de calculer la résistance de l'arbre.



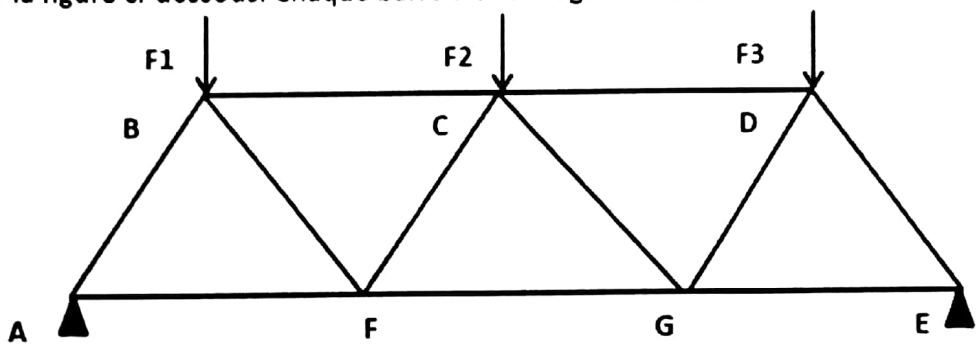
Scanned by CamScanner

3) Calculer le diamètre minimal (d) de l'arbre à partir de la condition de rigidité suivante : $\theta \leq \theta_{lim}$ avec $\theta = |M_t| / G*I*S$ (θ trouvé à partir de la valeur absolue de M_t) ; où I = module d'inertie de la section circulaire S.
4) Pour ce diamètre, calculer la contrainte tangentielle maximale en torsion et conclure ;
5) Pour le diamètre trouvé, vérifier la résistance de la section la plus sollicitée vis-à- vis du cisaillement Tmoyen

On se propose de remplacer l'arbre plein de diamètre d = 30 mm par un arbre creux de diamètre intérieur d1 = 22 mm. Calculer le diamètre d2 de façon à ce que la contrainte tangentielle maximale en torsion garde la même valeur que celle de l'arbre plein.

Exercice 4 : (4 points)

On considère un système triangulé reposant sur deux appuis simples A et E comme indiqué sur la figure ci-dessous. Chaque barre a une longueur de 3 m.



Le système reçoit aux nœuds B,C et D respectivement les charges F1, F2 et F3.

On demande de :

1) Déterminer la nature du système (isostatique ou hyperstatique ?) ;
2) Calculer les réactions d'appui ;
3) Déterminer les efforts dans les barres par la méthode graphique de CREMONA.

On donne F1= F2= F3= 20 kN

NB : utiliser les feuilles millimétrées.

Consignes Générales

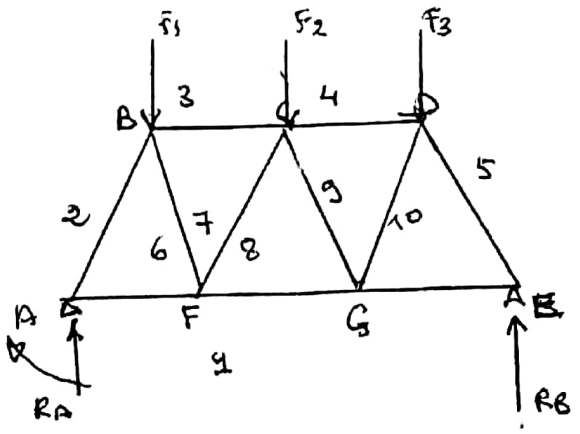
- *La compréhension des questions fait partie de l'évaluation.*
- *Toute donnée manquante est laissée à votre initiative.*
- *S'il vous manque un résultat intermédiaire, faites des hypothèses cohérentes avec les données de l'examen.*
- *Seules les réponses faisant référence au numéro de la question seront évaluées.*

Scanned by CamScanner

Examens 1ère Session INPHB - CNAM

RESOLUTIONS DES EXERCICES DE RDM

EXERCICE N° 4



$F_1 = 20\ KN$
$F_2 = 20\ KN$
$F_3 = 20\ KN$

1°) Nombre de barres $b = 11$
Nombre de noeuds $n = 7$
Nombre de réactions d'appuis $= 2$
Si les équations de la statique suffisent à déterminer les réactions d'appuis le système est Isostatique. extérieur + Aussi s'il est possible de déterminer tous les efforts dans les barres, le système est dit intérieurement Isostatique. On peut retenir la relation $b = 2n - 3$; alors $11 = 2 \times 7 - 3$ vérifiée. d'où le système est Isostatique. (0,5 point)

2°) Calcul des réactions d'Appuis

$R_A + R_B = F_1 + F_2 + F_3 = 60\ KN$

$M/B = 0 \Rightarrow R_A \times 9 - 20 \times 7{,}5 - 20 \times 4{,}5 - 20 \times 1{,}5 = 0 \Rightarrow$

$R_A = \frac{270}{9} = 30\ KN$ (0,5 point)

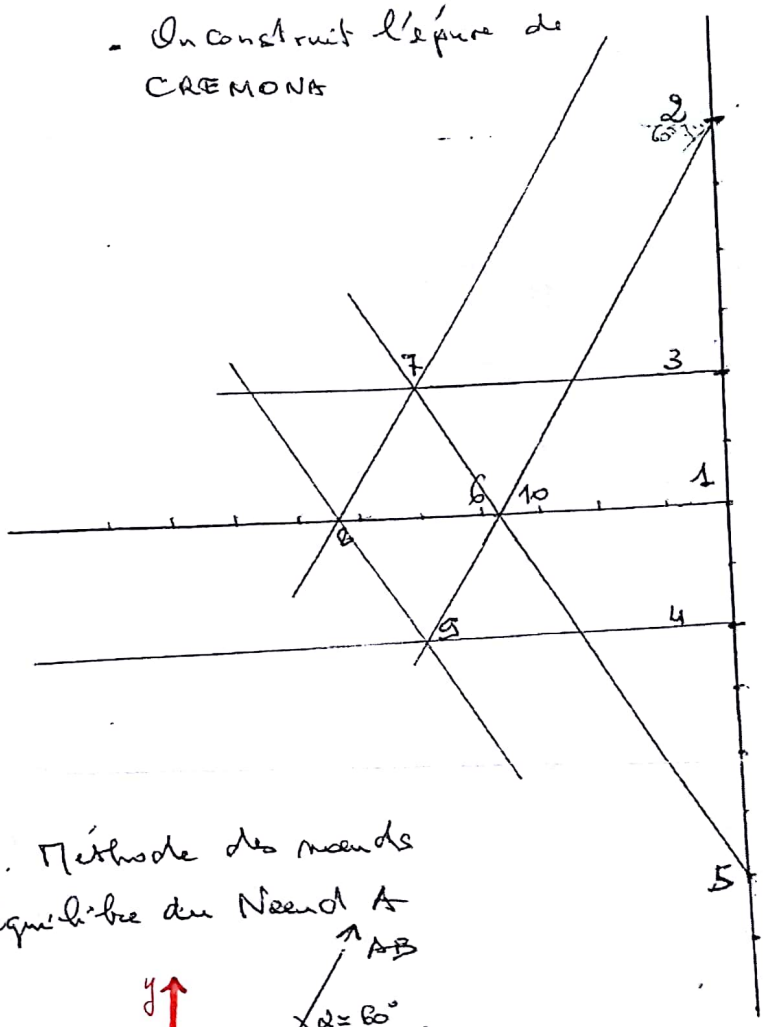
$R_B = 30\ KN$ (0,5 point)

3) Efforts dans les barres.

- On utilise du papier millimétré
- On numérote les intervalles entre les lignes de forces et les barres.

Scanned by CamScanner

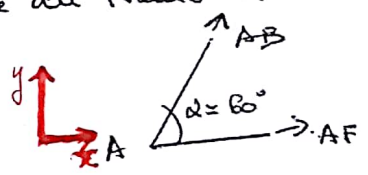
- On prend une échelle : 1cm = 5 KN
- On construit l'épure de CREMONA



0,5 point

a. Méthode des noeuds

. Equilibre du Noeud A



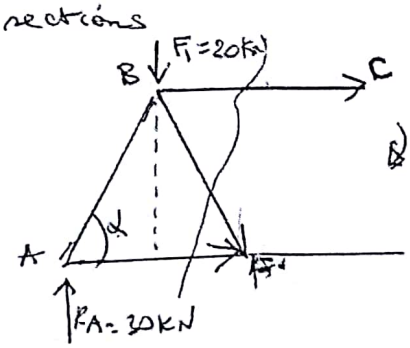
$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow AF + AB\cos\alpha = 0$

$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow AB\sin\alpha + RA = 0 \Rightarrow AB = -\frac{RA}{\sin\alpha} = -\frac{30}{0,866} =$

d'où $AB = -34,64$ KN

$AF = -AB\cos\alpha = 17,32$ KN

b Méthode des sections



$\Sigma M/F = 0$ $BC \times AB\sin\alpha +$

$RA \times 3 - F_1 \times 1,5 = 0$

d'où $BC = \frac{-90+30}{-3 \times 0,866}$

$BC = +23,094$ KN

$\alpha = 60°$

$\Sigma F_y = 0 \iff R_A - F_1 + BF \sin\alpha = 0$

$\alpha = 60° \Rightarrow BF \sin\alpha = -30 + 20 = -10$ KN

d'où $BF = \dfrac{-10}{\sin\alpha} = -11,547$ KN

On peut vérifier les valeurs des efforts dans les barres par la méthode des sections et la méthode des noeuds. En résumé :

On admet ici
- Traction
+ Compression

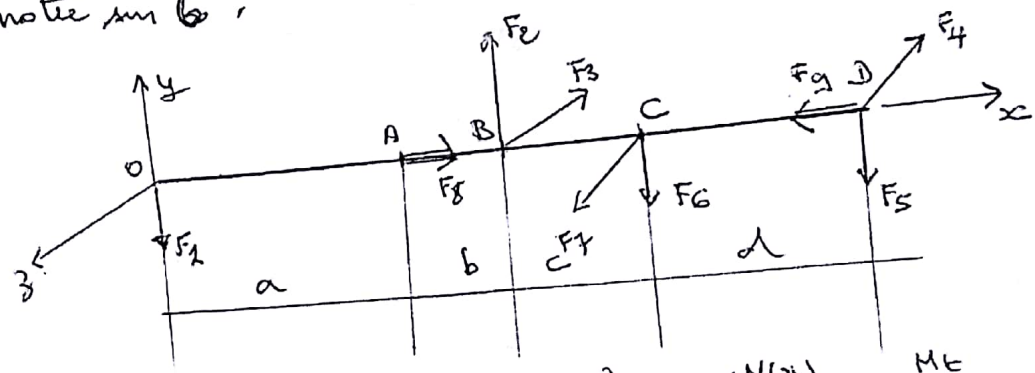
Zone	Barres	Efforts (KN)	Signe ou Nature
1	-	30 = RA	Réaction
2	AB_{2-6}	− 34,64	Traction
	-	20 = F1	Force
3	BC_{3-7}	+23,094	Compression
	-	20 = F2	Force
4	CD_{4-9}	+23,094	Compression
	-	20 = F3	Force
5	DE_{5-10}	− 34,64	Traction
	-	30 = RB	Réaction
6	AF_{6-1}	+ 17,32	Compression
	FB_{6-7}	− 11,547	Traction
7	FC_{7-8}	+11,547	Compression
8	FG_{1-8}	−32,5	Traction
9	CG_{8-9}	+11,547	Compression
	GD_{9-10}	−11,547	Traction
10	GE_{10-1}	+17,32	Compression

(2 points)

Scanned by CamScanner

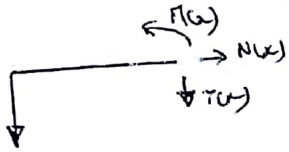
EXERCICE N° 3 (1)

N.B : Une erreur s'est glissée sur les efforts. Les forces F_8 et F_9 sont des moments de torsion M_t. Au lieu de 50 kN.m, il est écrit 50 kN. Par conséquent la première question sera notée sur 6.



1°) Composantes du Torseur $\{\tau\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} N(x) & M_t \\ T_y(x) & M_{fy}(x) \\ T_z(x) & M_{fz}(x) \end{vmatrix}$

a) $x \in [0, A[$



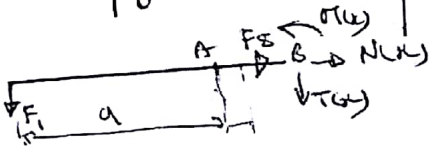
$N(x) = 0$

$T_y(x) + F_1 = 0 \Rightarrow T_y(x) = -F_1 = -300$ N

$M_{fz}(x) + F_1 x = 0 \qquad M_{fz}(x) = -F_1 x = -300x$ (1 point)

$\{\tau\} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -300 & 0 \\ 0 & -300x \end{vmatrix}$

b) $x \in [A, B[$



(1 point)

$N(x) = -50$ N

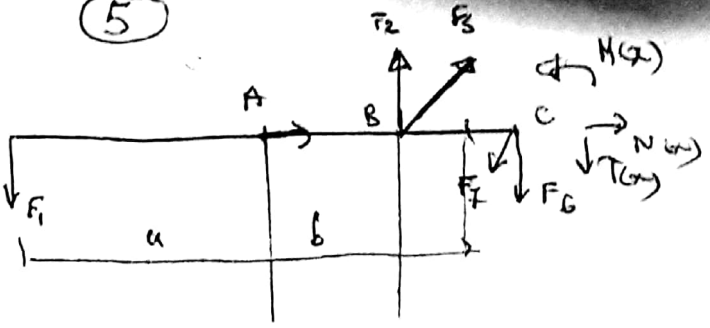
$T_y(x) + F_1 = 0 \Rightarrow T_y(x) = -300$

$M_{fz}(x) + F_1(a + x) = 0 \Rightarrow M_{fz}(x) = -F_1(a) = -300x$

$\{\tau\} = \begin{vmatrix} -50 & 0 \\ -300 & 0 \\ 0 & -300x \end{vmatrix}$

Scanned by CamScanner

c) $x \in [B, C[$



$N(x) = 50\ N$

$T(x) + F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow T(x) = 1300 - 300 = 1000$

$M_f(x) + F_1 x - F_2 [(a+b)+x] = 0 \Rightarrow M_f(x) = -300x + F_2 (x - 0{,}4)$

$= -300x + 1300x - 1300 \times 0{,}4$

$= 1000x - 520$

$M_{f_z}(x) = -300 + 1300 (x - 0{,}4)$

$M_{f_y}(x) = +600x - 240$

(1 point)

$T_y(x) = -600\ N$

$$\{G\} = \begin{vmatrix} -50 & 0 \\ 1000 & 600x - 240 \\ -600 & 1000x - 520 \end{vmatrix}$$

A) $x \in [C, D]$

$N(x) = 0$

$T(x) + F_1 - F_2 + F_6 = 0 \quad T_y(x) = -300 + 1300 - 900 = 100N$

$= 800N$

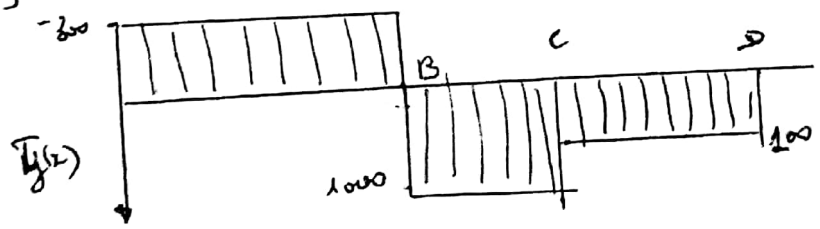
$T_z(x) + F_3 - F_7 = 0 \quad T_z(x) = 900 - 600$

(1 point)

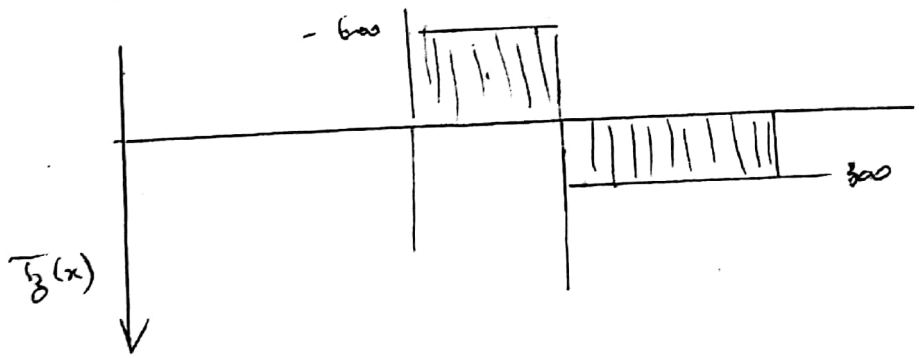
$M_{f_z} = 0$

$M_{f_y}(x) = -800x + 240$

$M_{f_z}(x) = 100x - 70$



(1 point)



(1 point)

Scanned by CamScanner

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

ECOLE DE FORMATION CONTINUE ET DE PERFECTIONNEMENT DES CADRES

RESISTANCE DES MATERIAUX

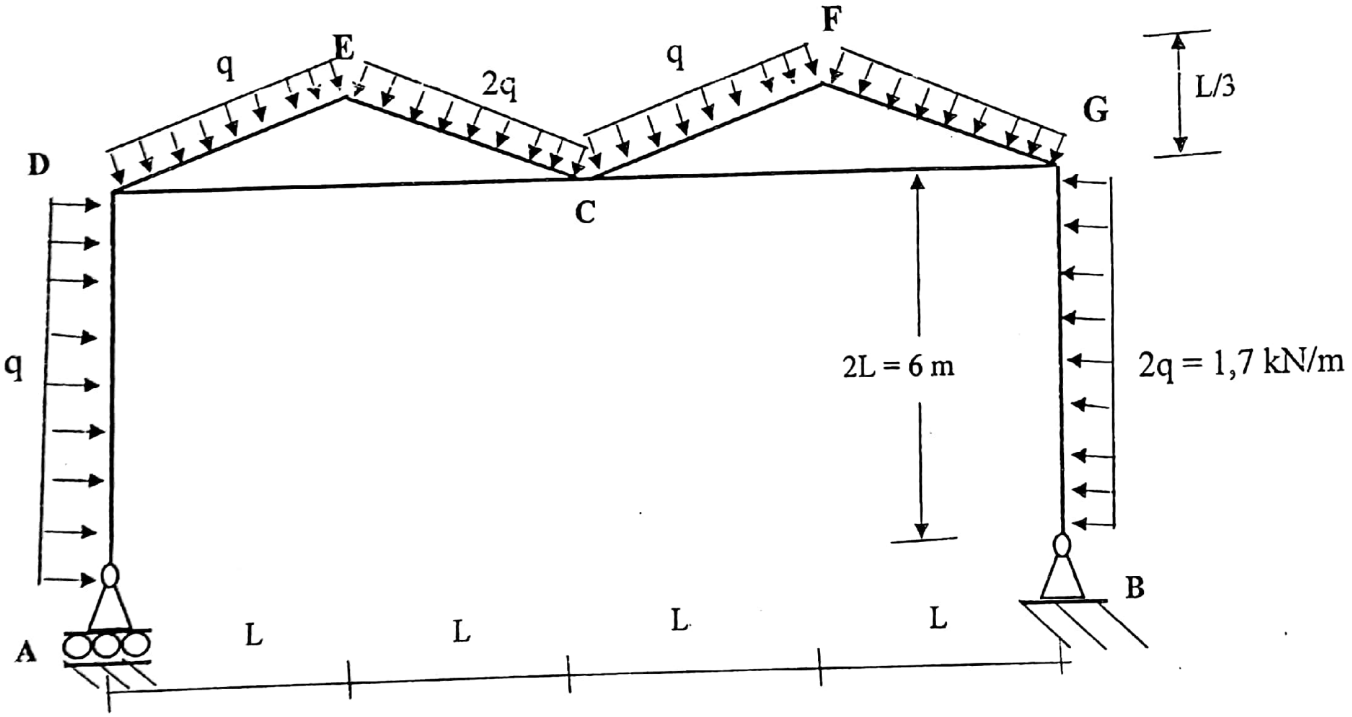
DEVOIR N°1

GRPOUPE 3

Durée : 3 heures

DOCUMENTS AUTORISES

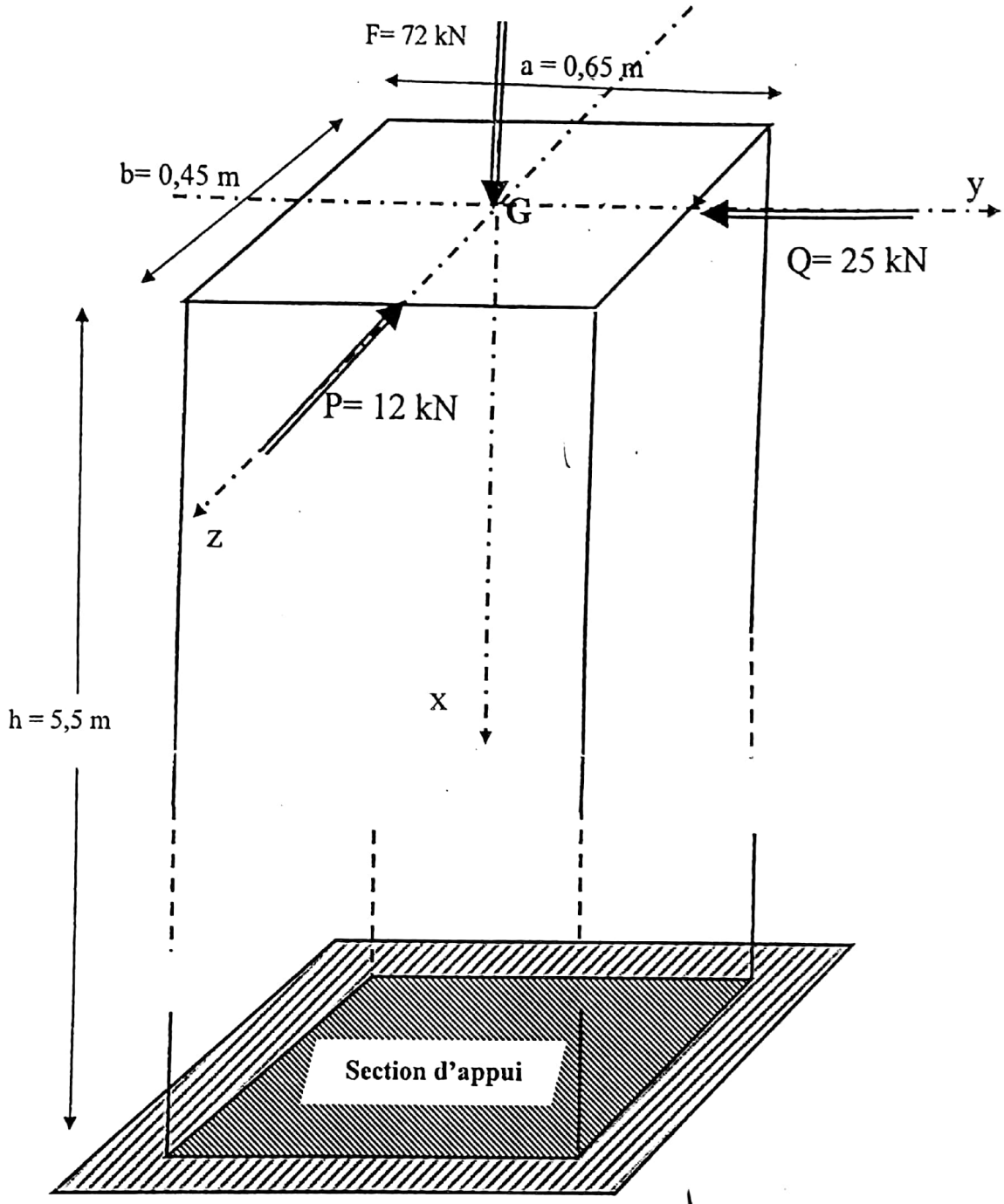
I. ETUDE DU PORTIQUE REPRESENTE CI-DESSOUS



1) Déterminer les réactions d'appuis de cette structure
2) Indiquer la nature des efforts internes dans les barres (A,D), (C,F),

Scanned by CamScanner

II. ETUDE D'UN POTEAU



1) Déterminer les efforts internes dans une section courante du poteau représenté ci-dessus
2) Calculer les valeurs des efforts internes dans la section d'appui du poteau
3) Donner l'expression de la flèche et de la rotation dues à la charge P
4) Donner l'expression de la flèche et de la rotation dues à la charge Q

Scanned by CamScanner

5) Donner l'expression de la déformation due à la charge F

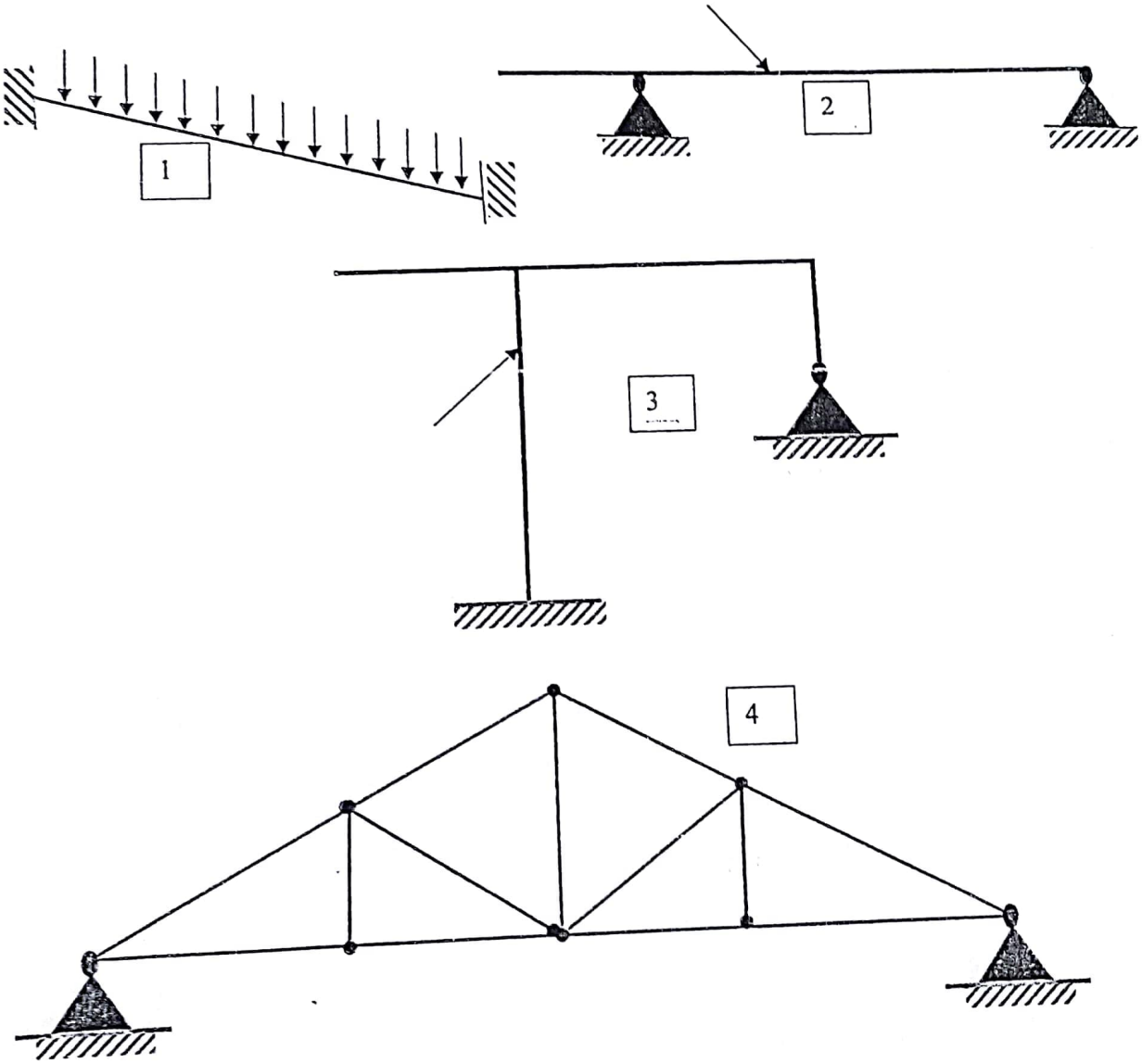
6) Calculer les contraintes normales aux points G, I (y=22,5, z=0), J (y=0, z=32,5), K (y=-22,5, -32,5), L (y=22,5, z=32,5) de la section d'appui

Module d'élasticité longitudinale E = 8 000 daN/mm2

III. HYPERSTATICITE ET ISOSTATICITE EXTERIEURES

Rendre extérieurement isostatique les structures ci-après.

Attention ne pas les transformer en mécanismes (systèmes instables)



Scanned by CamScanner

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

ECOLE DE FORMATION CONTINUE ET DE PERFECTIONNEMENT DES CADRES

RESISTANCE DES MATERIAUX

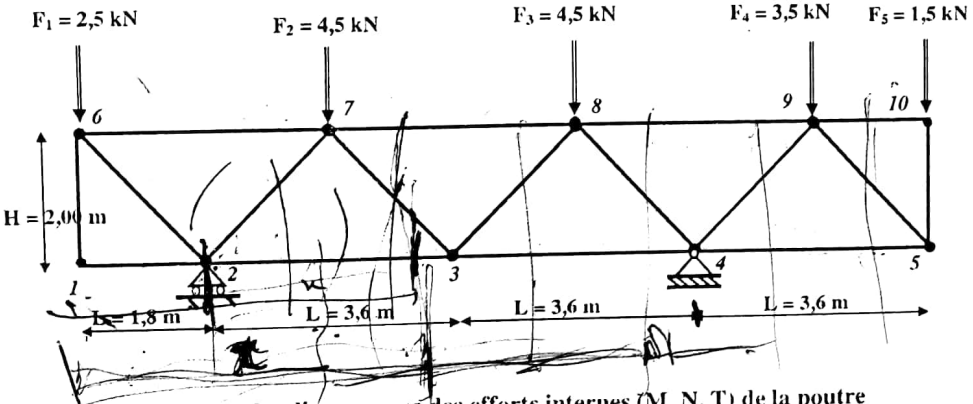
DEVOIR N°2

Durée : 3 heures

GROUPE 2

DOCUMENTS AUTORISES

I/ ETUDE D'UNE POUTRE TRIANGULEE

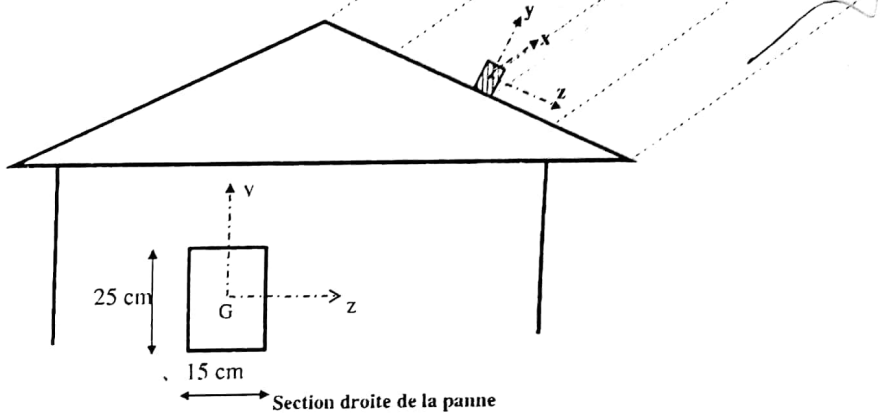


I.1/ Déterminer les diagrammes des efforts internes (M, N, T) de la poutre triangulée ci-dessus

I.2/ Evaluer les efforts dans les barres (1,2) ; (1,6) ; (6,7) ; (9,10) ; (9,5). Indiquer la nature de chaque effort calculé ;

II/ ETUDE D'UNE PANNE COURANTE SIMPLEMENT APPUYEE

- Pente de la toiture : 20%
- Espacement des pannes : 2,2 m
- Longueur de la panne : 7,2 m
- Poids de la tôle et des fixations : 18 kg/m2
- Poids de la panne : 12 kg/ml



II.1/ Calculer les moments d'inertie I_Z et I_Y de la section droite de la panne par rapport respectivement à l'axe G_Z et à l'axe G_Y

II.2/ Déterminer les répartitions de charges linéaires dans les plans Gxy et Gxz

II.2/ Déterminer les expressions des moments fléchissants par rapport aux axes G_y et G_z

II.3/ Evaluer les moments par rapport aux axes G_Y et G_Z à mi-travée

II.4/ Déterminer l'expression de la contrainte normale dans une section courante de la panne

II.5/ Evaluer la contrainte normale à mi-travée

II.6/ Déterminer l'expression de la flèche dans la plan Gxy

II.7/ Evaluer la flèche à mi-travée dans le plan Gxy

Scanned by CamScanner

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

ECOLE DE FORMATION CONTINUE ET DE PERFECTIONNEMENT DES CADRES

RESISTANCE DES MATERIAUX

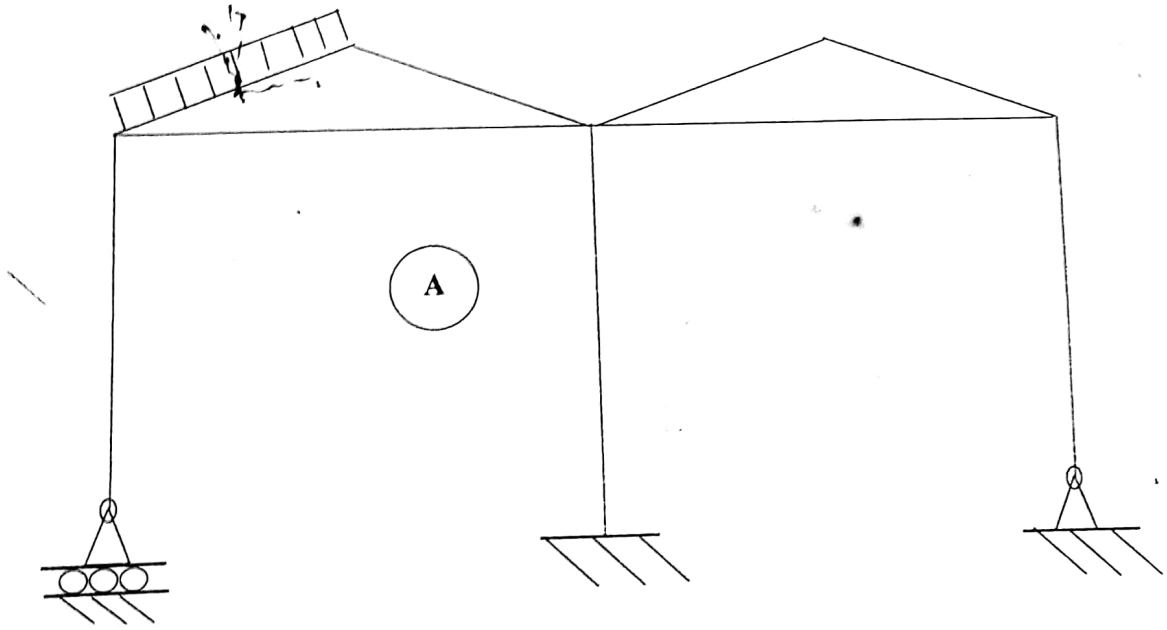
DEVOIR N°1

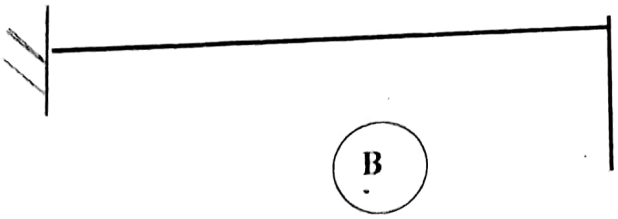
Durée : 3 heures

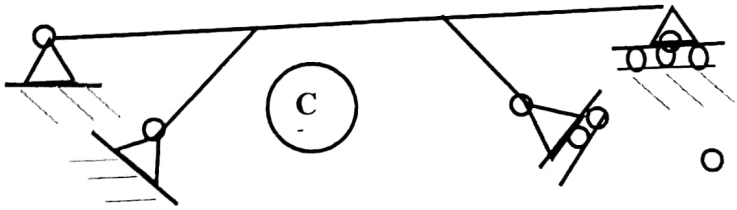
GROUPE 2

DOCUMENTS AUTORISES

I. DETERMINER LES DEGRES D'HYPERSTATICITE EXTERIEURE DES STRUCTURES CI-DESSOUS

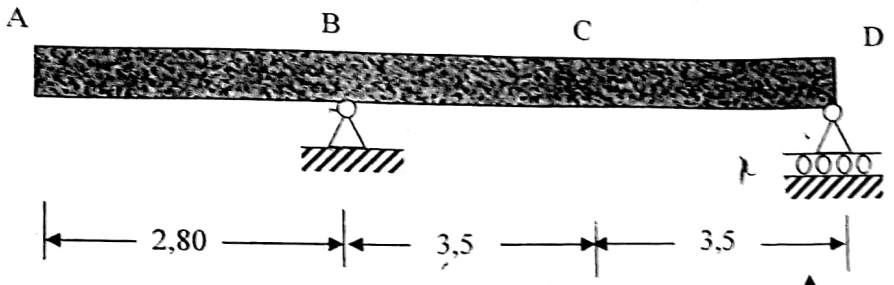




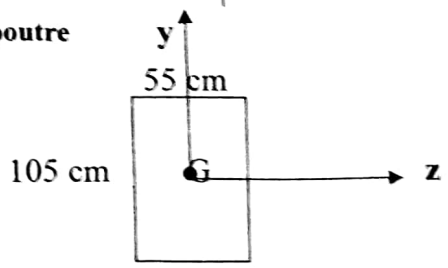


Scanned by CamScanner

II. ETUDE D'UNE TRAVERSE DE PONT EN BETON ARME



Sections droite de la poutre



Densité du béton armé : 2,5
Module d'élasticité E =8 000 kg/mm2

A. EFFET DU POIDS PROPRE

a) Déterminer les réactions d'appuis
b) Représenter les diagrammes des efforts internes
c) Evaluer les contraintes normales aux points J (y=0 ; z=0), K (y=37,5 ; z= 27,5) et P (y= -37,5 ; z= 27,5) de la section A
d) Evaluer les contraintes normales aux points J' (y=0 ; z=0), K' (y=37,5 ; z= 27,5) et P' (y= -37,5 ; z= 27,5) de la section B
e) Evaluer les contraintes extrêmes dans les sections B et indiquer leurs positions
f) Expressions de la flèche et de la rotation ;
g) Valeurs de la flèche et de la rotation aux points A, B, C, D
h) Donner l'allure de la déformée

B. EFFET D'UNE CHARGE PONCTUELLE A MI-TRAVEE

Mêmes questions qu'au A pour une charge ponctuelle verticale descendante de 12 kN appliquée en C (milieu de la travée BD).

C. EFFET D'UNE CHARGE PONCTUELLE HORIZONTALE DE 18 kN A L'EXTREMITE A, ORIENTEE DE LA GAUCHE VERS LA DROITE

(La charge est dans l'axe de la poutre)

a) Mêmes questions qu'au A
b) Expression des déformations axiales; Valeurs aux points A, B, C, D et E

Scanned by CamScanner

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

ECOLE DE FORMATION CONTINUE ET DE PERFECTIONNEMENT DES CADRES

RESISTANCE DES MATERIAUX

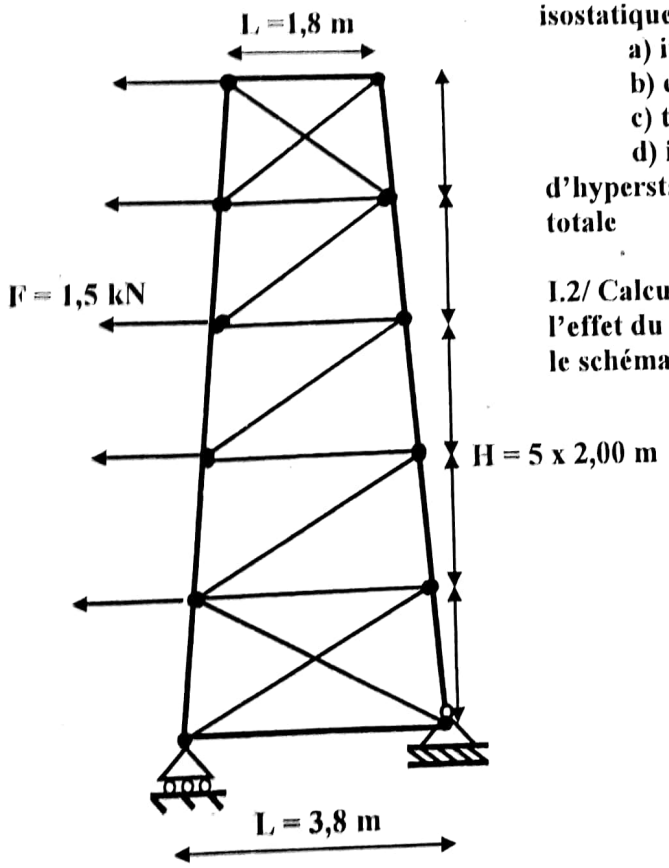
DEVOIR N°2

Durée : 3 heures

GROUPE 2

DOCUMENTS AUTORISES

I/ ETUDE D'UN PYLONE METALLIQUE



I.1/ Le pylône représenté ci-contre est-il isostatique ou hyperstatique

a) intérieurement

b) extérieurement

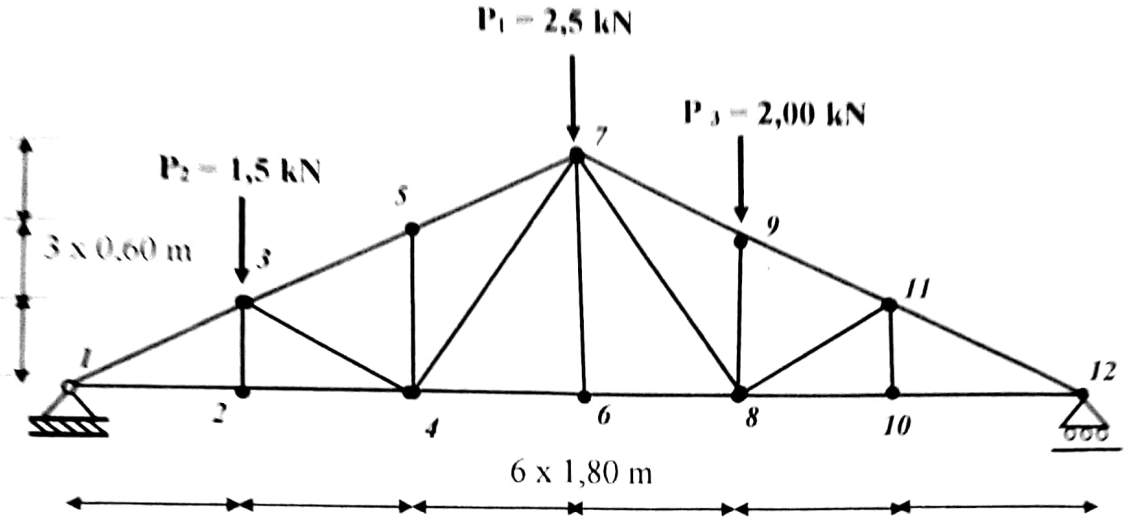
c) totalement

d) indiquer, le cas échéant, les degrés d'hyperstaticité intérieure, extérieure ou totale

I.2/ Calcul des réactions d'appuis sous l'effet du système de charges représenté sur le schéma

Scanned by CamScanner

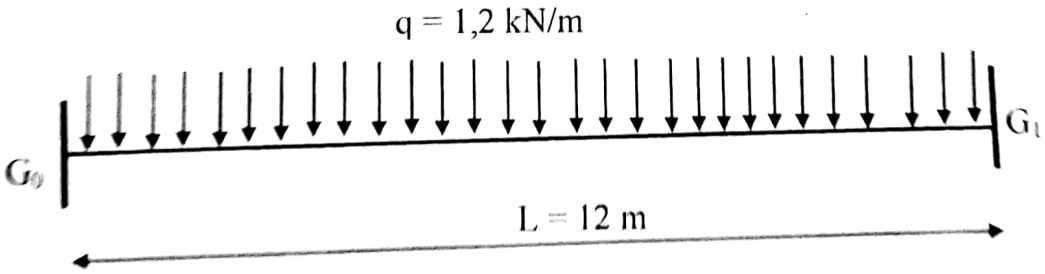
II/ ETUDE D'UNE FERME METALLIQUE SIMPLEMENT APPUYEE



II.1/ Déterminer les efforts dans les barres (1,3) ; (2,3) ; (3,5)

II.2/ Indiquer la nature des efforts (traction ou compression)

III/ ETUDE D'UNE POUTRE BI-ENCASTREE UNIFORMEMENT CHARGEE



III.1/ Déterminer le degré d'hyperstaticité de la poutre ci –dessus

III.2/ Déterminer les moments sur appuis

III.3/ Donner les expressions du moment fléchissant, de l'effort tranchant dans une section courante G d'abscisse x

Scanned by CamScanner

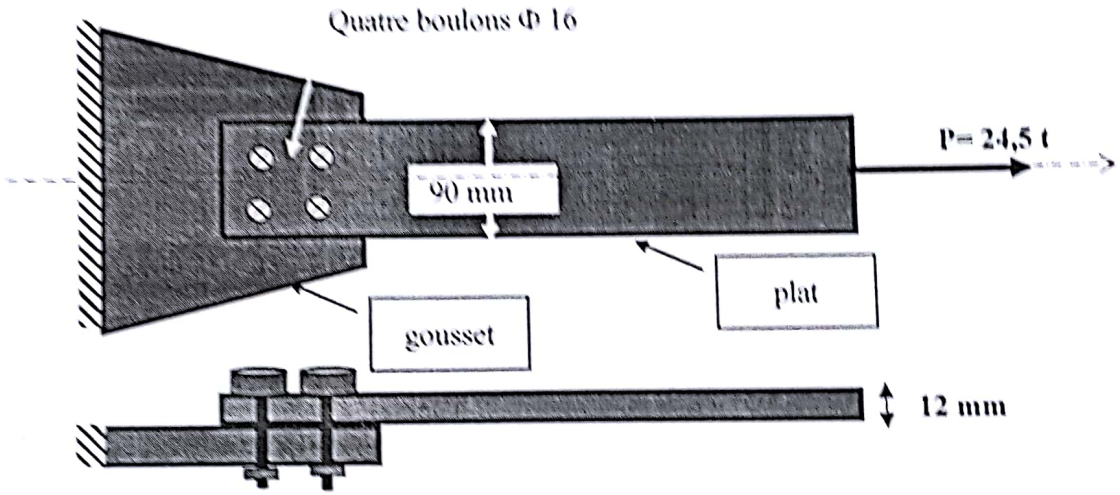
EXAMEN DE RESISTANCE DES MATERIAUX

SUJET N°3
Proposé le 20 Juin 2016

Durée : 3 heures
DOCUMENTS AUTORISES

CCV107

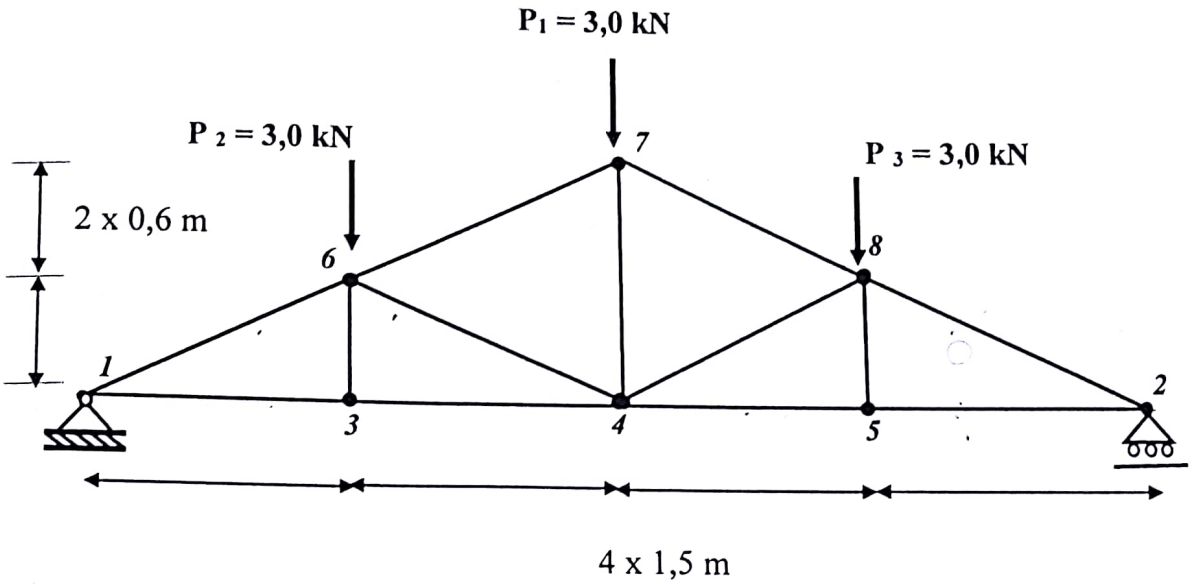
I/ ETUDE D'UN ASSEMBLAGE BOULONNE (1 pat boulonné sur 1 gousset)



1) Indiquer la nature des efforts dans les 4 boulons d'assemblage représentés par leurs axes sur le schéma ci-dessus
2) Indiquer la nature des efforts dans le plat
3) Calculer l'effort interne dans les boulons (répartition arithmétique des efforts dans les boulons)
4) Calculer la contrainte dans le plat
5) Calculer la contrainte dans un boulon

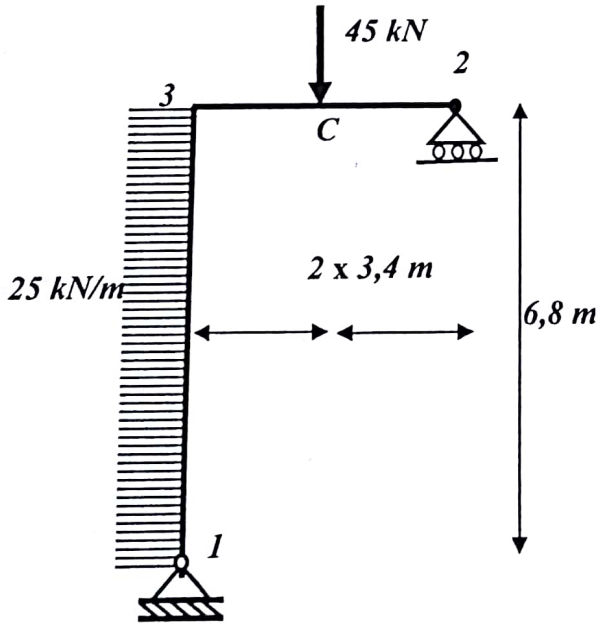
Scanned by CamScanner

II/ ETUDE D'UNE FERME EN TREILLIS SIMPLEMENT APPUYEE



1) Déterminer le degré d'hyperstaticité de la structure ci-dessus
2) Calculer les efforts dans les barres (1,3) ; (4,3), (4,6), (4,8) , (8,5)
3) Déterminer la variation de longueur des barres (1, 3), (3,6)
   - barre cornière L 120 x 120 x 10 ; Section : 23 cm²
   - module d'élasticité linéaire : 21 000 daN/mm²

III/ ETUDE D'UN DEMI-PORTIQUE PLAN



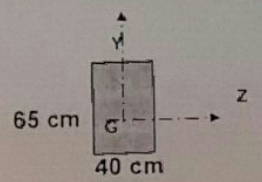
Déterminer :

1) les efforts internes dans les différentes barres
2) les contraintes normales extrèmes aux points 1, 2, 3 et C
3) les expressions des contraintes tangentielles en 1 et 2

Scanned by CamScanner

Module d'Young du matériau

$E = 15\,000\ daN/m^2$



Section droite

Exercice 5 :

Etude de la section d'appui d'un poteau de lampadaire

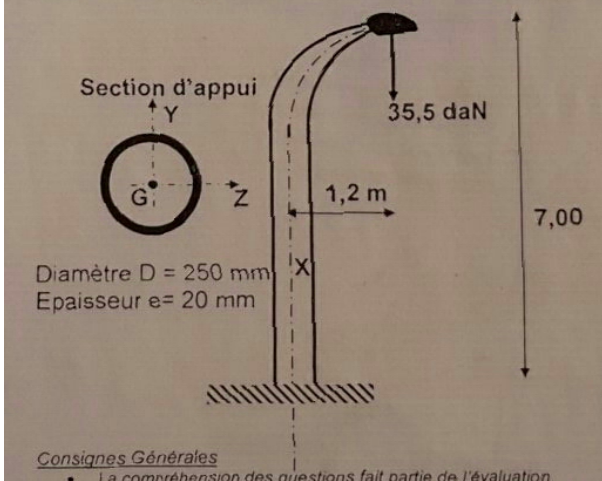
1/ Indiquer la nature des sollicitations dans la section d'appui A.

2/ Calculer le moment fléchissant autour de l'axe Gy dans la section A.

3/ Calculer la contrainte due à l'effort normal dans la section d'appui A.

4/ Déterminer l'expression de la contrainte due au moment fléchissant autour de l'axe Gy dans la section d'appui A.

5/ Déterminer l'expression de la contrainte normale due au moment fléchissant autour de l'axe Gy et à l'effort normale dans la section d'appui A.

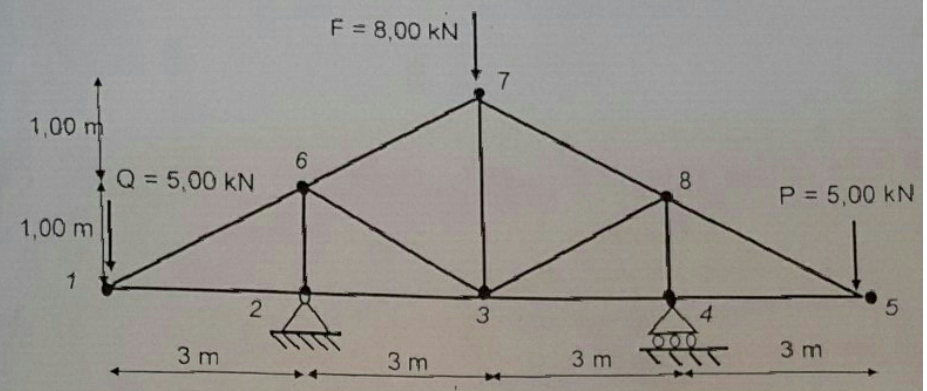


Consignes Générales

- *La compréhension des questions fait partie de l'évaluation.*
- *Toute donnée manquante est laissée à votre initiative.*
- *S'il vous manque un résultat intermédiaire, faites des hypothèses cohérentes avec les données de l'examen.*
- *Seules les réponses faisant référence au numéro de la question seront évaluées.*

Exercice 3 :

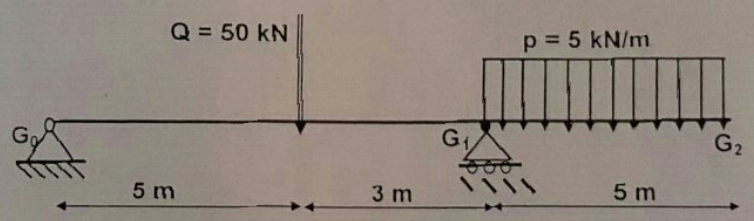
Etude d'une ferme métallique simplement appuyée



1/ Vérifier l'isostaticité de la ferme ci-dessus
2/ Déterminer les efforts dans les barres (1,2) ; (2,6) ; (3,6) ; (4,5), (5,8)
3/ Indiquer la nature des efforts (traction ou compression)
4/ Représenter le diagramme du moment fléchissant de la ferme globale

Exercice 4 :

Etude d'une poutre console de section rectangulaire simplement appuyée



1/ Calculer les réactions d'appui

2/ Représenter les diagrammes des efforts internes

3/ Calculer les contraintes normales extrêmes dues au moment fléchissant dans les sections d'abscisses : x=5m et x= 8 m

1/ Position de la charge (Y = -10 ; Z = -20)

1.1/ Calculer les moments par rapport à Gy (My) et à Gz (Mz)

1.2/ Calculer les valeurs de la contrainte normale dans une section du poteau aux points suivants

	Y	Z
A	22,5	27,5
B	22,5	-27,5
C	-22,5	27,5
D	-22,5	-27,5

1.3/ Déterminer l'équation de l'axe neutre

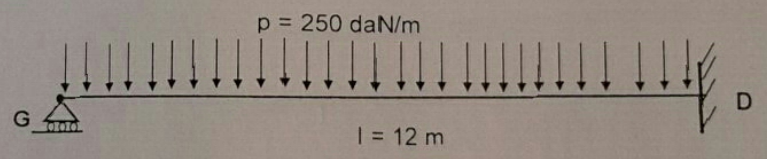
1.4/ Calculer les contraintes normales extrêmes

2 / Mêmes questions pour une position (Y = 10 ; Z = 0)

3/ Calculer la variation de longueur du poteau due à l'effort normal et indiquer sa nature (allongement ou raccourcissement) module d'Young E= 10 000 kg/m^2

Exercice 2 :

Etude d'une poutre hyperstatique a une travée uniformément chargée par le théorème des travaux virtuels



1/ Déterminer le degré d'hyperstaticité de la poutre ci–dessus

2/ En employant le Théorème des Travaux Virtuels,

2.1/ Déterminer les réactions d'appuis

2.2/ Déterminer les diagrammes des efforts internes

2.3/ Déterminer l'expression de la flèche d'une section courante de la poutre

le cnam

Conservatoire national des arts et métiers

Centre de formation CNam – INPHB

Chaire des travaux publics

2014-2015

RESISTANCE DES MATERIAUX CCV 107

Professeur : YRIE TRA Bi Dénis

Examen de la première session

Polycopies et TD autorisés

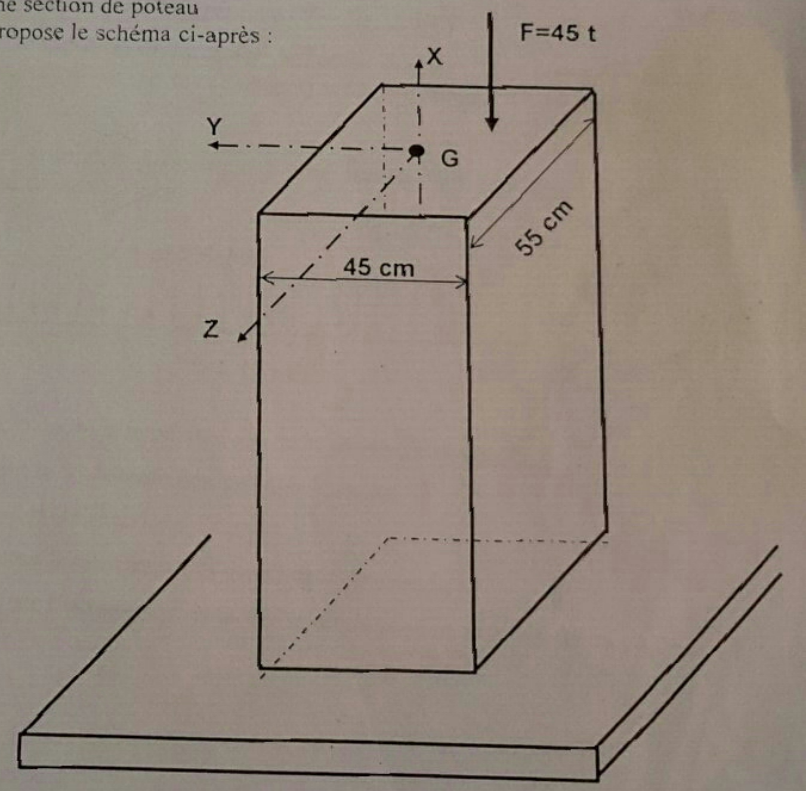
Durée : 3 heures

Calculatrices scientifiques autorisées

Exercice 1 :

Etude d'une section de poteau

On vous propose le schéma ci-après :



IUT Lyon 1

l'excellence technologique

1er SEMESTRE

MODULE M1102 :

SOLLICITATIONS SIMPLES
Effort Normal & Effort Tranchant

PROBLEMES CORRIGES

A.BENNANI - Y.LAFON-JALBY - M.MASSENZIO - S.RONEL

SOMMAIRE

STATIQUE APPLIQUÉE AU DIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES 5

TORSEUR DE SECTION 9

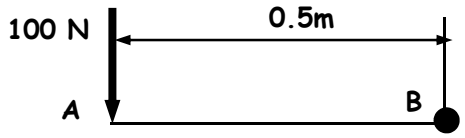
TRACTION-COMPRESSION 35

CISAILLEMENT 54

STATIQUE APPLIQUÉE AU

DIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES

PROBLÈME N°1

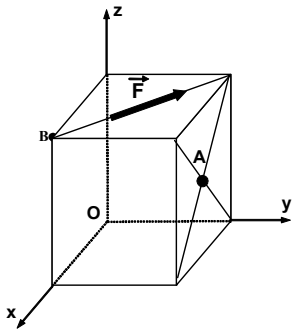


Calculez le moment de la force de 100Npar rapport au point B.

REPONSES N°1

$$\overrightarrow{M_{\vec{F}/B}} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_A \Rightarrow +50\vec{k}$$

PROBLÈME N°2



Soit un cube de 1m de côté et une force $\vec{F}$ de norme 100N. Calculer:

1°) Les composantes du moment de $\vec{F}$ par rapport au point A.

2°) La norme du moment.

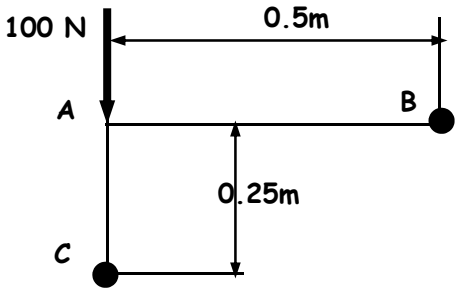
3°) Les angles entre le moment et les axes du repère.

REPONSES N°2

$$\overrightarrow{M_{\vec{F}/A}} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0.5 & & -50\sqrt{2} \\ -1 & \wedge & 50\sqrt{2} \\ 0.5 & & 0 \end{vmatrix} = -25\sqrt{2}\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) \text{ d'où } \left\|\overrightarrow{M_{\vec{F}/A}}\right\| = 25\sqrt{2}\sqrt{3}mN$$

$$\cos\alpha_x = \cos\alpha_y = \cos\alpha_z = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

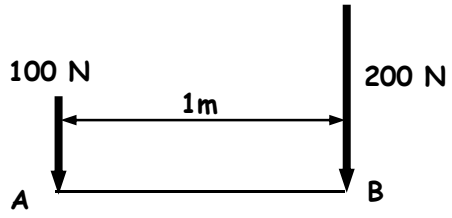
PROBLÈME N°3

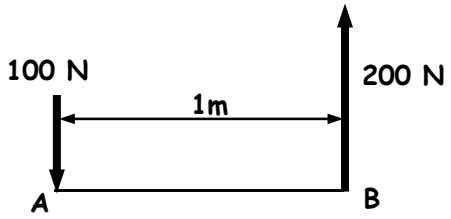


Réduisez la force de 100N au point B, puis au point C.

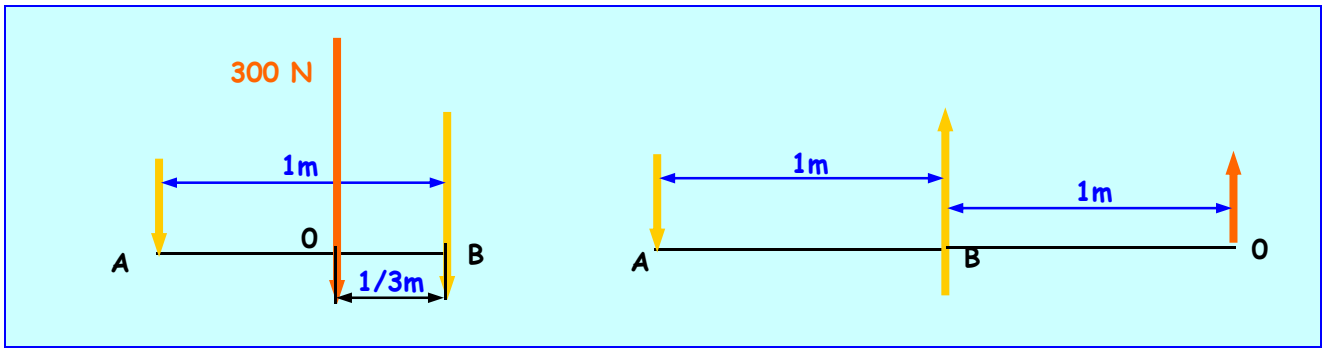
PROBLÈME N°4

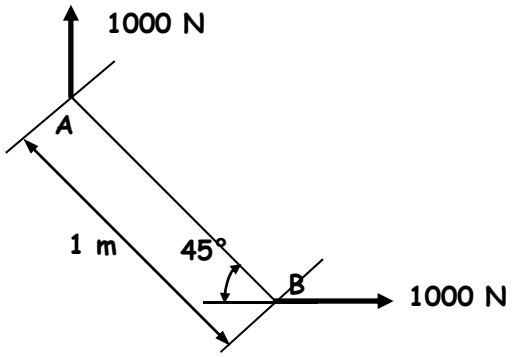
Calculez la valeur et la position de la résultante des deux forces parallèles.





REPONSES N°4

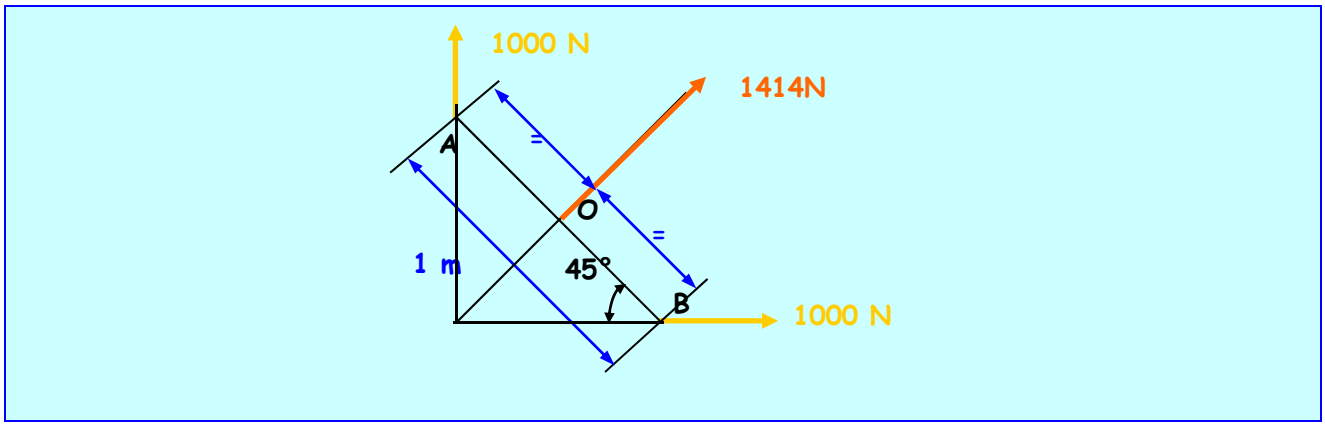




PROBLÈME N°5

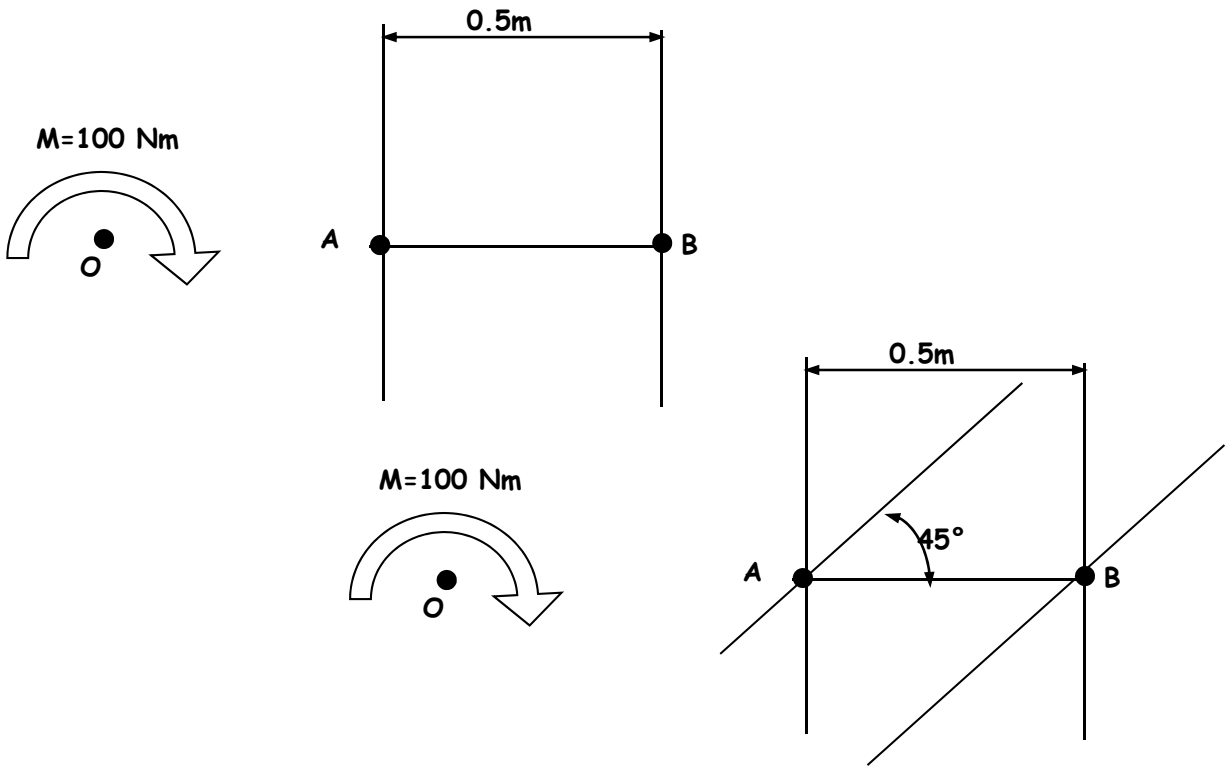
Calculez la valeur et la position de la résultante des deux forces concourantes.

REPONSES N°5

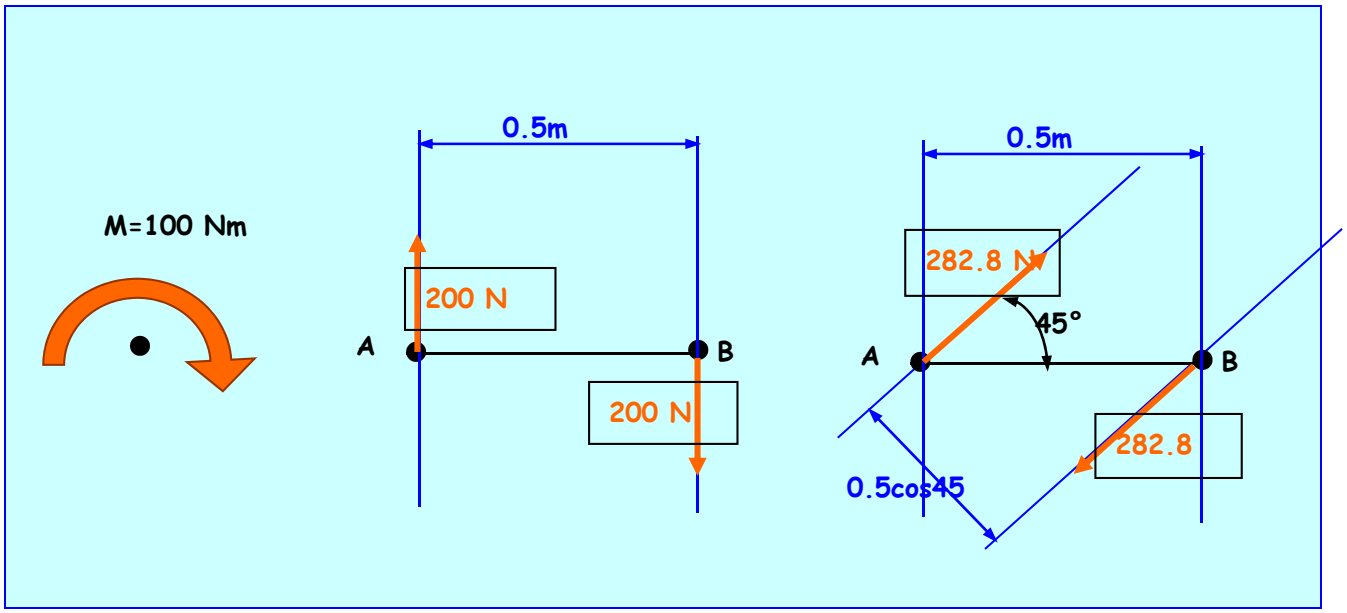


PROBLÈME N°6

e) Décomposez le moment M suivant deux forces // passant par A et B, d'abord verticales, puis inclinées à 45°.

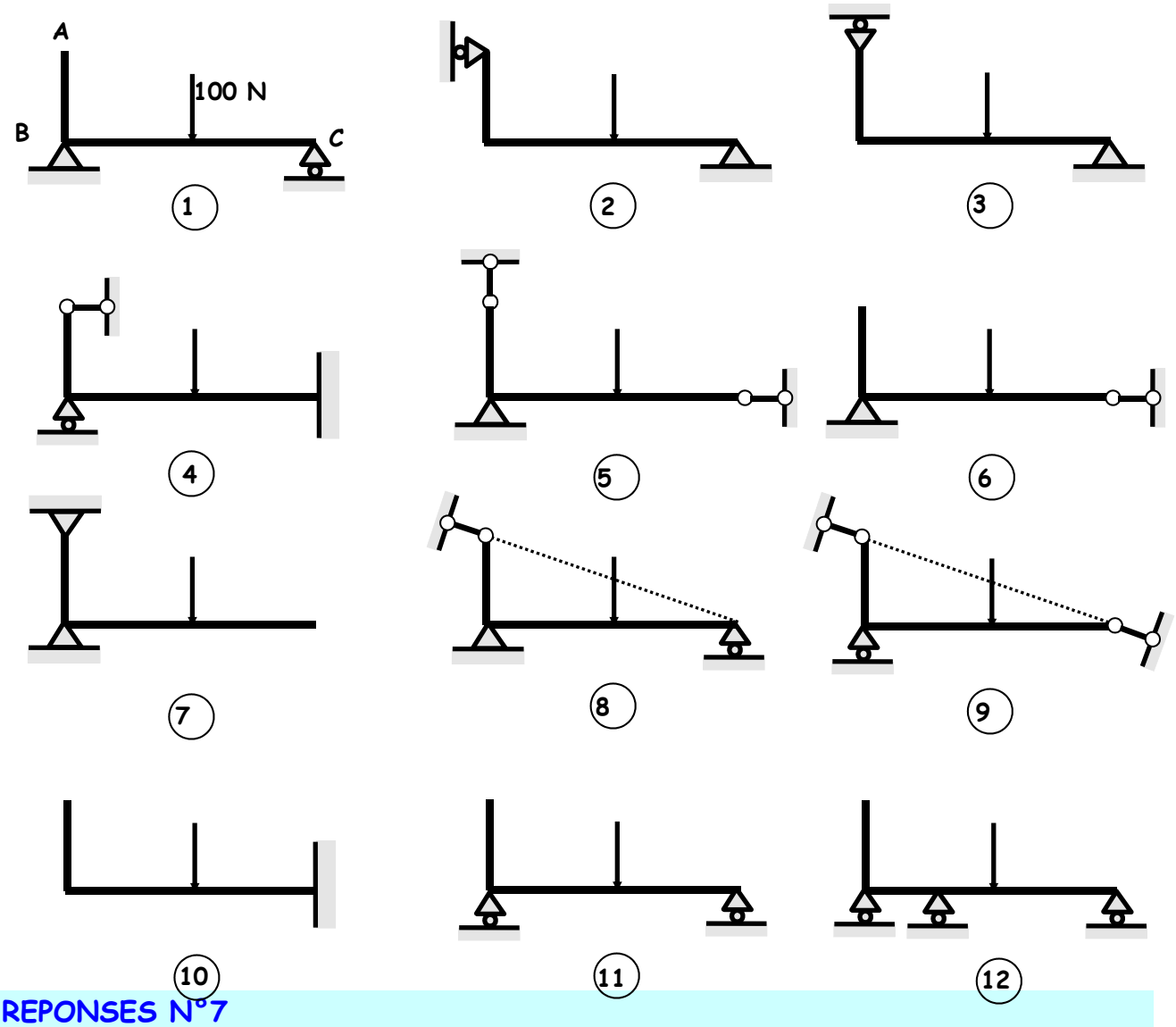


REPONSES N°6



PROBLÈME N°7

L'équerre ABC peut être supportée de différente manières. Identifiez chaque cas.



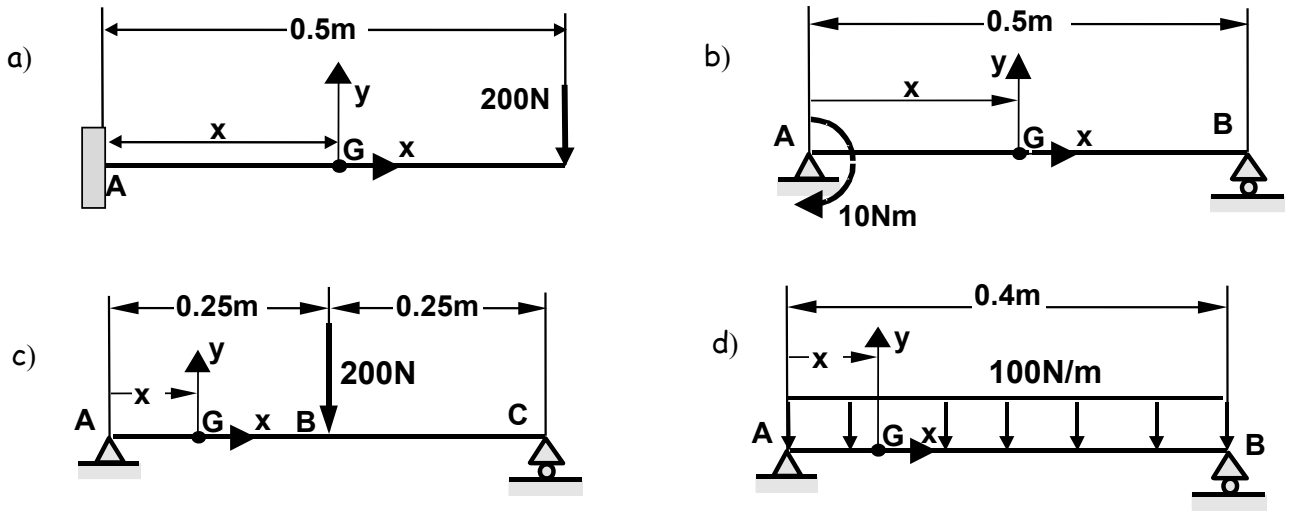
REPONSES N°7

Cas N°	Isostatique	Hyperstatique de d°	Liaisons Incomplètes	Liaisons Incorrectes
1	X			
2	X			
3	X			
4		2		
5				X
6				X
7		1		
8		1		
9				X
10	X			
11	X		X	
12		1	X	

TORSEUR DE SECTION

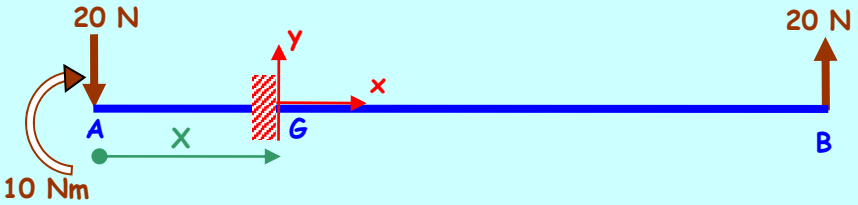
PROBLÈME N°1

Déterminer les expressions, en fonction de x (dans x,y,z), des composantes non nulles du torseur de section le long de la poutre et tracer leurs variations dans les quatre cas suivants :



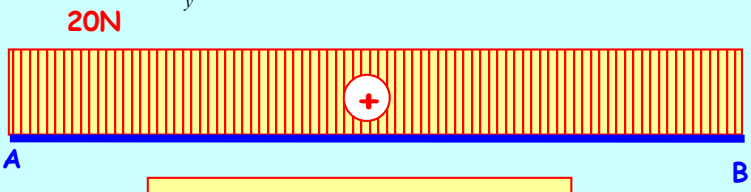
REPONSES N°1 Voir Annexe N°2

Equilibre



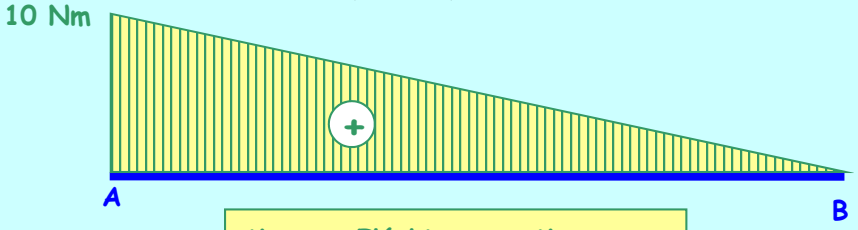
L=0,5 m

Effort Tranchant $T_y = 20$



Effort Tranchant : Ty

Moment de Flexion $M_z = 20(0{,}5 - X)$



Moment Fléchissant : Mz

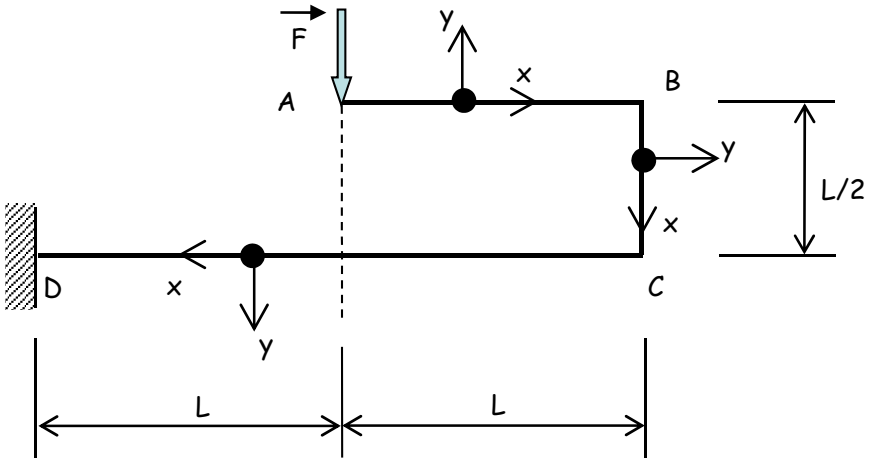
PROBLÈME N°2

Le système suivant est constitué de trois poutres dans le plan. La poutre AB est de longueur L, la poutre BC est de longueur L/2 et la poutre CD est de longueur 2L. Une force $\vec{F}$ est appliquée en A. Le système est encastré en D.

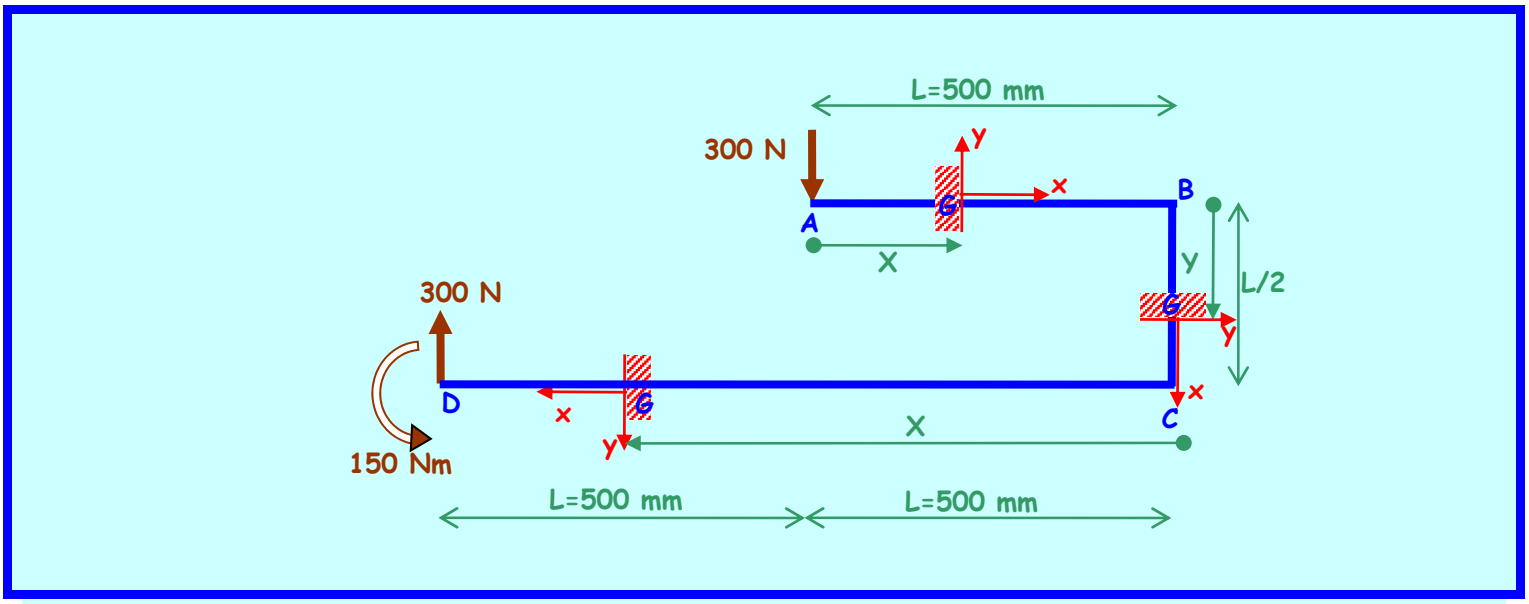
Déterminer les expressions des composantes non nulles du torseur de section dans chacunes des poutres et tracer leurs variations.

<u>Données</u> : L = 500 mm
Module de la force : 300 N

<u>Remarque</u> : Il n'est pas nécessaire de conduire une étude statique afin de déterminer les réactions en D.



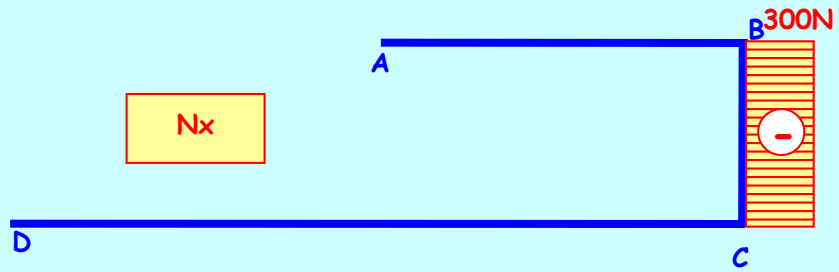
REPONSES N°2

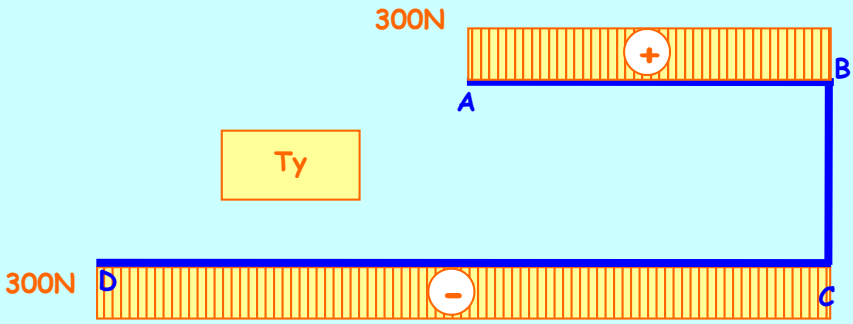


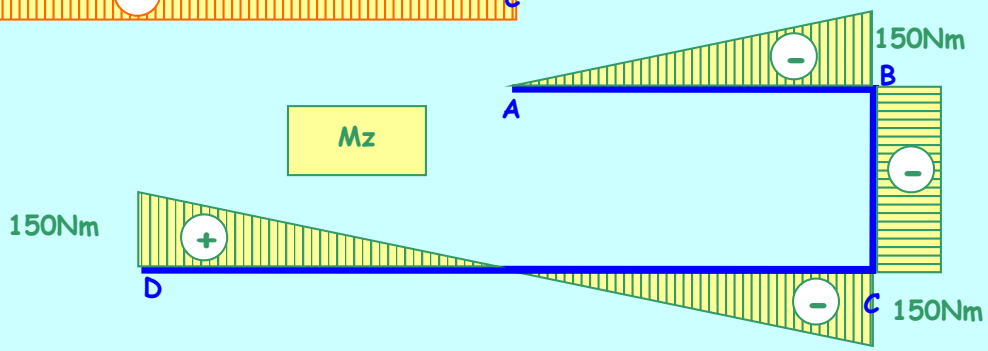
$$\text{Zone AB}: 0 < X < 500\text{mm} \begin{cases} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = 0 \\ T_y = 300 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| M_z = -300X \right. \end{cases}$$

$$\text{Zone BC}: 0 < X < 250\text{mm} \begin{cases} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = -300 \\ T_y = 0 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| M_z = -150Nm \right. \end{cases}$$

$$\text{Zone CD}: 0 < X < 1000\text{mm} \begin{cases} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = 0 \\ T_y = -300 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| M_z = 300(X - 500) \right. \end{cases}$$

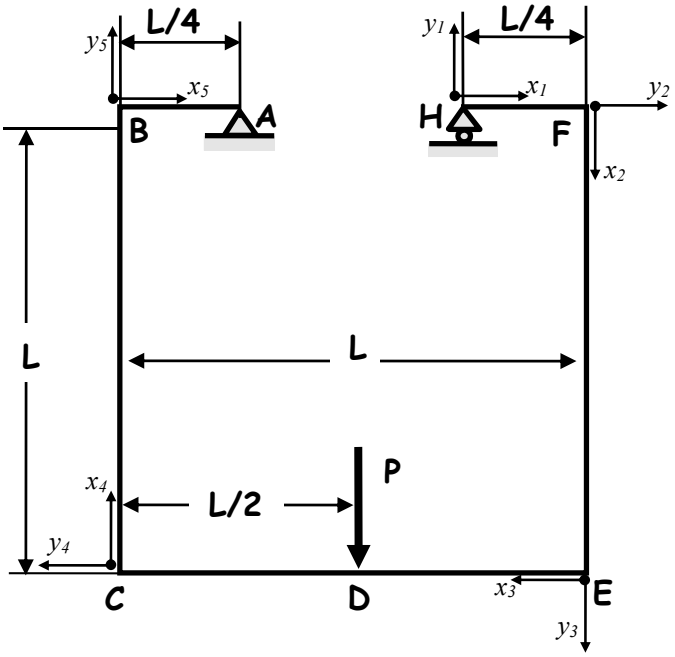






PROBLÈME N°3

Déterminer les expressions, en fonction de x (dans x,y,z), des composantes non nulles du torseur de section le long de la poutre et tracer leurs variations.

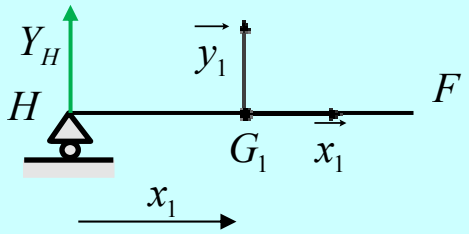


REPONSES N°3

$$Equilibre: \begin{cases} \overrightarrow{R_A}+\overrightarrow{R_H}+\vec{P}=\vec{0} \\ \overrightarrow{M_A(\overrightarrow{R_A})}+\overrightarrow{M_A(\vec{P})}+\overrightarrow{M_A(\overrightarrow{R_H})}=\vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} X_A=0 \\ Y_A+Y_H+P=0 \\ 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -PL/4+Y_H L/2=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} Y_A=P/2 \\ Y_H=P/2 \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{M_A(\vec{P})}=\overrightarrow{M_D(\vec{P})}+\overrightarrow{AD}\wedge\vec{P}=\left|\begin{array}{c} L/4 \\ L \\ 0 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{c} 0 \\ -P \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -PL/4 \end{array}\right.$$

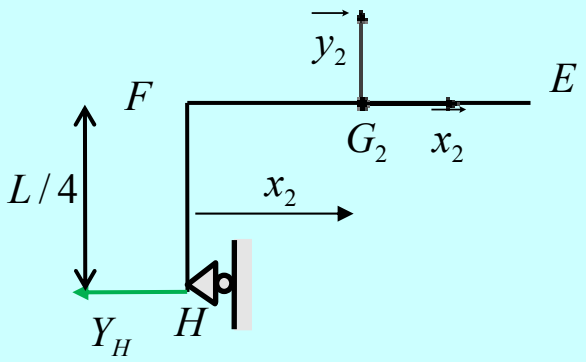
$$\overrightarrow{M_A(\overrightarrow{R_H})}=\overrightarrow{M_H(\overrightarrow{R_H})}+\overrightarrow{AH}\wedge\overrightarrow{R_H}=\left|\begin{array}{c} L/2 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{c} 0 \\ Y_H \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ Y_H L/2 \end{array}\right.$$



Zone de HF : $G_1 \in [HF] \quad x_1 \in [0; L/2]$

$$\left[T_{\text{int}}^{HF}\right]_{G_1} = -\left[T_{ext \to amont}\right]_{G_1} = -\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ P/2 & 0 \\ 0 & -x_1 P/2 \end{Bmatrix}_{G1}$$

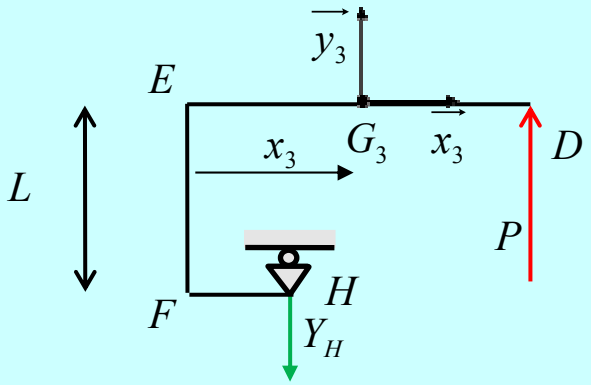
$$\left\{ \overrightarrow{R_{G1}} \Rightarrow \left| \begin{matrix} N_x = 0 \\ T_y = -P/2 \\ T_z = 0 \end{matrix} \right. \quad \overrightarrow{M_{G_1}} \Rightarrow \left| \begin{matrix} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = x_1 P/2 \end{matrix} \right. \right\}_{G1}$$



Zone de FE : $G_2 \in [FE] \quad x_2 \in [0; L]$

$$\left[T_{\text{int}}^{FE}\right]_{G_2} = -\left[T_{ext \to amont}\right]_{G_2} = -\begin{Bmatrix} -P/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -PL/8 \end{Bmatrix}_{G2}$$

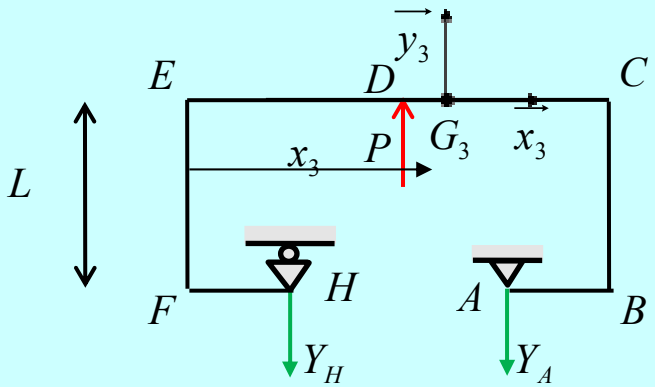
$$\left\{ \overrightarrow{R_{G2}} \Rightarrow \left| \begin{matrix} N_x = P/2 \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{matrix} \right. \quad \overrightarrow{M_{G_2}} \Rightarrow \left| \begin{matrix} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = PL/8 \end{matrix} \right. \right\}_{G2}$$



Zone de ED : $G_3 \in [ED] \quad x_3 \in [0; L/2]$

$$[T_{\text{int}}^{ED}]_{G_3} = -[T_{ext \to amont}]_{G_3} = -\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P/2 & 0 \\ 0 & -(L/4 - x_3)P/2 \end{Bmatrix}_{G3}$$

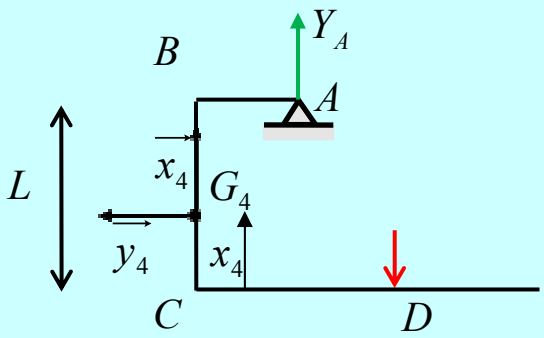
$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{G3}} \Rightarrow \left| \begin{matrix} N_x = 0 \\ T_y = P/2 \\ T_z = 0 \end{matrix} \right. & \overrightarrow{M_{G_3}} \Rightarrow \left| \begin{matrix} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = (L/4 - x_3)P/2 \end{matrix} \right. \end{Bmatrix}_{G3}$$



Zone de DC : $G_3 \in [DC] \quad x_3 \in [L/2; L]$

$$[T_{\text{int}}^{DC}]_{G_3} = +[T_{ext \to aval}]_{G_3} = +\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P/2 & 0 \\ 0 & -(3L/4 - x_3)P/2 \end{Bmatrix}_{G3}$$

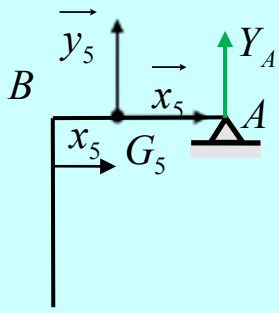
$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{G3}} \Rightarrow \left| \begin{matrix} N_x = 0 \\ T_y = -P/2 \\ T_z = 0 \end{matrix} \right. & \overrightarrow{M_{G_3}} \Rightarrow \left| \begin{matrix} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = -(3L/4 - x_3)P/2 \end{matrix} \right. \end{Bmatrix}_{G3}$$



Zone de CB : $G_4 \in [CB] \quad x_4 \in [0;L]$

$$[T_{\text{int}}^{CB}]_{G_4} = +[T_{ext\to aval}]_{G_4} = +\begin{Bmatrix} P/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & PL/8 \end{Bmatrix}_{G4}$$

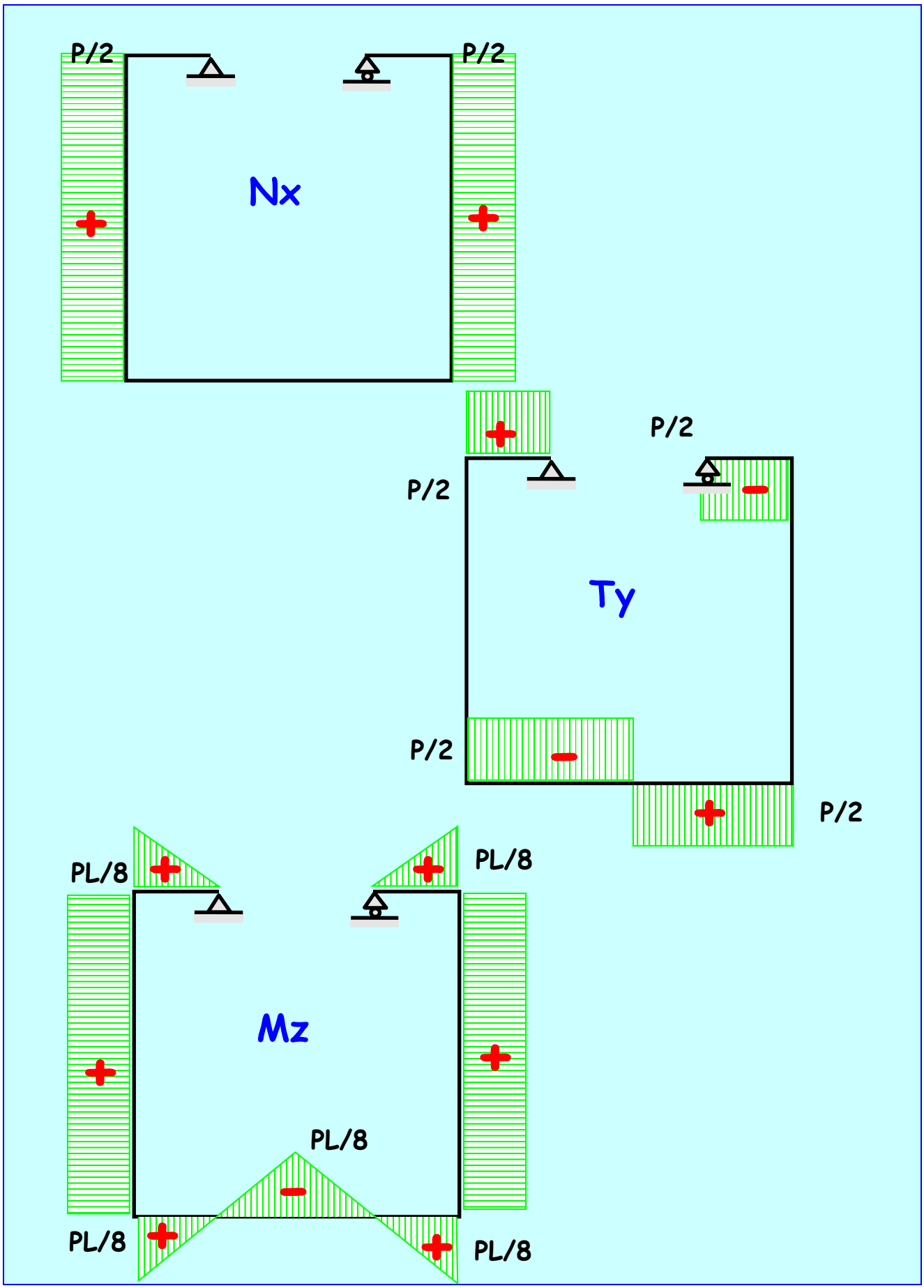
$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{G4}} \Rightarrow \left| \begin{matrix} N_x = P/2 \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{matrix} \right. & \overrightarrow{M_{G_4}} \Rightarrow \left| \begin{matrix} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = PL/8 \end{matrix} \right. \end{Bmatrix}_{G4}$$



Zone de BA : $G_5 \in [BA] \quad x_5 \in [0;L/4]$

$$[T_{\text{int}}^{BA}]_{G_5} = +[T_{ext\to aval}]_{G_5} = +\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ P/2 & 0 \\ 0 & (L/4 - x_5)P/2 \end{Bmatrix}_{G5}$$

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{G5}} \Rightarrow \left| \begin{matrix} N_x = 0 \\ T_y = P/2 \\ T_z = 0 \end{matrix} \right. & \overrightarrow{M_{G_5}} \Rightarrow \left| \begin{matrix} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = (L/4 - x_5)P/2 \end{matrix} \right. \end{Bmatrix}_{G5}$$


P/2
P/2
Nx
P/2
P/2
Ty
P/2
P/2
PL/8
PL/8
Mz
PL/8
PL/8
PL/8

PROBLÈME N°4

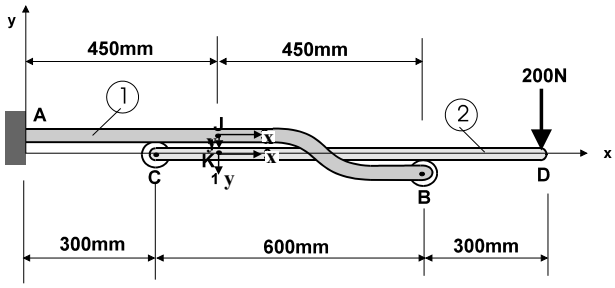


Figure 1

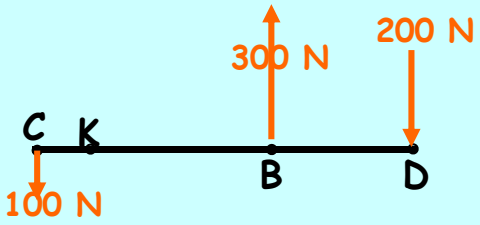
Un support ajustable plan est composé de deux poutres AB notée (1) et CD notée (2). La liaison en A est un encastrement, les liaisons en C et B des liaisons ponctuelles sans frottement. Une force verticale de 200N est appliquée en D. Notez l'orientation particulière du repère !

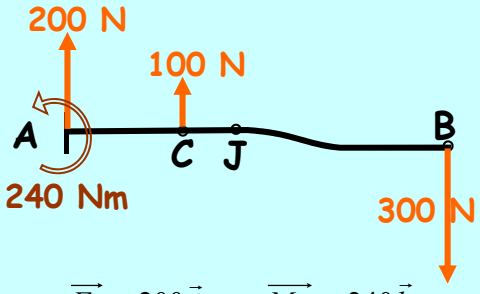
1°) Isolez le solide (2). Calculez dans le repère x,y,z les composantes des actions en B et C s'exerçant sur celui-ci.

2°) Isolez le solide (1). Calculez dans le repère x,y,z la réaction et le moment en A (en Nm)

3°) Calculer (dans le repère x,y,y) l'effort tranchant Ty (en N) et le moment fléchissant Mz (en Nm) au point J de la poutre AB et au point K de la poutre CD.

REPONSES N°4





$\overrightarrow{F_{C_{1/2}}} = -100\vec{j}$ $\quad \overrightarrow{F_{B_{1/2}}} = 300\vec{j}$ $\quad \overrightarrow{F_A} = 200\vec{j}$ $\quad \overrightarrow{M_A} = 240\vec{k}$

$T_Y^J = 300N$ $\quad M_Z^J = 135Nm$ $\quad T_Y^K = -100N$ $\quad M_Z^K = 15Nm$

PROBLÈME N°5

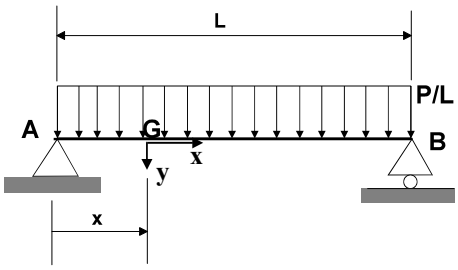


Figure 2a

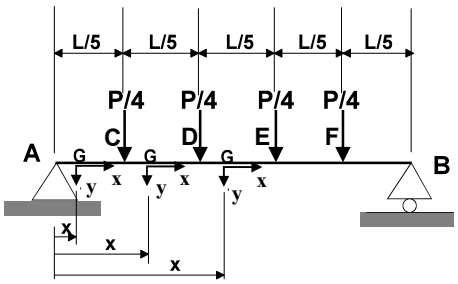


Figure 2b

Une poutre de longueur L et de poids P repose sur deux appuis. La liaison en A est une articulation plane, la liaison en B une liaison ponctuelle sans frottement. Le poids P est modélisé soit comme une charge uniformément répartie à raison de $\frac{P}{L}$ N/m (voir Figure 2a), soit avec quatre forces concentrées équidistantes $\frac{P}{4}$ (voir Figure2 b).

Notez que le repère de calcul a son axe « y » dirigé vers le bas.

1°) Après avoir déterminé les réactions en A et B, calculez les expressions du moment fléchissant Mz (dans le repère x,y,z) dans chacun des deux cas en fonction de P, L et x sous forme de polynôme réduit en x (présenter les résultats sous forme de tableau).

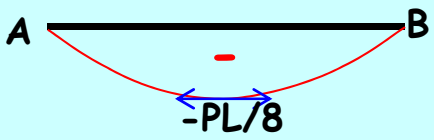
a) Entre A et B pour le cas (a).

b) Entre A et C, puis entre C et D et enfin entre D et E pour le cas (b).

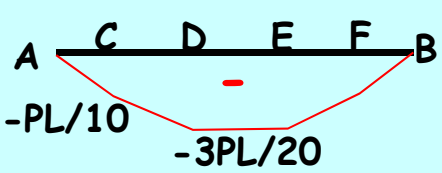
2°) Tracer les variations de Mz dans chacun des deux cas en indiquant la valeur de l'extremum du moment fléchissant en fonction de P et de L.

REPONSES N°5

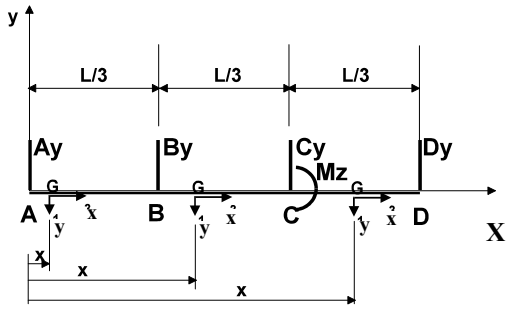
Cas (a) : $M_Z^{AB} = -\frac{P}{2}x + \frac{P}{2L}x^2$

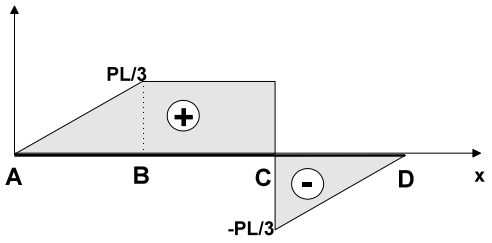


Cas (b) : $M_Z^{AC} = -\frac{P}{2}x \quad M_Z^{CD} = -\frac{P}{4}x - \frac{PL}{20} \quad M_Z^{DE} = -\frac{3PL}{20}$



PROBLÈME N°6





Une poutre de longueur L est en équilibre sous l'action d'un torseur extérieur plan composé de quatre forces verticales inconnues, Ay en A, By en B, Cy en C, Dy en D et d'un moment inconnu Mz en C. On connaît le diagramme représentant les variations du moment fléchissant Mz dans le repère x,y,z en fonction de P (homogène à une force) et L.
Notez que le repère de calcul a son axe « y » dirigé vers le bas.

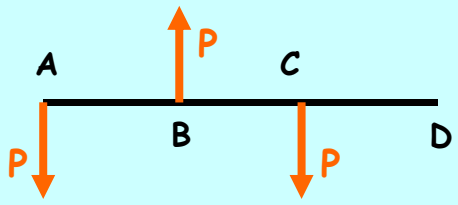
1°) A partir du diagramme, écrire les équations, sous forme de polynôme réduit en x, (en fonction de P, L et x) représentant les variations de Mz pour chacune des trois zones AB, BC et CD. En déduire les expressions de l'effort tranchant Ty en fonction de P dans les trois zones.

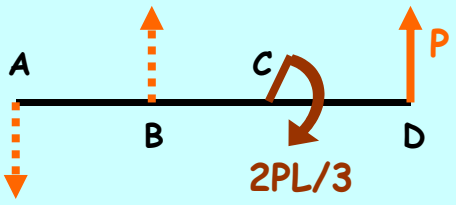
2°) Calculez à partir des efforts tranchants dans les trois zones AB, BC et CD les trois forces extérieures verticales en A, B et C en fonction de P.

3°) En écrivant dans le repère X,Y,Z que la poutre est en équilibre en déduire la quatrième force extérieure verticale en D en fonction de P et le moment extérieur en C en fonction de P et de L.

REPONSES N°6

$$\left|\begin{array}{l} M_Z^{AB} = Px \\ M_Z^{BC} = \dfrac{PL}{3} \\ M_Z^{CD} = Px - PL \end{array}\right. \qquad T_Y = -M'_Z \qquad \left|\begin{array}{l} T_Y^{AB} = -P \\ T_Y^{BC} = 0 \\ T_Y^{CD} = -P \end{array}\right.$$





PROBLÈME N°7

La figure a représente un pont à couple à denture spirale de camion. La figure b représente de façon schématique l'arbre porte-pignon ABCD. Cet arbre est en équilibre sous l'action, en B et C des réactions exercées par les roulements, en E des efforts exercés par la roue sur le pignon, en D du couple moteur. Les cotes sont en mm, les forces en kN.
En considérant la liaison roulement C / arbre comme une liaison sphère/cylindre (liaison linéaire annulaire) et la liaison roulement B / arbre comme une liaison sphère /sphère (liaison rotule ou sphérique).

1°) Calculez, dans le repère X,Y,Z, **et en réduisant le torseur en B**, les composantes des réactions en B et C exercées par les roulements sur l'arbre (en kN) et le couple moteur en D (en Nm).

2°) Déterminer les expressions, en fonction de x (dans x,y,z), des composantes du torseur de section le long de la poutre et tracer leurs variations

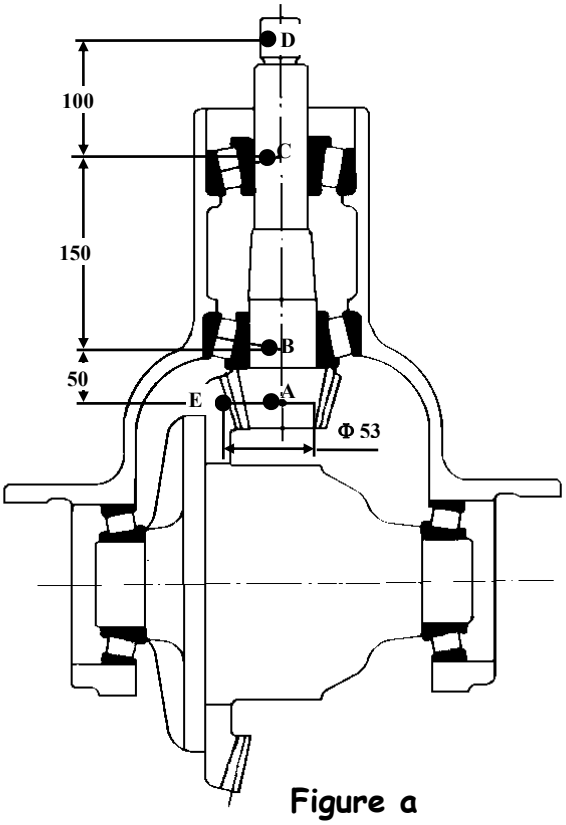


Figure a

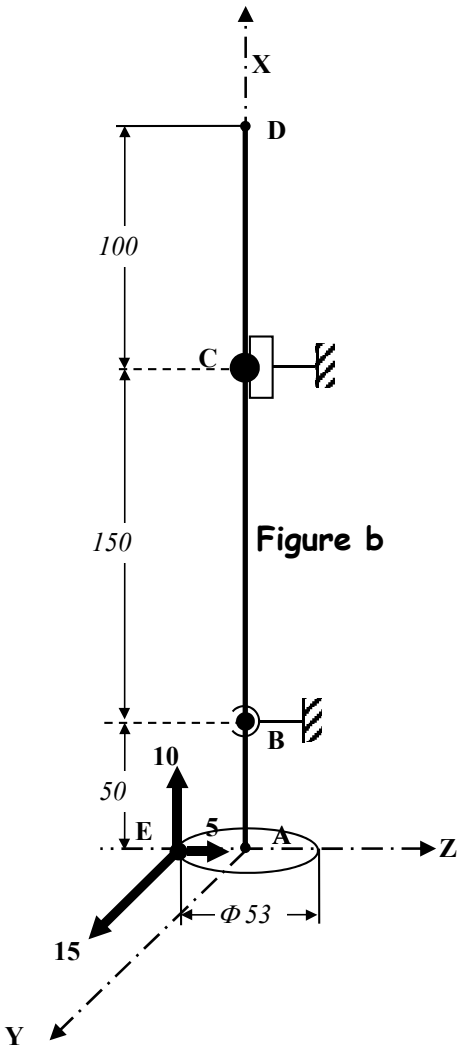
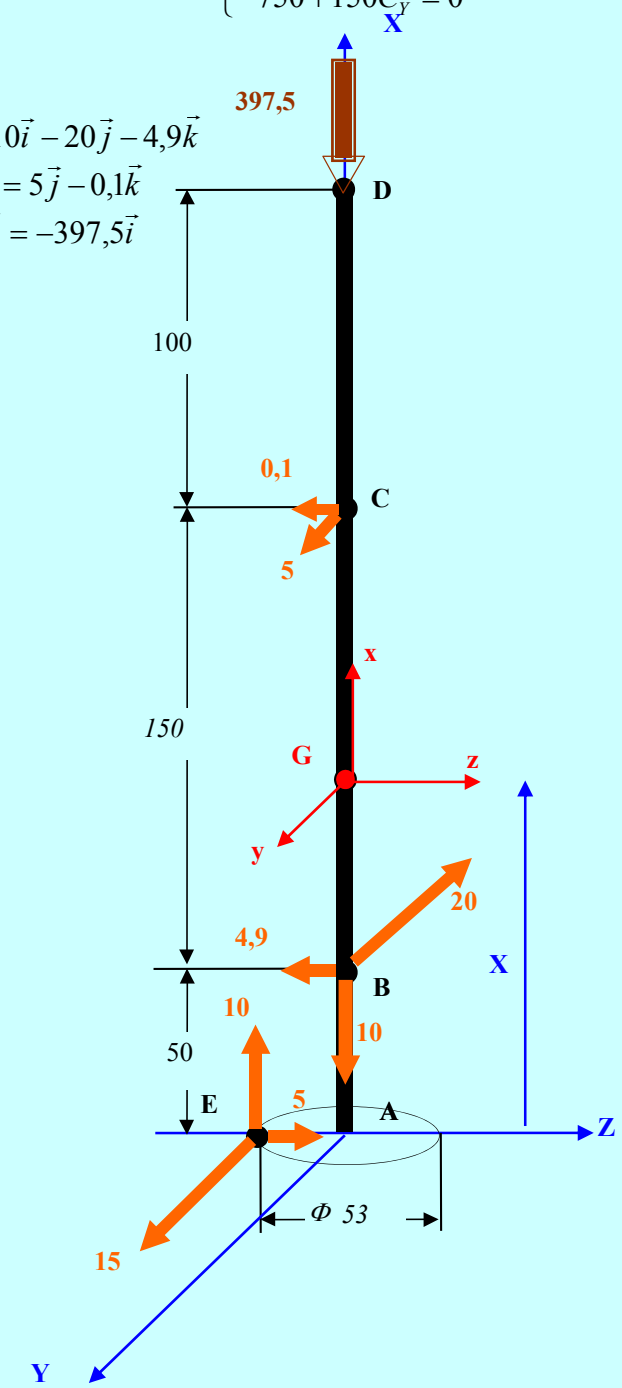


Figure b

REPONSES N°7

$$\begin{cases} \vec{R} = \overrightarrow{F_E} + \overrightarrow{F_B} + \overrightarrow{F_C} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{BE} \wedge \overrightarrow{F_E} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{F_C} + \overrightarrow{C_m} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 + B_X = 0 \\ 15 + B_Y + C_Y = 0 \\ 5 + B_Z + C_Z = 0 \end{cases} \begin{cases} 397{,}5 + C_{mX} = 0 \\ -15 - 150C_Z = 0 \\ -750 + 150C_Y = 0 \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{F_B} = -10\vec{i} - 20\vec{j} - 4{,}9\vec{k} \\ \overrightarrow{F_C} = 5\vec{j} - 0{,}1\vec{k} \\ \overrightarrow{C_m} = -397{,}5\vec{i} \end{array} \right.$$



Zone AB : 0 < x < 50mm

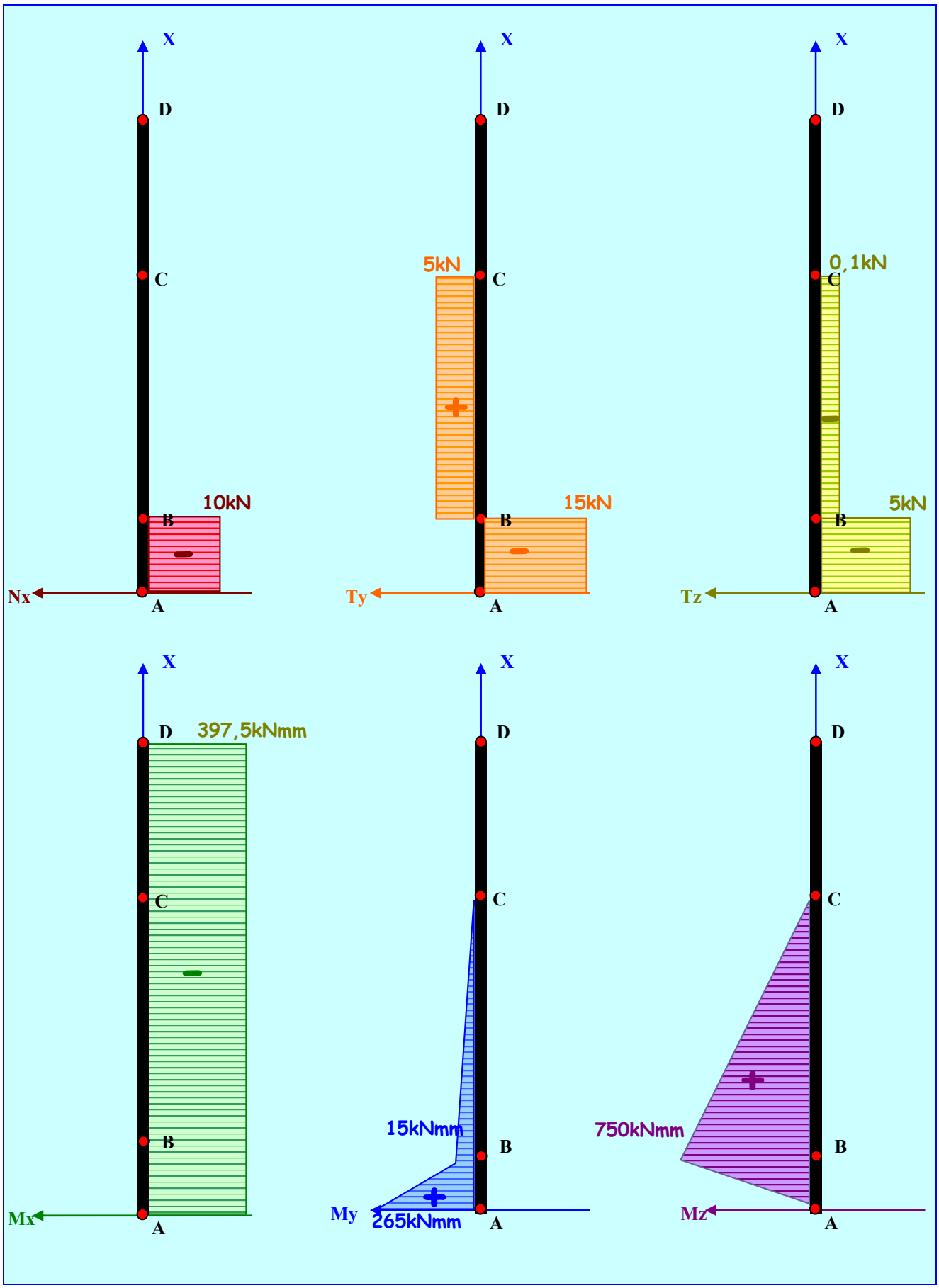
$$\begin{cases} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = -10 \\ T_y = -15 \\ T_z = -5 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_x = -397{,}5 \\ M_y = 265 - 5x \\ M_z = 15x \end{array} \right. \end{cases}$$

Zone BC : 50mm < x < 200mm

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = 0 \\ T_y = 5 \\ T_z = -0{,}1 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_x = -397{,}5 \\ M_y = -0{,}1x + 20 \\ M_z = -5x + 1000 \end{array} \right. \end{cases}$$

Zone CD : 200mm < x < 300mm

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = 0 \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_x = -397{,}5 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{array} \right. \end{cases}$$


X
D
C
B
A
10kN
Nx
5kN
15kN
Ty
0,1kN
5kN
Tz
397,5kNmm
Mx
15kNmm
My
265kNmm
750kNmm
Mz

PROBLÈME N°8

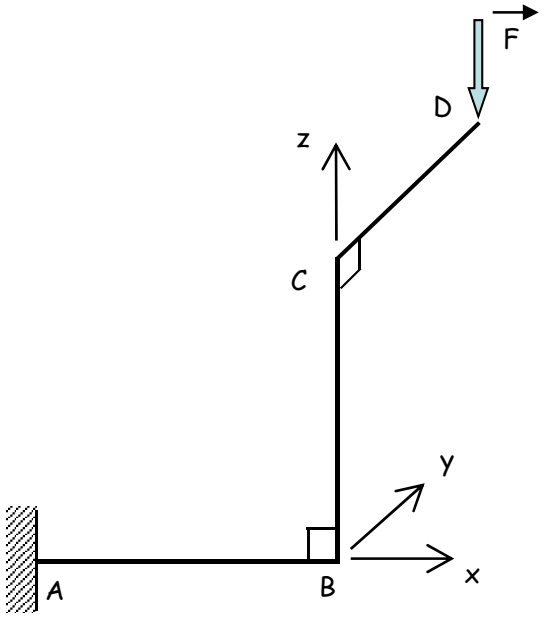
Le système suivant est constitué de trois poutres de longueur égale (L) dans l'espace. Les trois poutres sont liées rigidement entre elles avec des angles de 90°.

Une force $\vec{F}$ est appliquée en D. Le système est encastré en A.

<u>Données</u> : L = 200 mm
Module de la force : 500 N

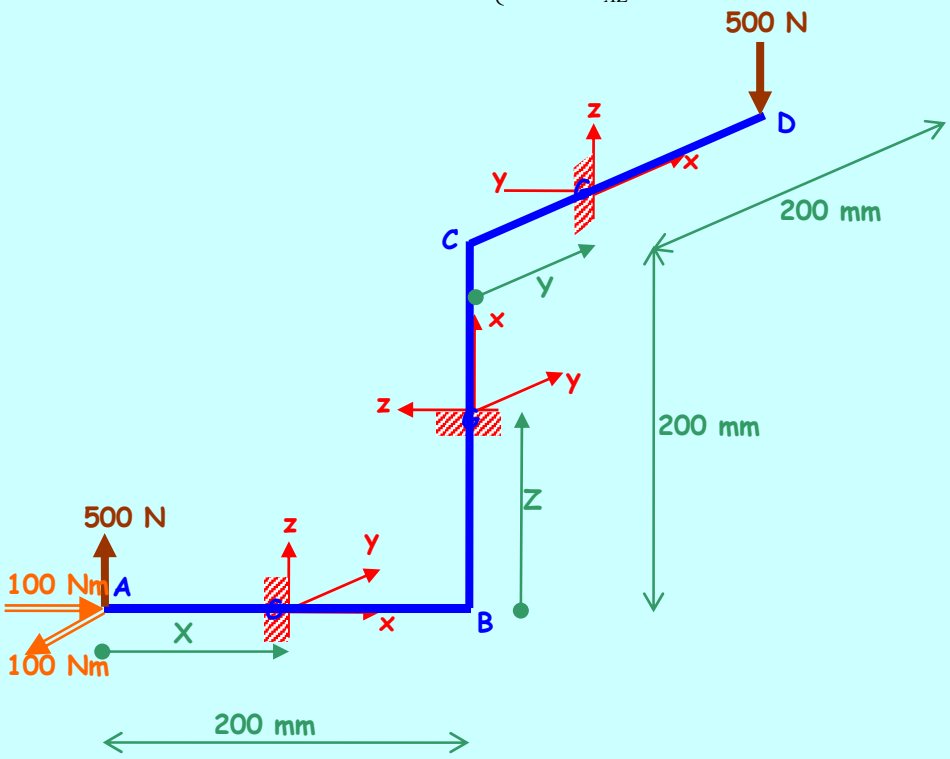
1. Etude statique
   Déterminer les actions exercées en A sur le système.

2. Torseur de section
   Déterminer les expressions du torseur de section dans les trois poutres et tracer les diagrammes des actions internes. En déduire l'endroit où le système risque de casser (les trois poutres étant identiques).



REPONSES N°8

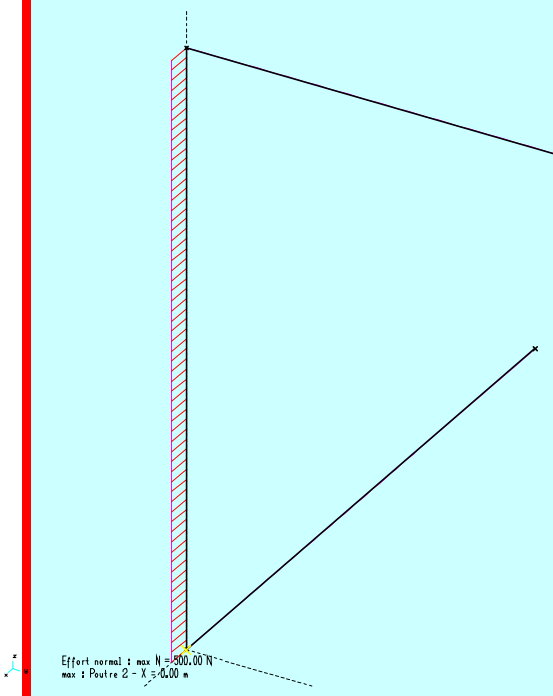
$$\text{Equilibre}\quad \begin{cases} \vec{R} = \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_D} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{/A}} = \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{F_D} + +\overrightarrow{M_A} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_X = 0 \\ A_Y = 0 \\ A_Z - 500 = 0 \\ -500L + M_{AX} = 0 \\ 500L + M_{AY} = 0 \\ M_{AZ} = 0 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{F_A} = +500\vec{k} \\ \overrightarrow{M_A} = 100\vec{i} - 100\vec{j} \end{array} \right.$$

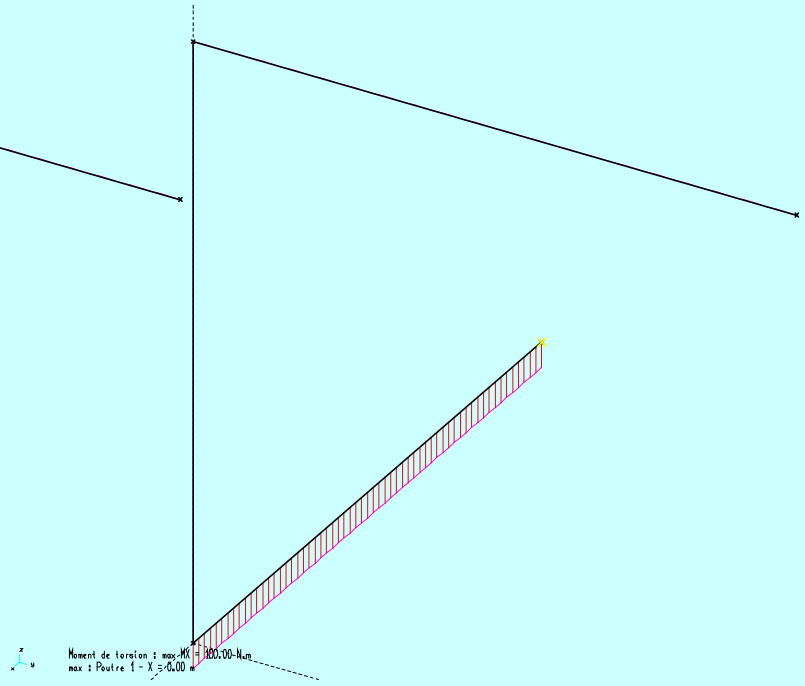


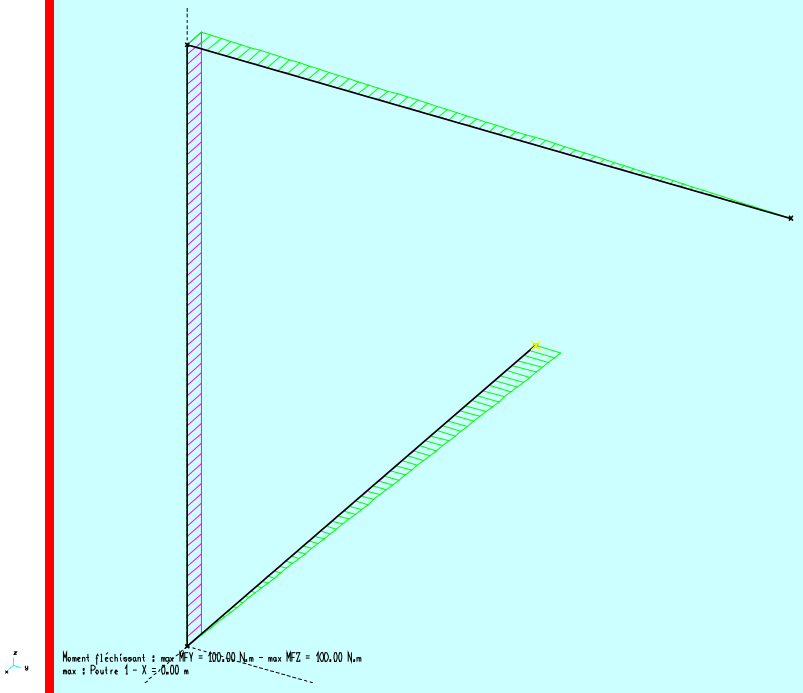
$$\text{Zone AB}: 0 < X < 200\text{mm} \begin{cases} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = 0 \\ T_y = 0 \\ T_z = -500 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_x = -100 \\ M_y = 500(200 - X) \\ M_z = 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

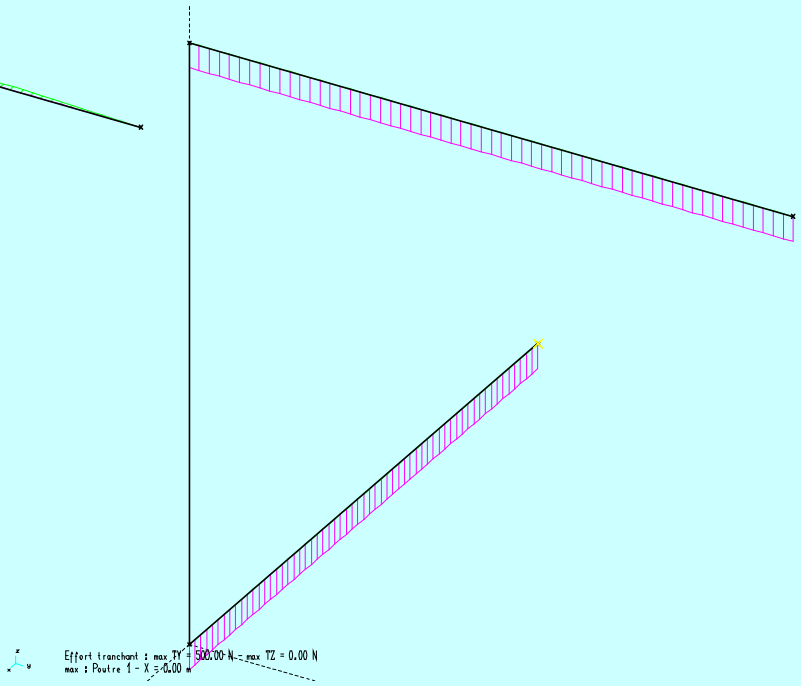
$$\text{Zone BC}: 0 < Z < 200\text{mm} \begin{cases} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = -500 \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = 100 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\text{Zone CD}: 0 < Y < 200\text{mm} \begin{cases} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = 0 \\ T_y = 0 \\ T_z = -500 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_x = 0 \\ M_y = 500(200 - Y) \\ M_z = 0 \end{array} \right. \end{cases}$$


Effort normal : max N = -500.00 N
max : Poutre 2 - X = 0.00 m


Moment de torsion : max MX = 100.00 N.m
max : Poutre 1 - X = 0.00 m


Moment fléchissant : max MFY = 100.00 N.m - max MFZ = 100.00 N.m
max : Poutre 1 - X = 0.00 m


Effort tranchant : max TY = 500.00 N - max TZ = 0.00 N
max : Poutre 1 - X = 0.00 m

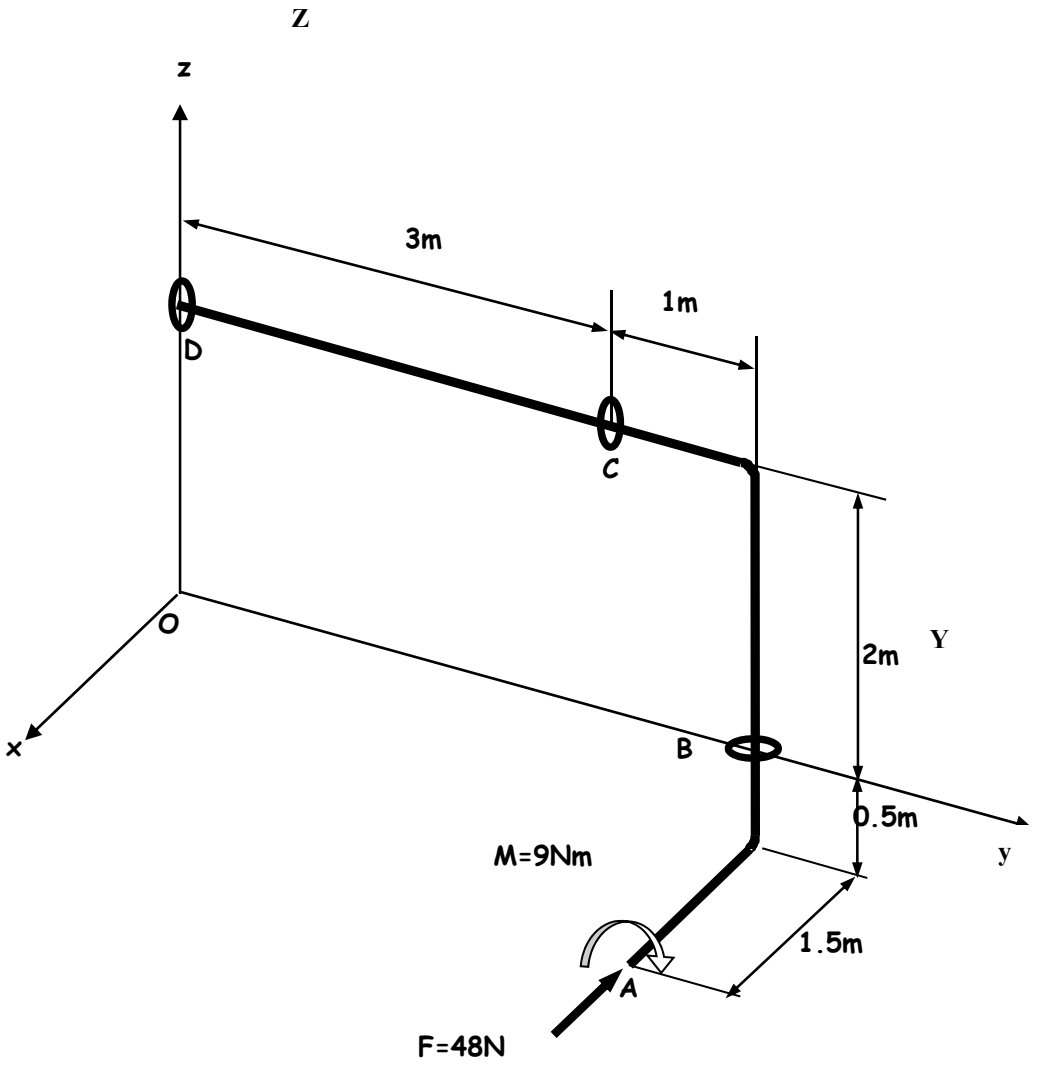
PROBLÈME N°9

Une structure spatiale ABCD est soumise en A à un torseur en A :
$\vec{F} = -48\,\vec{i}$ (en N)
$\vec{M} = -9\,\vec{i}$ (en Nm)

Les liaisons en B, C et D sont des « liaisons linéaires annulaires » (sphère/cylindre) parfaites et sans frottement (considérer que les réactions sont dans un plan perpendiculaire à l'axe de la structure).

1°) Calculer, en N, dans le repère xyz, les composantes des réactions en B, C et D.

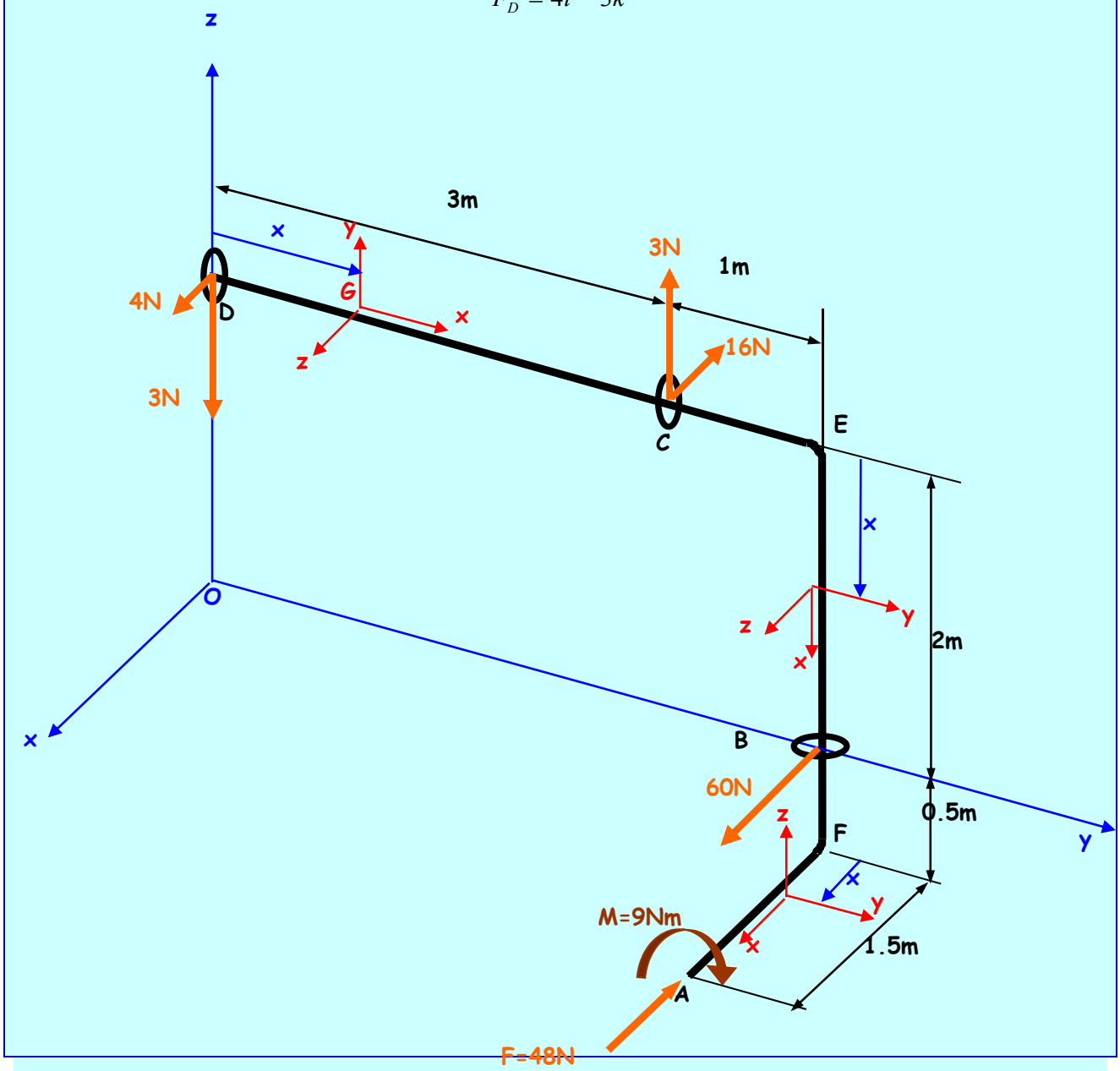
2°) Déterminer les expressions, en fonction de x (dans x,y,z), des composantes du torseur de section le long de la poutre et tracer leurs variations



REPONSES N°9

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} + \overrightarrow{F_C} + \overrightarrow{F_D} = \vec{0} \\ \overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{F_B} + \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{F_C} + \overrightarrow{M_A} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_X + C_X + D_X = 48 \\ B_Y = 0 \\ C_Z + D_Z = 0 \\ 2B_Y + 3C_Z = 9 \\ 2B_X = 120 \\ 4B_X + 3C_X = 192 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{F_B} = 60\vec{i}$$
$$\overrightarrow{F_C} = -16\vec{i} + 3\vec{k}$$
$$\overrightarrow{F_D} = 4\vec{i} - 3\vec{k}$$



Zone DC : 0<x<3m

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = 0 \\ T_y = 3 \\ T_z = -4 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_x = 0 \\ M_y = -4x \\ M_z = -3x \end{array} \right. \end{cases}$$

Zone CE : 3m<x<4m

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = 0 \\ T_y = 0 \\ T_z = 12 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_x = 0 \\ M_y = 12x - 48 \\ M_z = -9 \end{array} \right. \end{cases}$$

Zone EB : 0<x<2m

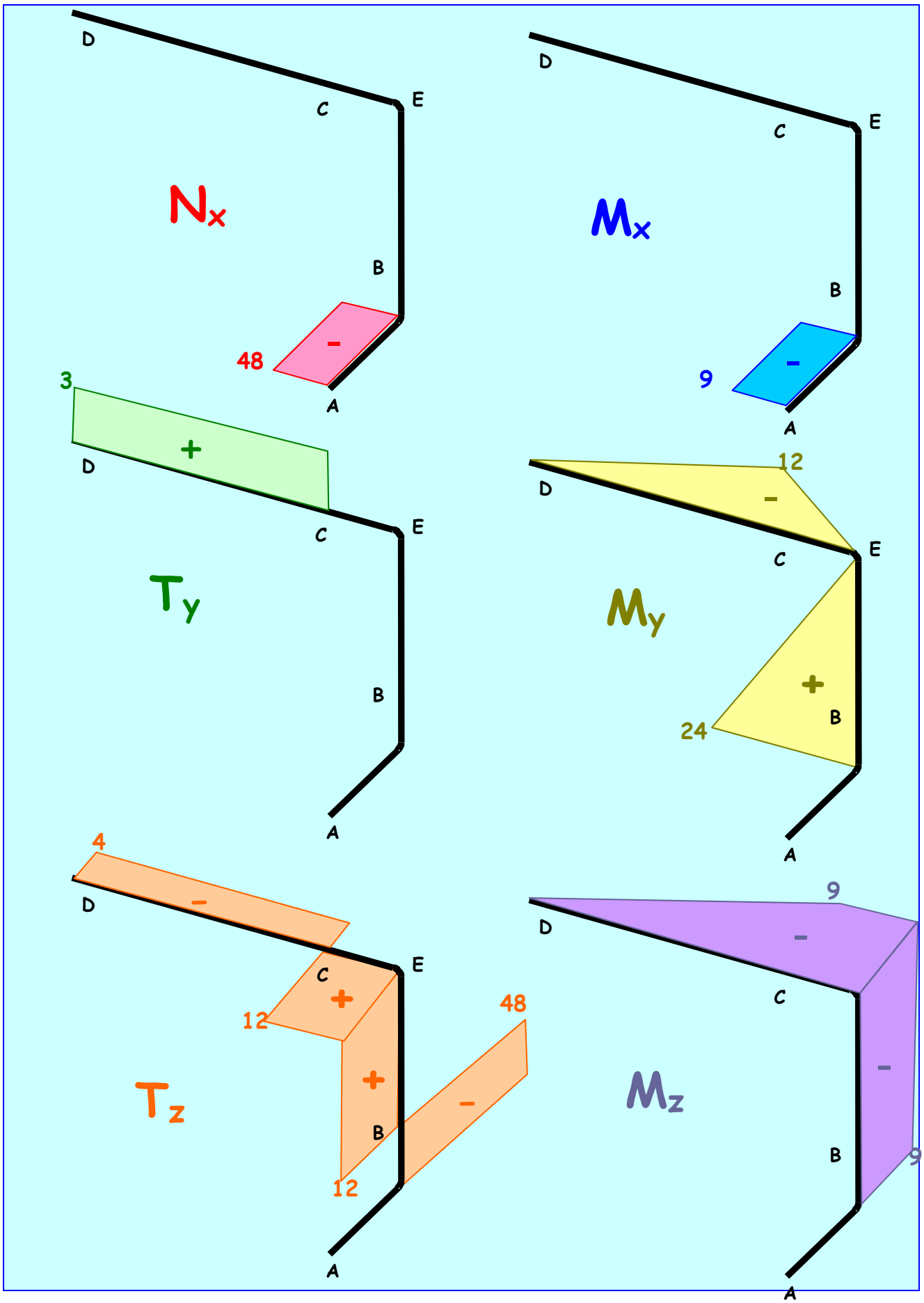
$$\begin{cases} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = 0 \\ T_y = 0 \\ T_z = 12 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_x = 0 \\ M_y = 12x \\ M_z = -9 \end{array} \right. \end{cases}$$

Zone BF : 2m<x<2,5m

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = 0 \\ T_y = 0 \\ T_z = -48 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_x = 0 \\ M_y = -48x + 120 \\ M_z = -9 \end{array} \right. \end{cases}$$

Zone FA : 0<x<1,5m

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = -48 \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_x = -9 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{array} \right. \end{cases}$$


D
C
E
Nx
B
48
-
A
D
C
E
Mx
B
9
-
A
3
+
D
C
E
Ty
B
A
D
12
-
C
E
My
+
B
24
A
4
D
-
C
E
+
12
48
+
Tz
B
-
12
A
D
9
-
C
Mz
-
B
9
A

PROBLÈME N°10

La figure représente une pince de levage pour rails. La figure 2 représente le schéma de la pince. Les cotes sont en cm. Remarquez que la pince de levage admet un axe de symétrie vertical. La pince se compose de deux barres ABCD (1) et EFCG (2), de deux biellettes HD (3) et HG (4) et d'un anneau de levage (5). Les poids propres de toutes les barres et de l'anneau sont négligeables. Toutes les liaisons en A, C, D, E, G et H sont des liaisons verrous. Elles sont supposées parfaites et sans frottement. Les calculs se font dans le repère xy.

1°) Isolez l'ensemble et déterminez la valeur des composantes verticales des réactions en A et E.

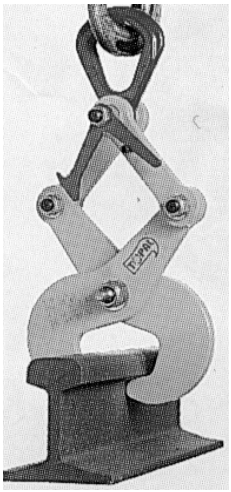
2°) Isolez les biellettes (3) et (4) et donnez la direction des actions s'exerçant à leurs extrémités.

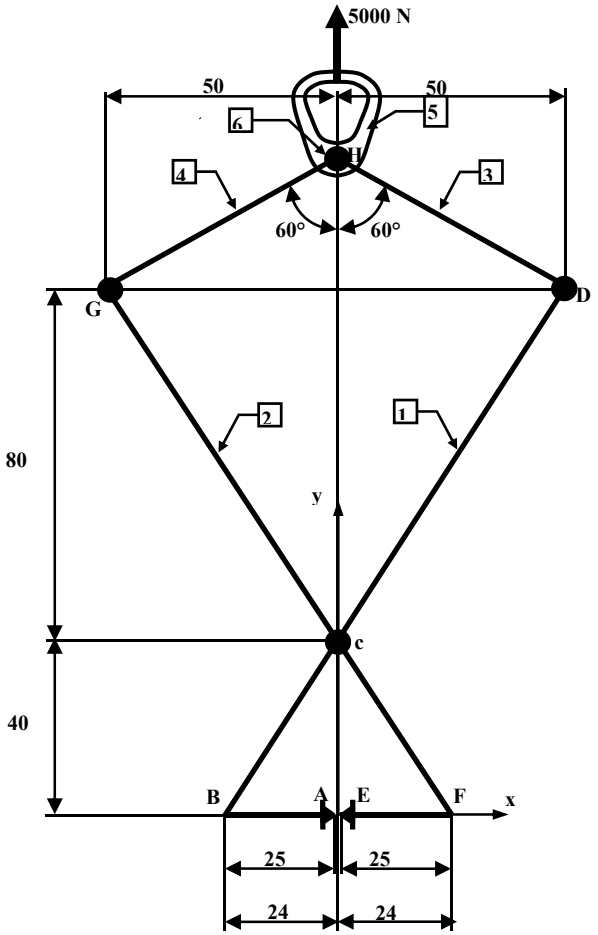
3°) Isolez l'anneau (5) et les deux biellettes (3) et (4). Représentez les forces extérieures connues et inconnues s'exerçant sur ce sous-ensemble. Calculez (ou déterminer graphiquement) les actions s'exerçant en G et D sur ce sous-ensemble.

4°) Isolez la barre (1). Représentez les forces connues et inconnues s'exerçant sur cette barre. Calculez, la composante horizontale de la réaction en A et les composantes de l'action en C.

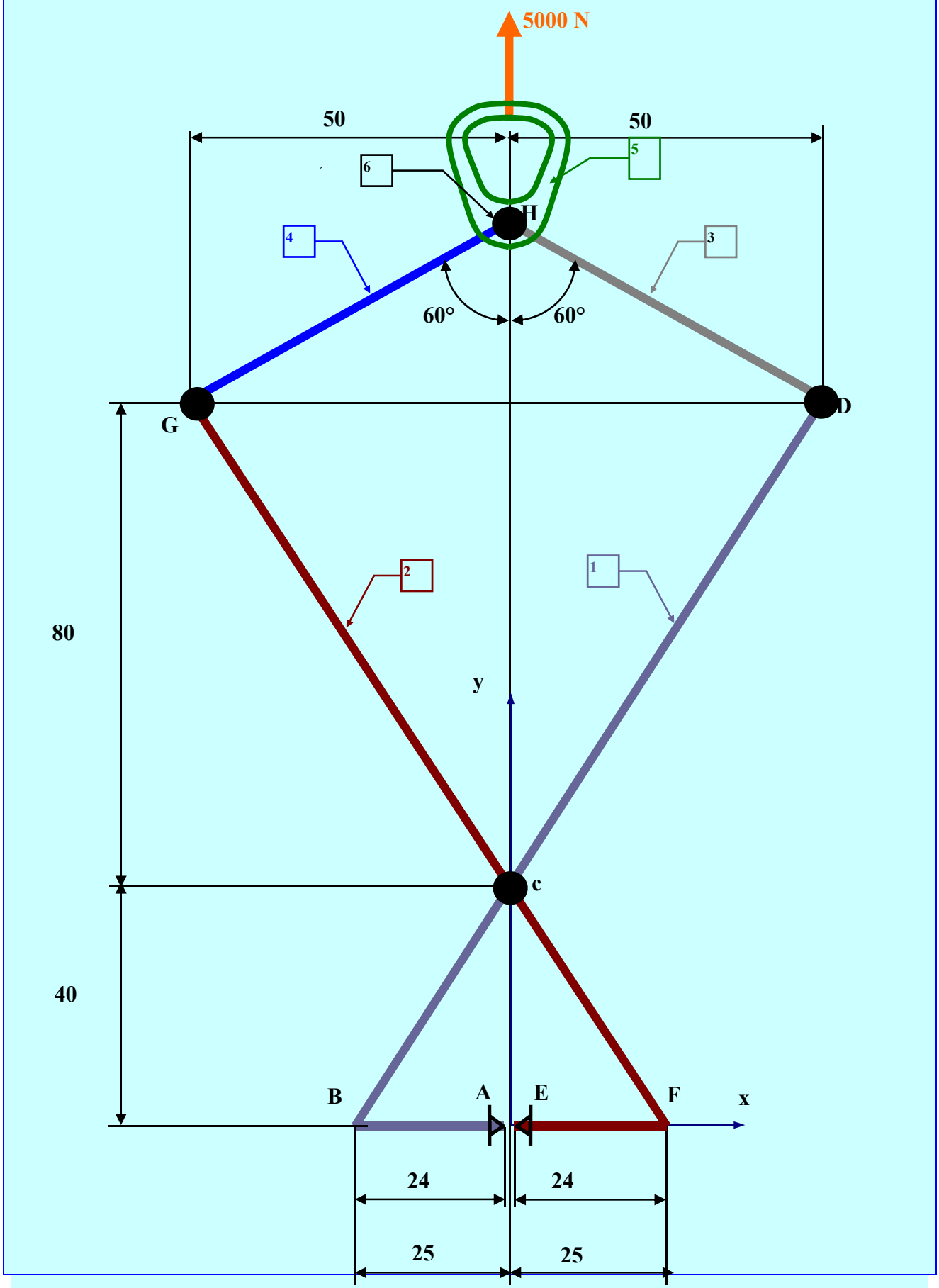
5°) Le coefficient de frottement entre les barres (1) et (2) et le rail vaut 0.18. Ce coefficient est-il suffisant pour soulever le rail ? (en supposant qu'on remplace les verrous A et E par des contacts ponctuels).

6°) Tracez le diagramme des moments fléchissants sur la barre 1.



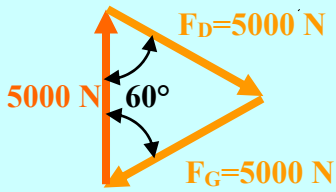


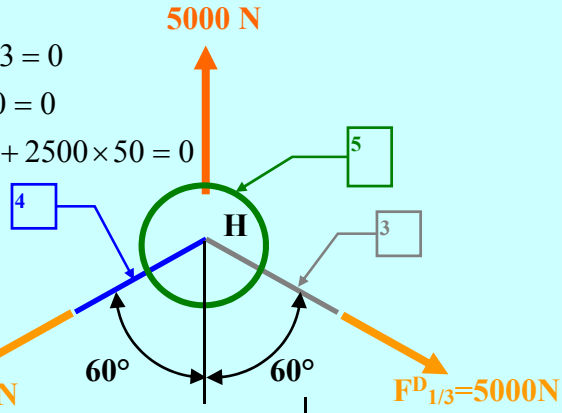
REPONSES N°10



$A_y = E_y$, HG et HD

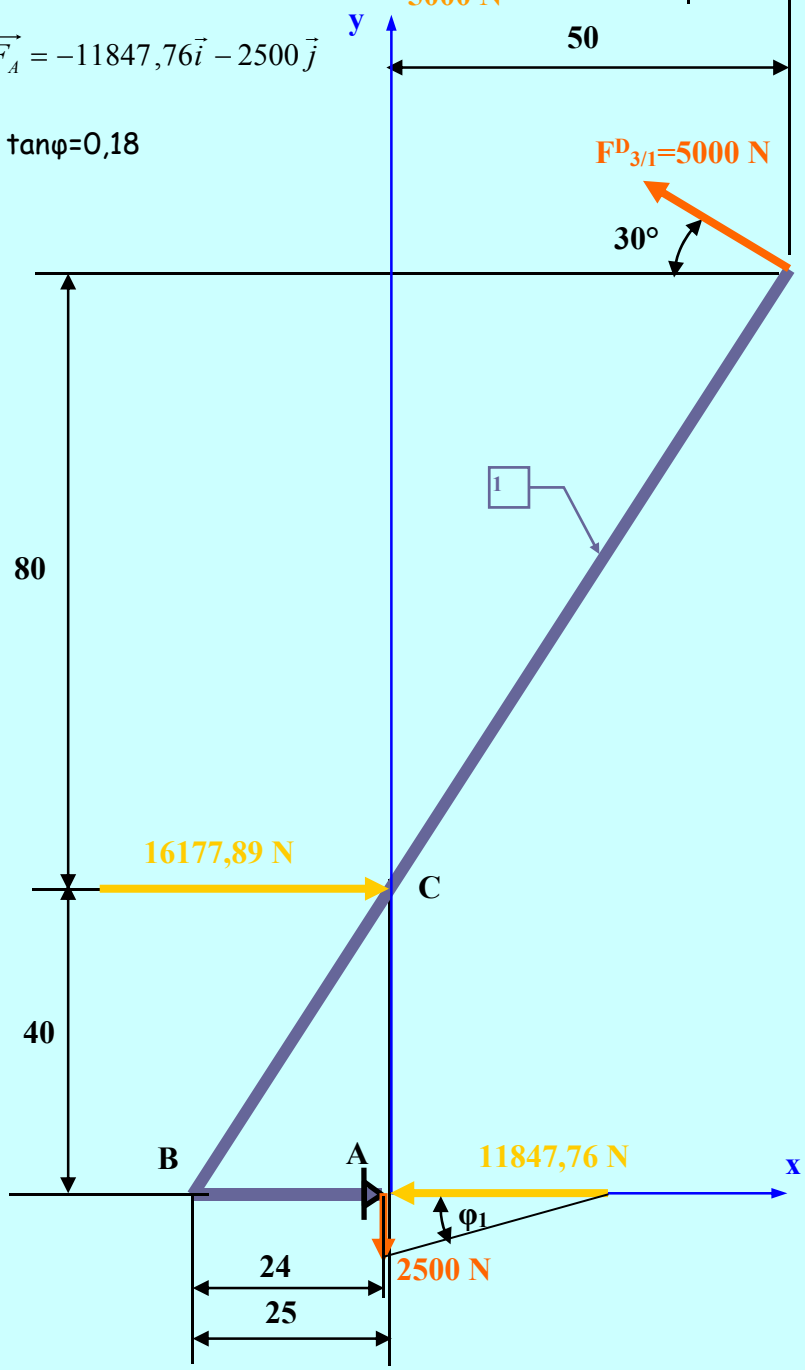
$$\begin{cases} \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_C} + \overrightarrow{F_D} = \vec{0} \\ \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{F_D} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_X + C_X - 4330{,}13 = 0 \\ 2500 + C_Y - 2500 = 0 \\ 2500 + 40A_X + 4330{,}13 \times 80 + 2500 \times 50 = 0 \end{cases}$$





$\overrightarrow{F_C} = 16177{,}89\vec{i}$; $\overrightarrow{F_A} = -11847{,}76\vec{i} - 2500\vec{j}$

Non : $\tan\varphi_1 = 0{,}21 > \tan\varphi = 0{,}18$



Zone DC : 0< x <94,34mm

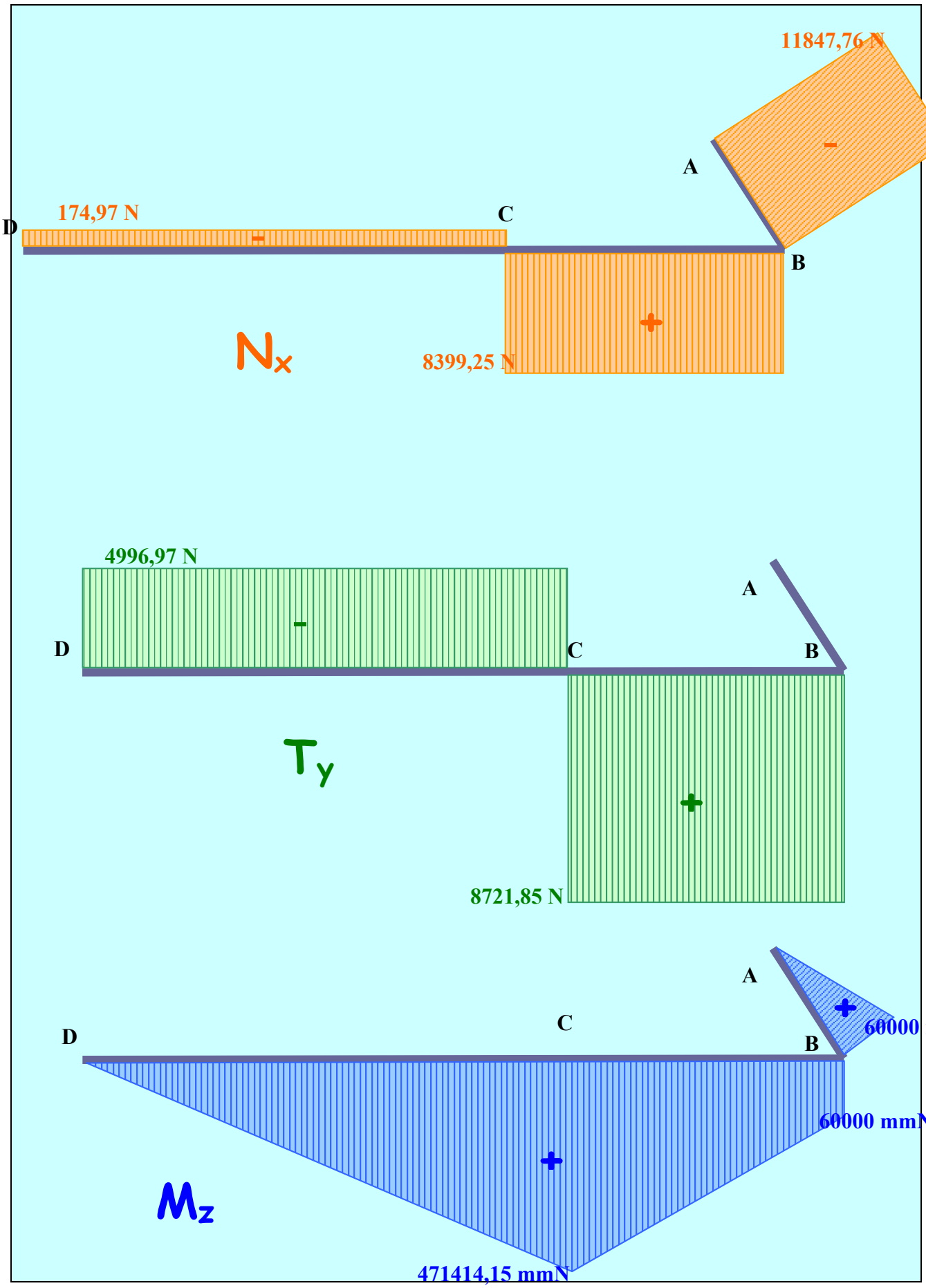
$$\begin{cases} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = -174{,}97 \\ T_y = -4996{,}97 \\ 0 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ M_z = 4996{,}97x \end{array} \right. \end{cases}$$

Zone CB : 94,34mm < x <141,51mm

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = +8399{,}25 \\ T_y = 8721{,}85 \\ 0 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ M_z = -8721{,}85x + 1294233{,}48 \end{array} \right. \end{cases}$$

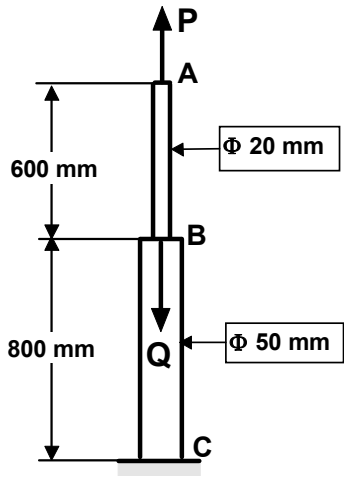
Zone BA : 0 < x< 24mm

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = -11847{,}76 \\ T_y = 2500 \\ 0 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ M_z = -2500x + 60000 \end{array} \right. \end{cases}$$


11847,76 N
A
174,97 N
D
C
B
Nx
8399,25 N
4996,97 N
A
D
C
B
Ty
8721,85 N
A
C
D
B
60000 mmN
60000 mmN
Mz
471414,15 mmN

TRACTION-COMPRESSION

PROBLÈME N°1



La barre ABC est soumise à une force Q = 150 kN et à une force P inconnue. Sachant que E = 200 GPa, calculez la valeur de P pour laquelle le déplacement de A est nul. Calculez alors le déplacement de B.

N.B. On néglige l'effet de la variation brutale de la section sur les allongements.

REPONSES N°1

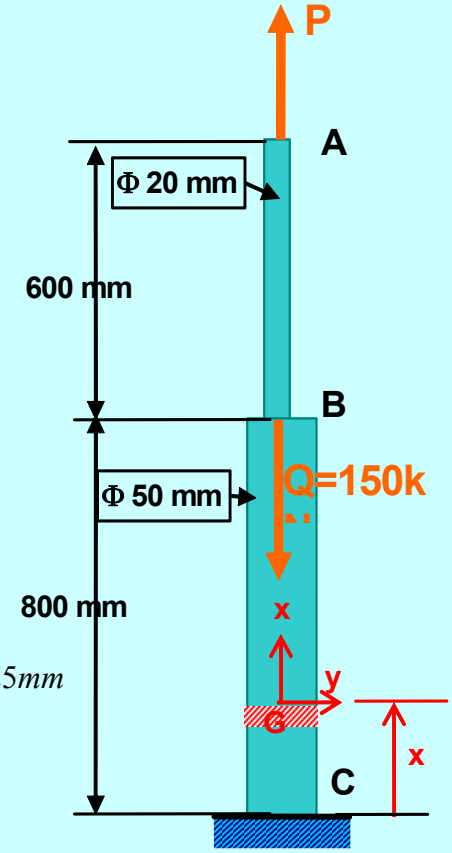
$$N_x^{CB} = -150 + P \qquad N_x^{BA} = +P$$

$$\Delta L_{CB} = \frac{N_x^{CB} L_{CB}}{E A_{CB}} \qquad \Delta L_{BA} = \frac{N_x^{BA} L_{BA}}{E A_{BA}}$$

$$\Delta A = 0 \Rightarrow \Delta L_{CB} + \Delta L_{BA} = 0$$

$$\frac{3P}{2} + \frac{8P}{25} - \frac{150 \times 8}{25} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = 26{,}4kN$$

$$\Delta B = \Delta L_{CB} = \frac{(-150 + 26{,}4)10^3 \times 800 \times 4}{2.10^5 \times \pi \times 50^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta B = -0{,}25mm$$



PROBLÈME N°2

Un câble vertical en acier, de longueur 50m, de section droite circulaire, de module de YOUNG E = 210 GPa, de limite élastique σe = 240 MPa, de poids volumique μ est soumis à son extrémité libre à un effort de traction P = 2000 N. Le coefficient de sécurité vaut 6. Calculez le diamètre minimum du câble et son allongement quand:

a) $\mu = 0$
b) $\mu = 7.8\ 10^4$ N/m^3

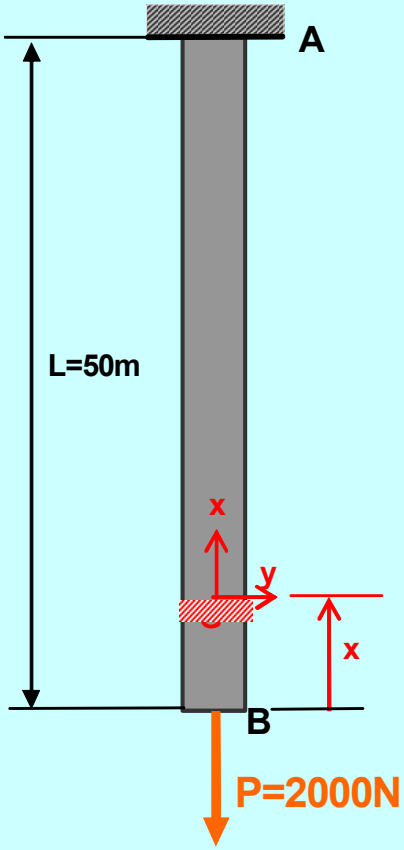
REPONSES N°2

a) μ = 0

$$N_x^{BA} = +P$$

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} \leq \frac{\sigma_e}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad d \geq \sqrt{\frac{4P\alpha}{\pi\sigma_e}} \quad \Rightarrow \quad d = 8mm$$

$$\Delta L = \frac{N_x L}{EA} = \frac{2000 \times 50 \times 10^3 \times 4}{210 \times 10^3 \times \pi \times 8^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta L = 9{,}5mm$$



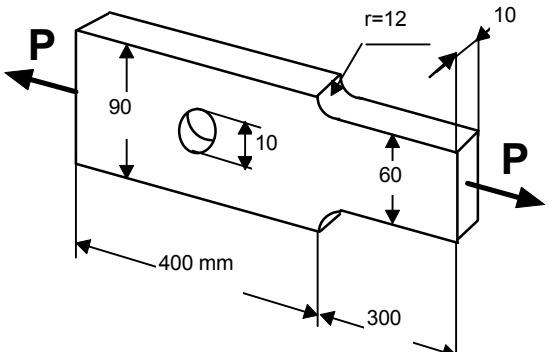
b) μ = 7.8 10^4 N/m^3

$$N_x^{BA} = P + p_{(x)} = P + \mu A x \quad \Rightarrow \quad N_x^{\max} = P + \mu A L$$

$$\sigma_{xx} \leq \frac{\sigma_e}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad d \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi\left(\frac{\sigma_e}{\alpha} - \mu L\right)}} \quad \Rightarrow \quad d = 8{,}4mm$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{\Delta(dx)}{dx} \\ \sigma_{xx} &= \frac{P + \mu A x}{A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta L = \int_0^L \left(\frac{P}{AE} + \frac{\mu x}{E}\right) dx = \frac{PL}{AE} + \frac{\mu L^2}{2E} = 9{,}05mm$$

PROBLÈME N° 3



Calculez la contrainte maximum pour P = 36 kN

REPONSES N°3

$$K_{trou} \Rightarrow \quad \frac{r}{d} = \frac{5}{80} = 0{,}0625 \quad K_{trou} = 2{,}65$$

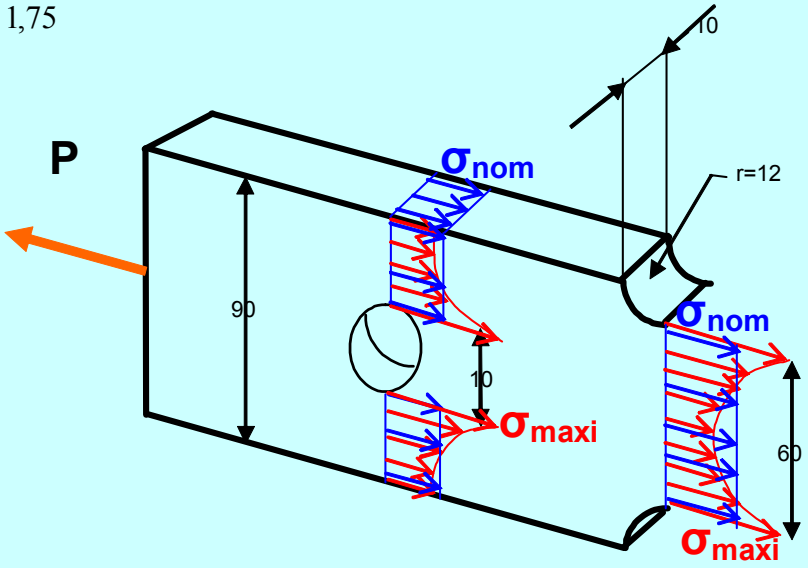
$$K_{epaul^t} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{D}{d} = \dfrac{90}{60} = 1{,}5 \\ \dfrac{r}{d} = \dfrac{12}{60} = 0{,}2 \end{cases} \qquad K_{epaul^t} = 1{,}75$$

$$\sigma_{\max i} = K\sigma_{nom}$$

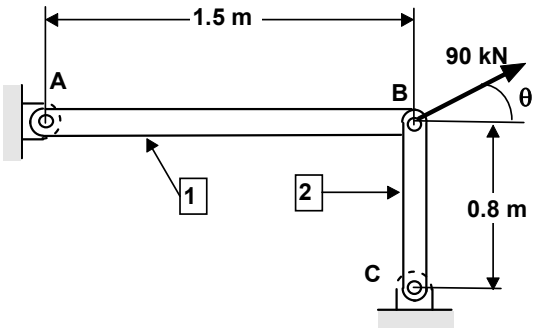
$$\sigma_{\max i}^{trou} = 2{,}65\frac{36000}{10\times 80} = 119MPa$$

$$\sigma_{\max i}^{epaul^t} = 1{,}75\frac{36000}{10\times 60} = 105MPa$$

$$\sigma_{\max i} = 119MPa$$



PROBLÈME N°4



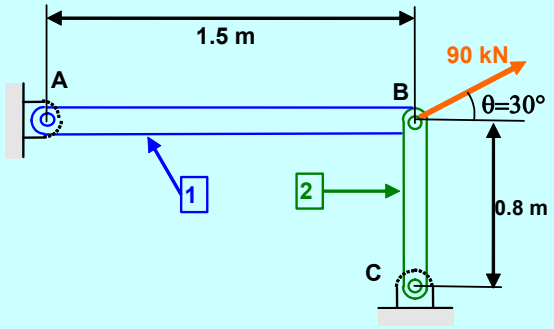
Toutes les liaisons sont des liaisons verrous. Les aires des sections droites de AB et BC valent respectivement 500 mm² et 750 mm². Le module de YOUNG vaut 200 GPa.

1°) Déterminez la grandeur et la direction du déplacement du point B quand θ = 30°

2°) Déterminez la valeur de θ pour que la direction du déplacement du point B soit de 45°. Quelle est alors la valeur du déplacement du point B ?

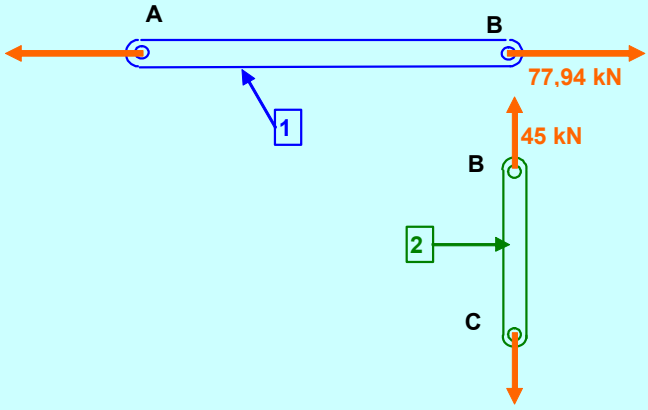
REPONSES N°4

$$\Delta L_{BA} = \frac{N_x^{BA} L_{BA}}{EA_{BA}} \qquad \Delta L_{CB} = \frac{N_x^{CB} L_{CB}}{EA_{CB}}$$

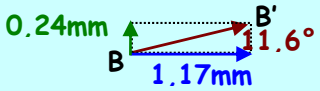


$$\Delta L_{BA} = \frac{77{,}94.10^3 \times 1500}{200.10^3 \times 500} = 1{,}17mm$$

$$\Delta L_{BC} = \frac{45.10^3 \times 800}{200.10^3 \times 750} = 0{,}24mm$$



$$\Delta BB' = 1{,}19mm$$

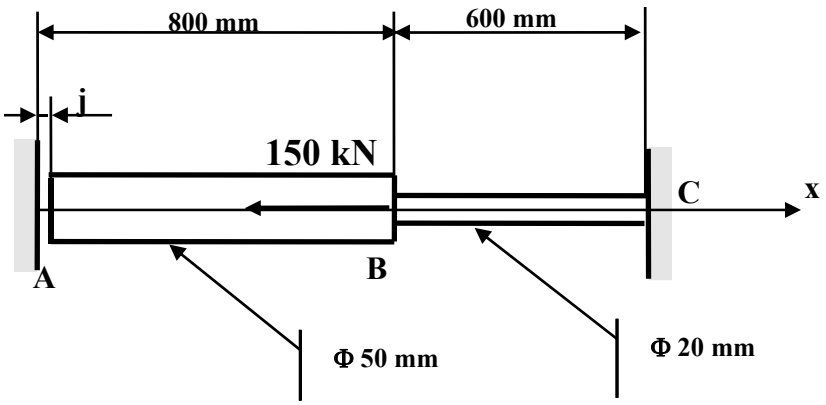


$$\Delta L_{BA} = \frac{P\cos\theta L_{BA}}{EA_{BA}} = \Delta L_{CB} = \frac{P\sin\theta L_{CB}}{EA_{CB}}$$

$$\tan\theta = \frac{L_{BA}A_{CB}}{L_{CB}A_{BA}} \Rightarrow \quad \theta = 70°43$$

$$\Delta BB' = \sqrt{2}\Delta L_{BA} = \sqrt{2}\frac{90.10^3 \cos 70°43 \times 1500}{200.10^3 \times 500} = 0{,}64mm$$

PROBLÈME N°5



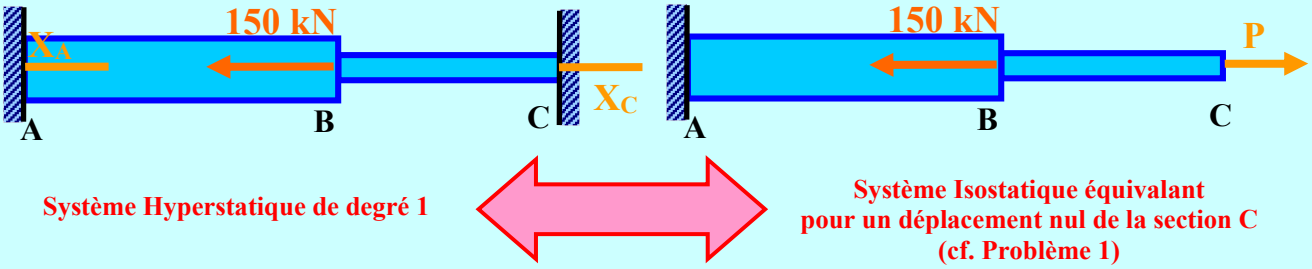
Calculez la valeur des réactions en A et C sachant que E = 200 GPa et que :

a) j=0

b) j=0.4 mm.

REPONSES N°5

a) j=0



$$PFS: \quad -150kN + X_C + X_A = 0 \quad \Rightarrow \quad Problème\ hyperstatique\ (1\ équation\ et\ 2\ inconnues,\ X_A\ et\ X_C)$$

On cherche une équation supplémentaire en déformation, que l'on transformera en équation en réaction.

$$Equation\ supplémentaire\ en\ déformation: \quad \Delta L_{AC} = 0 \quad (1)$$

$$Or \quad \{\Delta L_{AC} = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC}\} \quad et \quad \left\{\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N/S}{E} \quad \Rightarrow \quad \Delta L = \frac{N.L}{S.E}\right\}$$

$$D'où \quad (1) \rightarrow \Delta L_{AC} = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} = \frac{N_{AB}.L_{AB}}{S_{AB}.E_{AB}} + \frac{N_{BC}.L_{BC}}{S_{BC}.E_{BC}} = 0$$

$$On\ sait\ que: \quad E_{AB} = E_{BC} \quad et \quad S_{AB} = \frac{\pi.50^2}{4}, S_{BC} = \frac{\pi.20^2}{4} \quad donc \quad (1) \rightarrow N_{AB}.\frac{L_{AB}}{25} + N_{BC}.\frac{L_{BC}}{4} = 0 \quad (2)$$

$$Torseurs\ de\ section: \quad N_{AB} = -150kN + X_C \quad et \quad N_{BC} = X_C$$

$$Finalement: \quad (2) \rightarrow 4.N_{AB}.L_{AB} + 25.N_{BC}.L_{BC} = 0 \Leftrightarrow 4.(-150kN + X_C).800 + 25.X_C.600 = 0$$

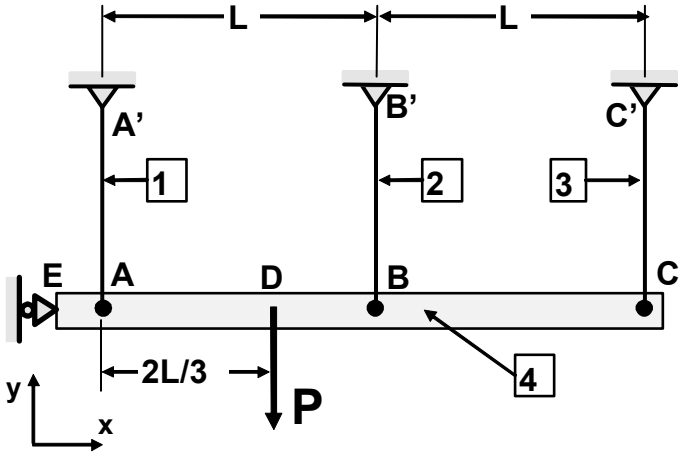
$$\Leftrightarrow \quad 18200.X_C = 4.150kN.800$$

$$Donc: \quad \boxed{X_C = 150kN.\frac{4.800}{18200} = \underline{26,4kN}}$$

$$A\ partir\ du\ PFS: \quad -150kN + X_C + X_A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{X_A = 150kN - X_C = \underline{123.6kN}}$$

PROBLÈME N°6

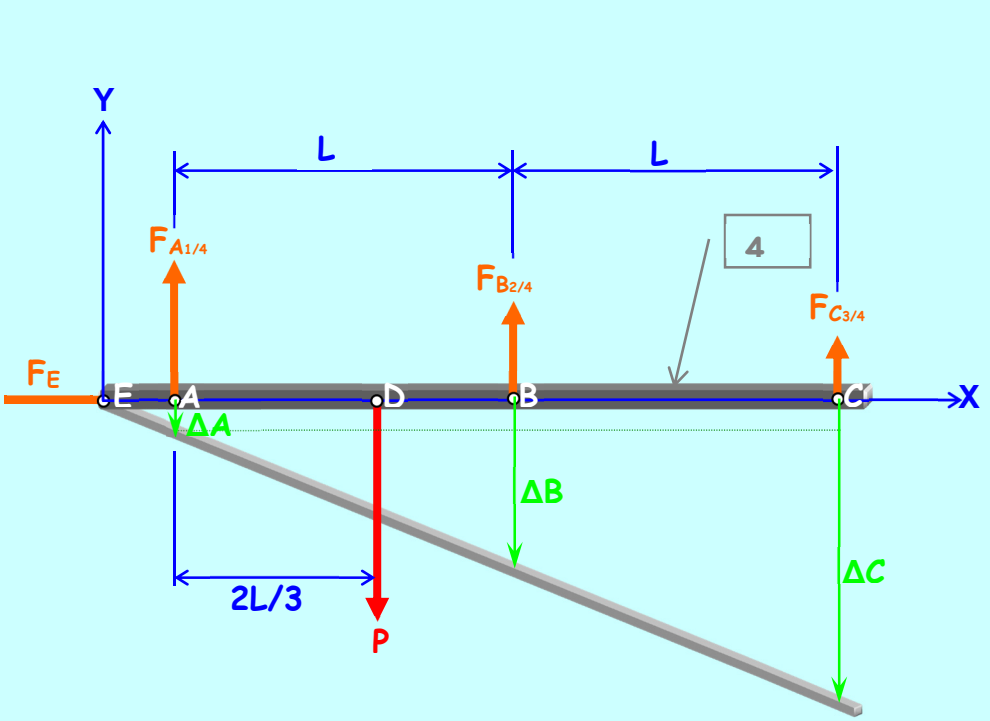
Une barre indéformable EADBC (4) est suspendue par 3 fils identiques (même section et même matériau). Les six liaisons en A, B, C, A', B' et C' sont des articulations planes, la liaison en E une liaison ponctuelle.

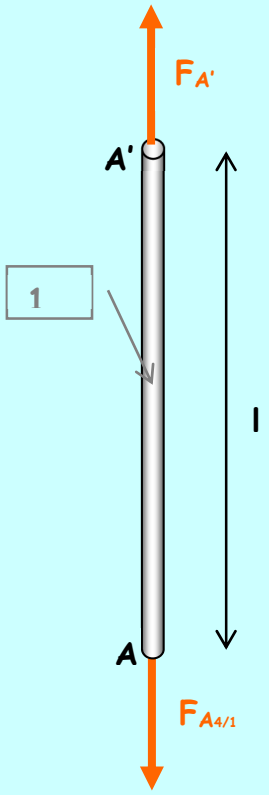


1°) Montrez que le système est hyperstatique (préciser le nombre d'inconnues et le nombre d'équations). Écrire les équations d'équilibre du solide 4 en A.

2°) **Les fils sont tendus**. Écrivez une équation de déformation et déterminez les tensions F_1, F_2 et F_3 dans chaque fil en fonction de P.

REPONSES N°6





Détermination de l'hyperstaticité du mécanisme :

- Inconnues : 4
  - 3 efforts de traction dans les 3 fils F_1, F_2 et F_3
  - 1 inconnue de réaction en E notée F_E (liaison ponctuelle de direction x)

- Equations d'équilibre de la barre n°4: 3 équations dans le plan.

H = i-3n = 4 – 3 = 1 => **Hyperstatique de degré 1**

Equations d'équilibre de la barre 4 :

$$[T_{Ext}]_{/A}\begin{cases}\overrightarrow{F_E}+\overrightarrow{F_{A_{1/4}}}+\overrightarrow{F_{B_{2/4}}}+\overrightarrow{F_{C_{3/4}}}+\overrightarrow{F_D}=\vec{0}\\ \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{F_D}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{F_{B_{2/4}}}+\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{F_{C_{3/4}}}=\vec{0}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}E_X=0 & (1)\\ F_1+F_2+F_3-P=0 & (2)\\ -\dfrac{2PL}{3}+F_2L+2F_3L=0 & (3)\end{cases}$$

Equations de déformation des fils en traction :

Notons ℓ la longueur initiale de chaque fil.

Loi de Hooke appliquée à chaque fil : $\sigma_{xx}=E\varepsilon_{xx}\quad\Rightarrow\quad\Delta l=\dfrac{N_x l}{EA}$

Soit ΔA, ΔB et ΔC les allongements respectifs des 3 fils.

Equation supplémentaire : barre EADBC indéformable $\dfrac{\Delta B-\Delta A}{L}=\dfrac{\Delta C-\Delta A}{2L}$

$$2\Delta B-\Delta A-\Delta C=0\qquad\Rightarrow\qquad 2F_2-F_1-F_3=0\qquad(3)$$

Système de 3 équations (1) (3) (2) à 3 inconnues F_1, F_2 et F_3 $\begin{cases}F_1+F_2+F_3=P\\ -F_1+2F_2-F_3=0\\ +F_2+2F_3=\dfrac{2P}{3}\end{cases}$

Après résolution de ce système on trouve : $\left|\begin{array}{l}F_1=\dfrac{P}{2}\\ F_2=\dfrac{P}{3}\\ F_3=\dfrac{P}{6}\end{array}\right.$

PROBLÈME N°7

Une tige homogène et isotrope de 500 mm de long, de diamètre 16 mm s'allonge de 568 µm pendant que son diamètre diminue de 5.3 µm sous un effort de traction de 48 kN. Calculez lemodule de YOUNG et le coefficient de POISSON du marériau. Quel est ce matériau ?

REPONSES N°7

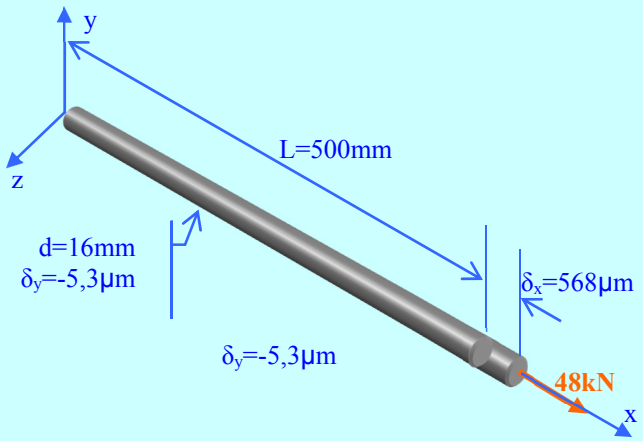
$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} = \frac{48000 \times 4}{\pi \times 16^2}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\delta_x}{L} = \frac{568 \times 10^{-6}}{0{,}5}$$

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \quad \Rightarrow \quad E = 210152 MPa$$

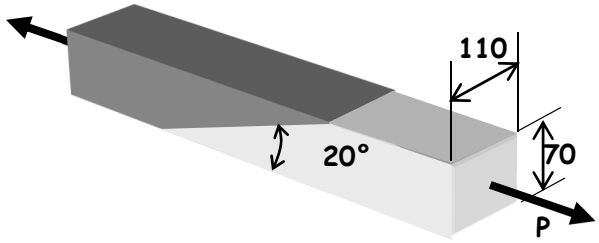
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\delta_y}{d} = \frac{-5{,}3 \times 10^{-6}}{16 \times 10^{-3}}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\upsilon\varepsilon_{xx} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 0{,}29$$



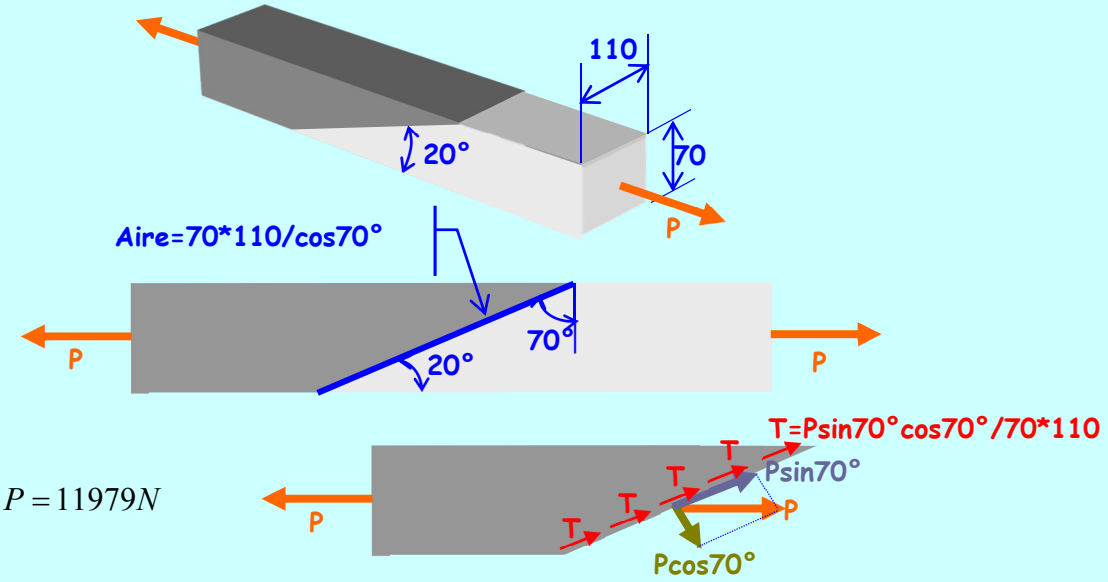
Voir Annexe 4

PROBLÈME N°8



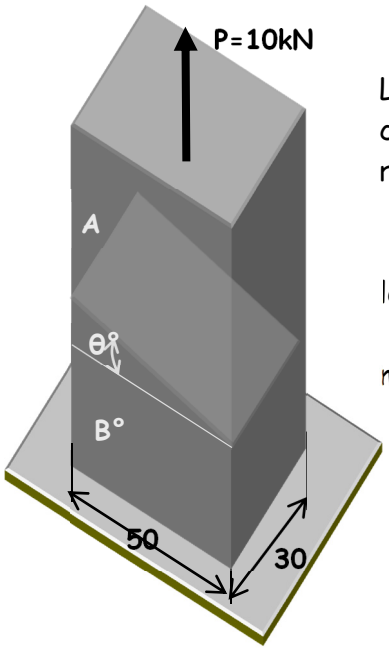
Deux tronçons de poutre de section droite 70x110 sont assemblés par collage. La contrainte de cisaillement limite de la colle vaut 0.5 MPa. Calculer la force maximum P que l' on peut appliquer.

REPONSES N°8



$$\tau \le \tau_{\lim} \quad \Rightarrow \quad P = 11979N$$

PROBLÈME N°9



Les deux tronçons de poutre A et B sont assemblés par collage. Les contraintes normale et de cisaillement limites de la colle valent respectivement 17 et 9 MPa.

a) Calculer les limites supérieure et inférieure de θ pour que le coefficient de sécurité vale 3.

b) Calculer la valeur de θ qui donne un coefficient de sécurité maximum. Quel est alors la valeur de ce coefficient ?

REPONSES N°9

$$\sigma = \frac{P}{A}\cos^2\theta = \frac{P}{A}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)$$

$$\alpha\sigma \le \sigma_{\lim} \quad \Rightarrow \quad 3 \le \frac{17\times 1500}{10^4\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)}$$

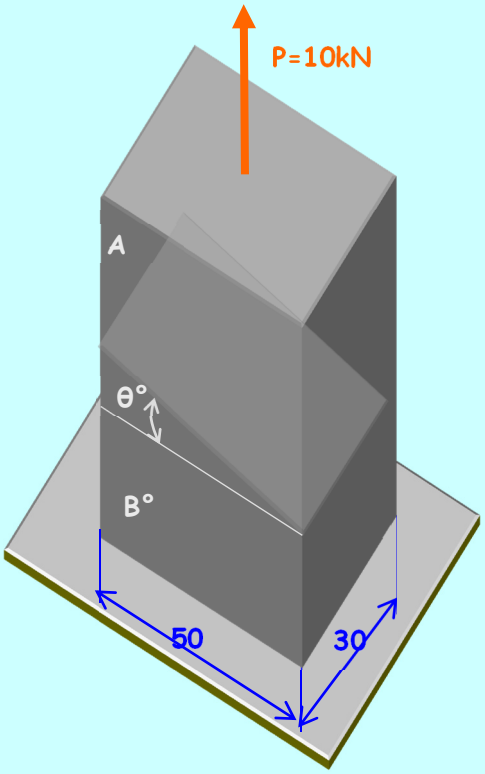
$$\cos 2\theta \le 0{,}7 \quad \Rightarrow \quad \theta \ge 22{,}8°$$

$$\tau = \frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta = \frac{P}{2A}\sin 2\theta$$

$$\alpha\tau \le \tau_{\lim} \quad \Rightarrow \quad 3 \le \frac{9\times 2\times 1500}{10^4 \sin 2\theta}$$

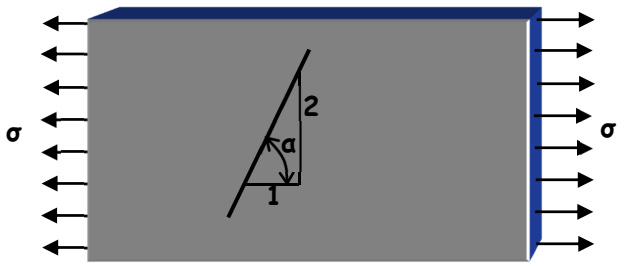
$$\sin 2\theta \le 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad \theta \le 32°$$

$$22{,}8° \le \theta \le 32°$$



$$\alpha = \frac{\sigma_{\lim}}{\frac{P}{A}\cos^2\theta} = \frac{\tau_{\lim}}{\frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{9}{17} \quad \Rightarrow \quad \theta = 27°9 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3{,}26$$

PROBLÈME N°10



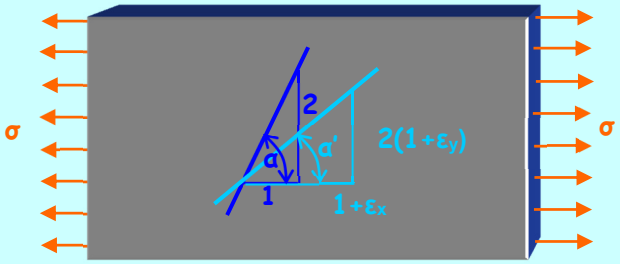
Avant chargement on trace une droite de pente 2 sur une éprouvette. Calculer la pente de cette droite quand σ = 130 MPa, E = 70 GPa et ν = 0.33.

REPONSES N°10

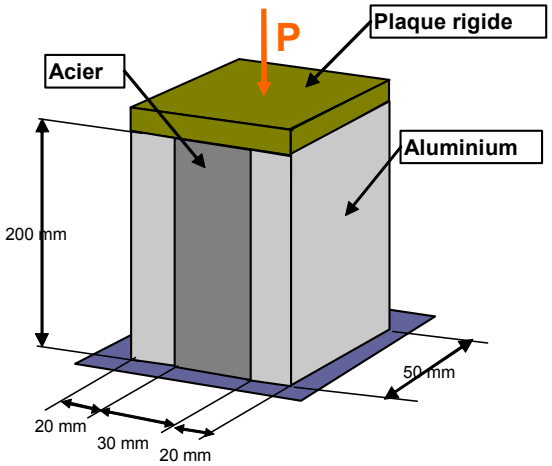
$$\tan\alpha = 2$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = 1857\mu$$

$$\tan\alpha' = \frac{2(1-\upsilon\varepsilon_x)}{1+\varepsilon_x} = 1{,}995$$



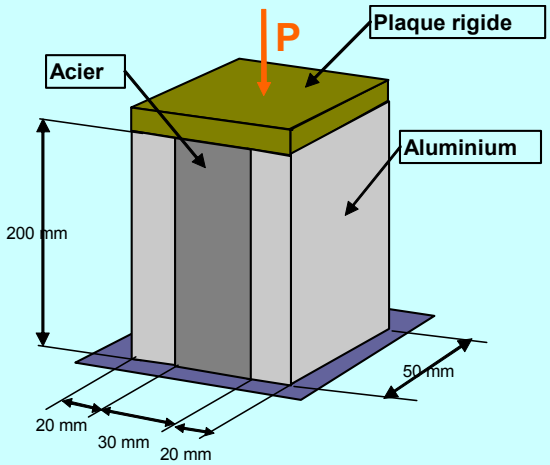
PROBLÈME N°11

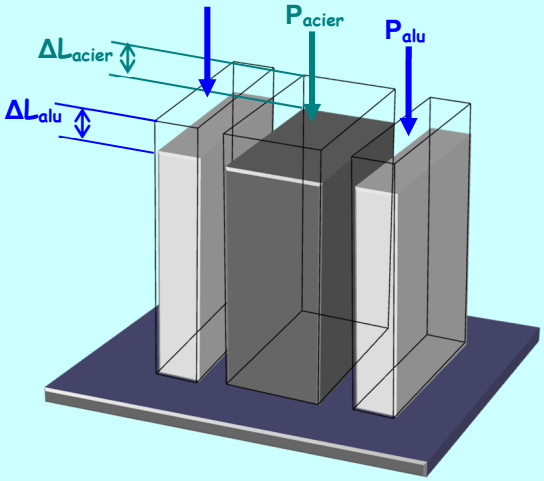


Une force P = 385 kN est appliquée sur un bloc composite. Les modules de YOUNG de l'acier et de l'aluminium valent respectivement 200 GPa et 70 GPa. Calculez les contraintes de compression dans l'acier et l'aluminium.

REPONSES N°11

La plaque rigide implique que chaque bloc subit la même variation de longueur.





$$\Delta L_{alu} = \Delta L_{acier} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{alu} \times 200}{70.10^3 \times 2000} = \frac{P_{acier} \times 200}{200.10^3 \times 1500} \quad \Rightarrow \quad P_{alu} = \frac{7}{15} P_{acier}$$

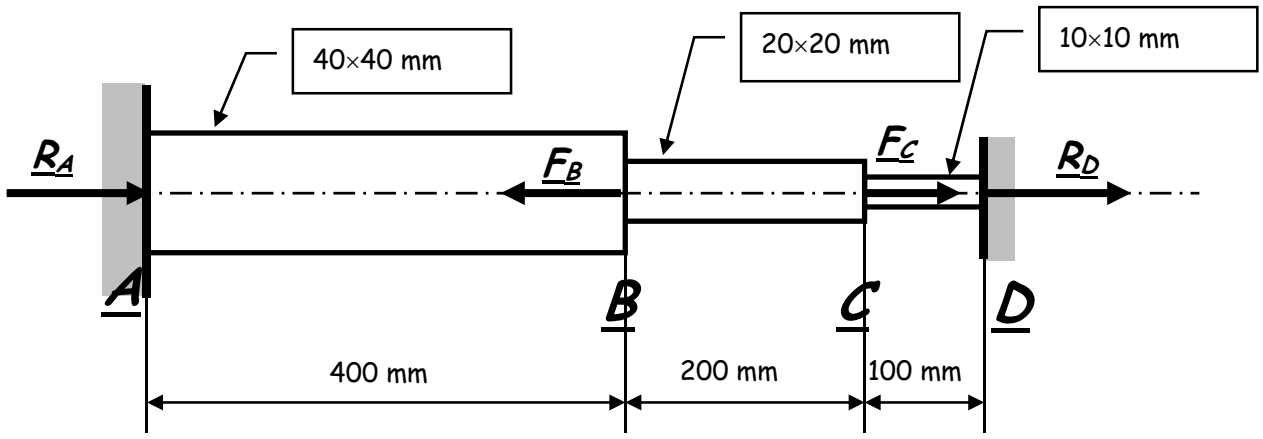
$$\begin{cases} P = P_{alu} + P_{acier} \\ P_{alu} = \dfrac{7}{15} P_{acier} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} P_{alu} = 122{,}5kN \\ P_{acier} = 262{,}5kN \end{array} \right.$$

$$\sigma_{alu} = \frac{-122{,}5.10^3}{2000} = -61{,}25MPa$$

$$\sigma_{acier} = \frac{-262{,}5.10^3}{2000} = -175MPa$$

PROBLÈME N°12

La structure ci-dessus est composée de trois tronçons à section carrée. Les liaisons en A et D sont des encastrements.



On envisage deux cas de charge :

Cas 1 : F_B = 56 kN et F_C = 28 kN

Cas 2 : $F_B = F_C = 0$ $\Delta\theta$ = 50°C sur le tronçon BC.

Pour les deux cas :

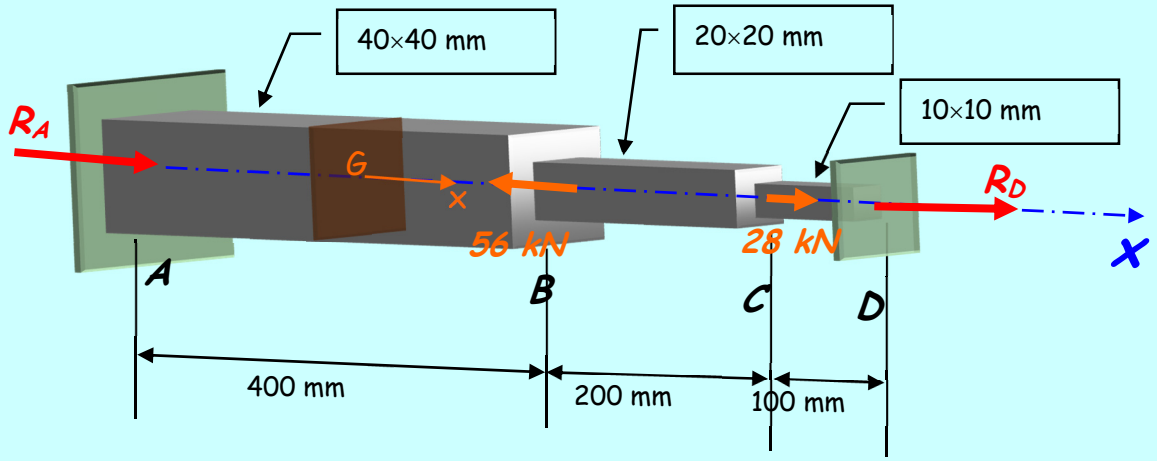
1°) Montrez que le système est hyperstatique (précisez le nombre d'inconnues et le nombre d'équations). Écrivez l'équation d'équilibre suivant x.

2°) Que valent les efforts normaux N_x dans les trois tronçons AB, BC et CD ? Écrivez une équation de déformation et calculez la valeur numérique des réactions R_A et R_D (en kN).

3°) Calculez les déplacements des sections B et C (en mm).

REPONSES N°12

Cas 1 : F_B = 56 kN et F_C = 28 kN



1°) Une seule équation d'équilibre pour calculer les deux inconnues R_A et R_D.

$$R_A + R_D = 28$$

2°) $N_x^{AB} = -R_A \qquad N_x^{BC} = -R_A + 56 \qquad N_x^{CD} = -R_A + 28$

$$\Delta L_{ABCD} = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} + \Delta L_{CD} = 0$$

$$\frac{N_x^{AB} L_{AB}}{EA_{AB}} + \frac{N_x^{BC} L_{BC}}{EA_{BC}} + \frac{N_x^{CD} L_{CD}}{EA_{CD}} = 0$$

$$\frac{-400R_A}{1600} + \frac{200(-R_A + 56)}{400} + \frac{100(-R_A + 28)}{100} = 0$$

$$\frac{-R_A}{4} + \frac{(-R_A + 56)}{2} + (-R_A + 28) = 0$$

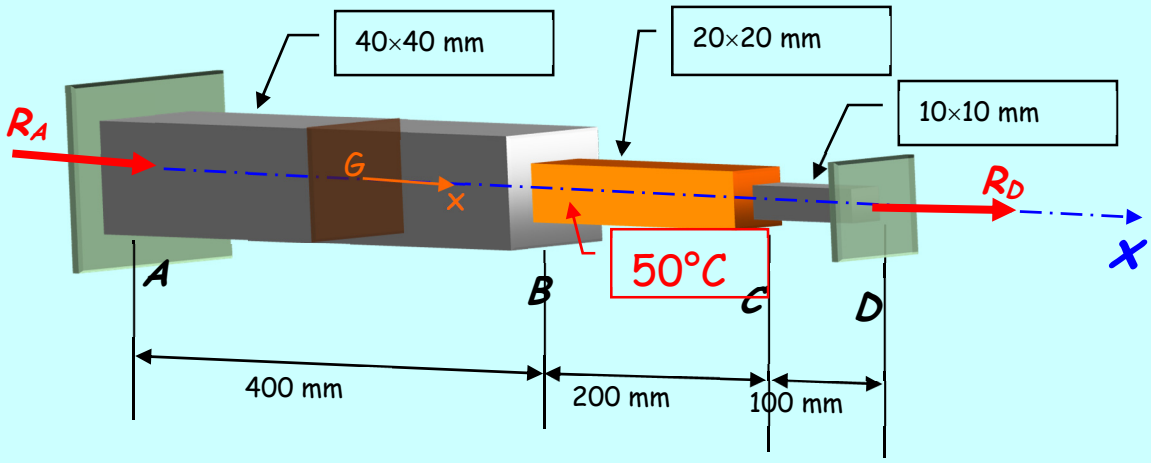
$$7R_A = 224$$

$$R_A = 32\text{kN} \qquad R_D = -4\text{kN}$$

$$\Delta L_{AB} = \frac{N_x^{AB} L_{AB}}{EA_{AB}} = \frac{-32000 \times 400}{210000 \times 1600} = -0.038\text{mm} \qquad u_B = -0.038\text{mm}$$

$$\Delta L_{CD} = \frac{N_x^{CD} L_{CD}}{EA_{CD}} = \frac{-4000 \times 100}{210000 \times 100} = -0.019\text{mm} \qquad u_C = +0.019\text{mm}$$

Cas 2 : $F_B = F_C = 0$ $\Delta\theta = 50°C$ sur le tronçon BC.



1°) Une seule équation d'équilibre pour calculer les deux inconnues R_A et R_D.

$$R_A + R_D = 0$$

2°) $N_x^{AB} = N_x^{BC} = N_x^{CD} = -R_A$

$$\Delta L_{ABCD} = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} + \Delta L_{CD} = 0$$

$$\frac{N_x^{AB} L_{AB}}{EA_{AB}} + \left(\frac{N_x^{BC} L_{BC}}{EA_{BC}} + \Delta L_{BC}^{therm}\right) + \frac{N_x^{CD} L_{CD}}{EA_{CD}} = 0$$

$$\Delta L_{BC}^{therm} = \alpha \Delta\theta L_{BC}$$

$$\frac{-400R_A}{210000 \times 1600} + \frac{200 \times -R_A}{210000 \times 400} + 1.3 \times 10^{-5} \times 50 \times 200 + \frac{100 \times -R_A}{210000 \times 100} = 0$$

$$\frac{R_A}{4} + \frac{R_A}{2} + R_A = 27300$$

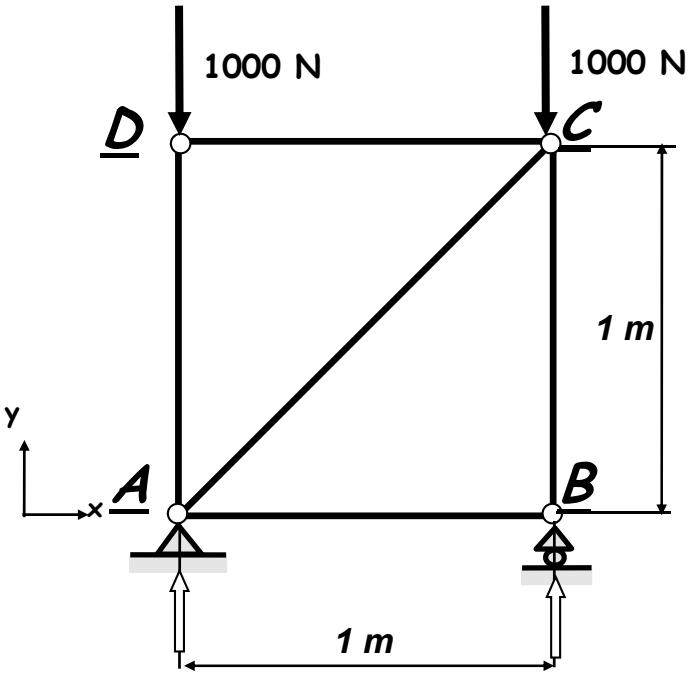
$$R_A = \frac{4}{7} \times 27300$$

$$R_A = 15.6kN \qquad R_D = -15.6kN$$

$$\Delta L_{AB} = \frac{N_x^{AB} L_{AB}}{EA_{AB}} = \frac{-15600 \times 400}{210000 \times 1600} = -0.018mm \qquad u_B = -0.018mm$$

$$\Delta L_{CD} = \frac{N_x^{CD} L_{CD}}{EA_{CD}} = \frac{-15600 \times 100}{210000 \times 100} = -0.074mm \qquad u_C = +0.074mm$$

PROBLÈME N°13



1°) Calculez les réactions en A et B.

2°) Déterminez les efforts de traction et de compression dans les barres du treillis par **la méthode de RITTER**

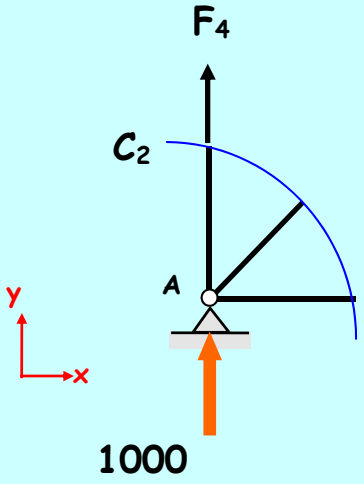
REPONSES N°13

$Ry=0 \Rightarrow F_2=0$

$Rx=0 \Rightarrow F_1=0$

$M_A=0 \Rightarrow F_3=0$

$Ry=0 \Rightarrow F_4=-1000$



Barres	AB et CD	AD et BC	AC
Nx (N)	0	-1000	0

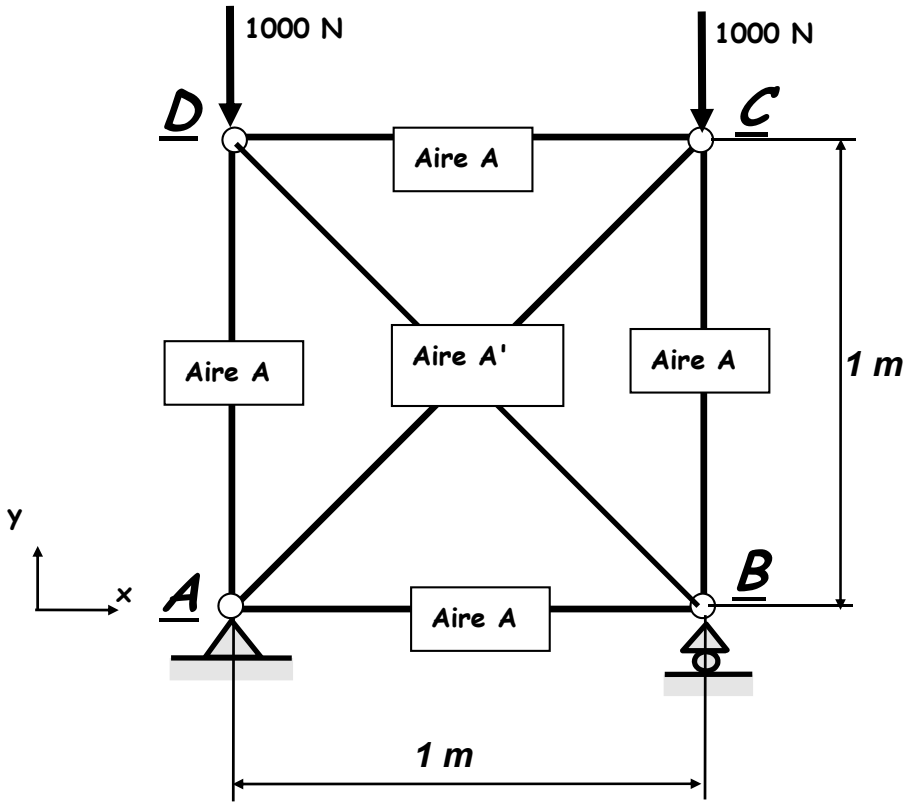
PROBLÈME N°14

1°) Quel est le degré d'hyperstaticité du treillis ?

2°) Déterminez les expressions des efforts de traction et de compression dans les barres du treillis en fonction de A et A'.

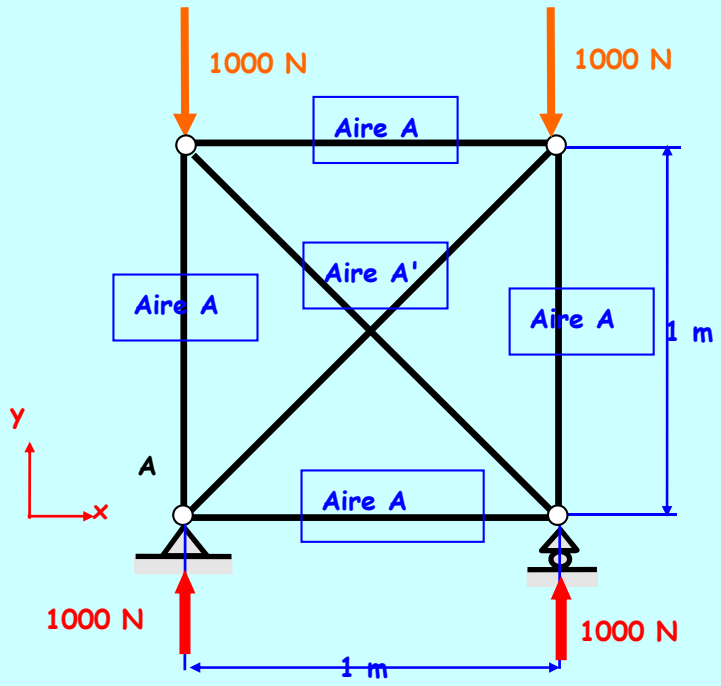
3°) Calculez numériquement ces efforts quand :

a)A=A'.
b) A=2A'.
Conclusion?



REPONSES N°14

1°) Le treillis est hyperstatique interne de degré 1 car **b+3 > 2n (b=6 et n=4).**

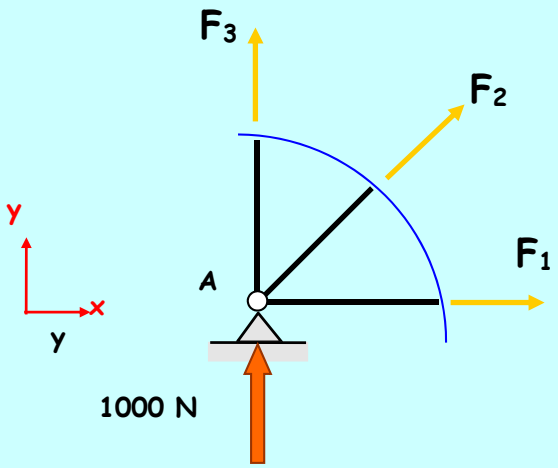


2°) Calcul des efforts dans les barres :

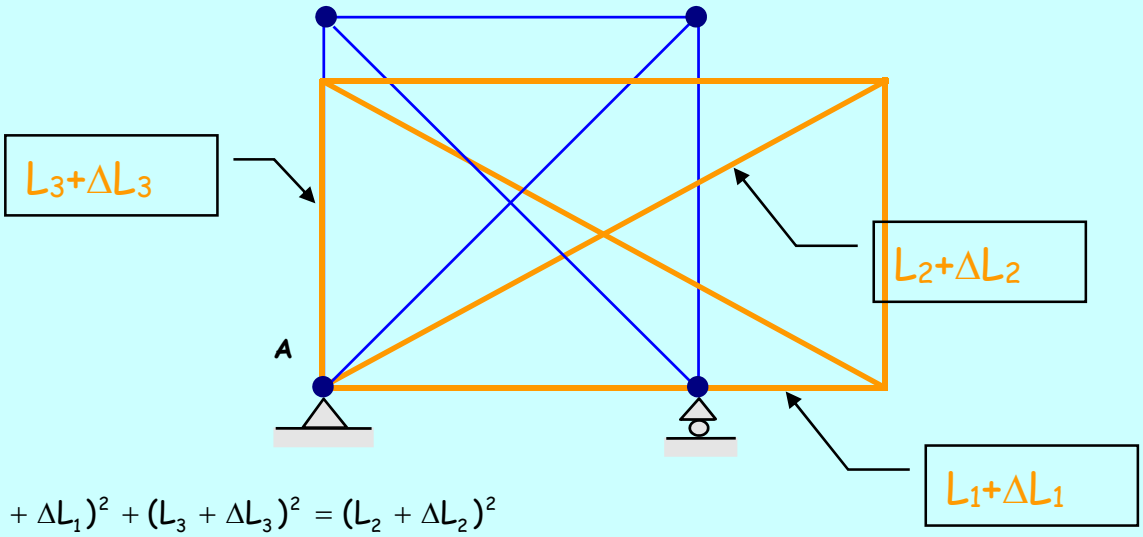
- Equations d'équilibre du nœud A

$Rx=0 \Rightarrow F_1 + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ (1)

$Ry=0 \Rightarrow 1000 + F_3 + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ (2)



- Equations de déformation : Etant donné la symétrie du système, celui-ci se déforme de la façon suivante :



$$(L_1 + \Delta L_1)^2 + (L_3 + \Delta L_3)^2 = (L_2 + \Delta L_2)^2$$

En négligeant les ΔL_i^2 et compte tenu que $L_1 = L_3 = L$ et que $L_2 = L\sqrt{2}$ on trouve :

$$\sqrt{2}\Delta L_2 \approx \Delta L_1 + \Delta L_3 \quad \text{avec} \quad \Delta L = \frac{N_x L}{EA}$$

$$\sqrt{2}\frac{F_2 L\sqrt{2}}{EA'} \approx \frac{F_1 L}{EA} + \frac{F_3 L}{EA} \qquad \text{d'où} \qquad 2F_2\frac{A}{A'} = F_1 + F_3 \qquad (3)$$

nous avons donc trois équations :

$$F1 + F2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (1)$$

$$1000 + F3 + F2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (2)$$

$$2F_2\frac{A}{A'} = F_1 + F_3 \qquad (3)$$

La résolution donne :

$$F_2 = -\frac{1000}{2\frac{A}{A'} + \sqrt{2}}$$

$$F_1 = -\frac{1000}{2\frac{A}{A'} + \sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} = F_2\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_3 = -\frac{1000}{2\frac{A}{A'} + \sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} - 1000 = F_1 - 1000$$

3°)

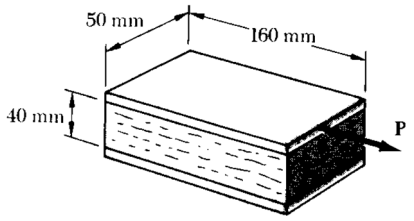
Barres	AB et CD (F_1)	AD et BC (F_3)	AC et BD (F_2)
Nx en N pour A=A'	207.1	-792.9	-292.9
Nx en N pour A=2A'	130.6	-869.4	-184.7

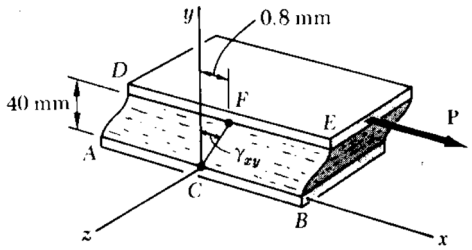
Conclusion : dans un treillis hyperstatique interne les efforts de traction et de compression dans les barres dépendent de la grandeur de la section des barres.

CISAILLEMENT

PROBLÈME N°1

Un bloc rectangulaire de module de COULOMB 600 MPa est collé entre deux plaques rigides. La plaque supérieure se déplace de 0.8 mm sous l'action d'une force P, pendant que la plaque inférieure reste immobile.



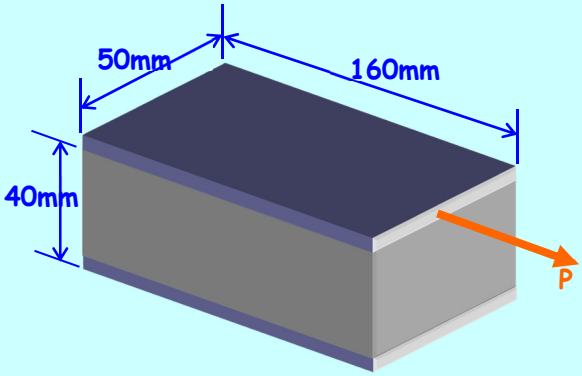


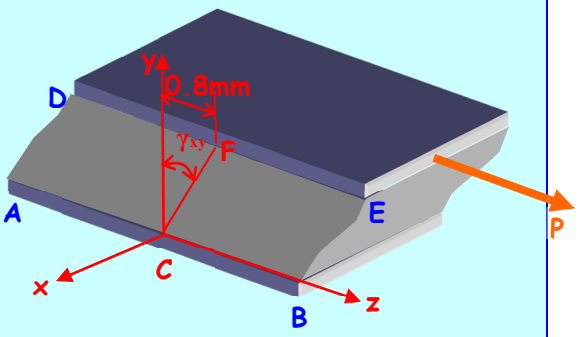
Calculer :

a) La contrainte de cisaillement moyenne dans le bloc.

b) La valeur de la force P.

REPONSES N°1

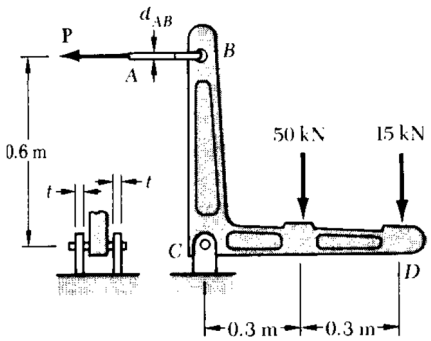




$$\gamma_{xy} \approx \tan\gamma_{xy} = \frac{0,8}{40} = 0,02$$

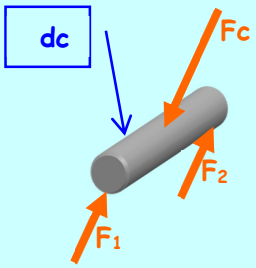
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 600 \times 0,02 = 12\,MPa \qquad P = \tau_{xy} A = 12 \times 160 \times 50 = 96000\,N = 96\,kN$$

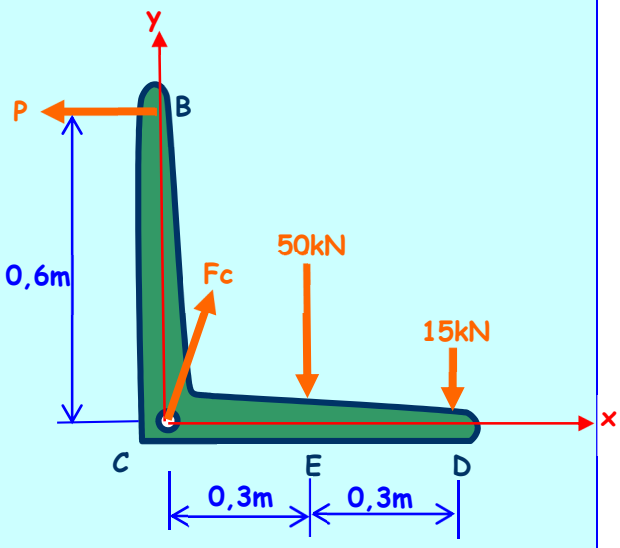
PROBLÈME N°2



L'axe C est en acier de limite élastique au cisaillement τ_e^{moy} = 350 MPa. Calculer le diamètre de l'axe C pour que le coefficient de sécurité soit égal à 3.3.

REPONSES N°2



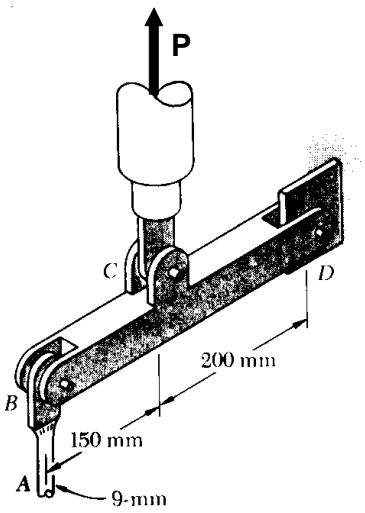


$$\begin{cases} \overrightarrow{F_B}+\overrightarrow{F_C}+\overrightarrow{F_E}+\overrightarrow{F_D}=\vec{0}\begin{cases}-P+C_X=0\\ C_Y-50-15=0\end{cases} \\ \overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{F_B}+\overrightarrow{CE}\wedge\overrightarrow{F_E}+\overrightarrow{CD}\wedge\overrightarrow{F_D}=\vec{0}\{-50\times0{,}3-15\times0{,}6+P\times0{,}6=0\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{F_C}\left|\begin{matrix}40kN\\65kN\end{matrix}\right. \quad P=40kN$$

$$\tau=\frac{\tau_{moy}}{3{,}3}=\frac{350}{3{,}3}=106{,}1MPa \qquad F_C=\sqrt{40^2+65^2}=76{,}32kN \qquad F_1=F_2=\frac{F_C}{2}$$

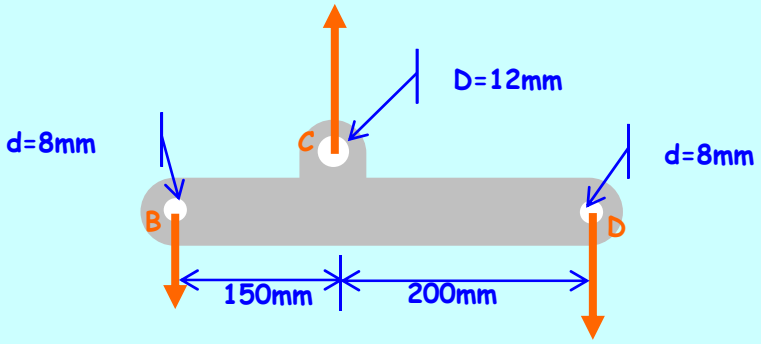
$$\frac{\pi d_C^2}{4}=\frac{76{,}32.10^3}{2\times106{,}1} \Rightarrow d_C=\sqrt{\frac{4\times76{,}32.10^3}{\pi\times2\times106{,}1}}=21{,}4mm$$

PROBLÈME N°3



La barre BCD est supposée infiniment rigide. Le diamètre des axes B et D est égal à 8 mm, celui de l'axe C égal à 12 mm. Les axes sont en acier de limite élastique au cisaillement 300 MPa. Le coefficient de sécurité global doit être de 3.
Calculer la force verticale P maximum exercée par le vérin hydraulique C.

REPONSES N°3



$$\begin{cases} M^t_{/D} = 0 \Rightarrow F_C \times 200 - F_B \times 350 = 0 & \Rightarrow \quad F_C = 1{,}75 F_B \\ M^t_{/B} = 0 \Rightarrow 150 \times F_C - 350 \times F_D = 0 & \Rightarrow \quad F_C = 2{,}33 F_D \end{cases}$$

$$\tau = \frac{\tau_{moy}}{\alpha} = \frac{300}{3} = 100 MPa$$

En B : $\frac{F_B}{2} = \tau \times A \quad \Rightarrow \quad F_B = \frac{100 \times 2 \times \pi \times 8^2}{4} = 10053 N \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} F_C = 1{,}75 F_B = 17593 N \\ F_C = 2{,}33 F_D = 23424 N \end{array} \right.$

En C : $\frac{F_C}{2} = \tau \times A \quad \Rightarrow \quad F_C = \frac{100 \times 2 \times \pi \times 12^2}{4} = 22619 N$

$$P_{Max} = 17593 N$$

DIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES

2iem SEMESTRE

MODULE F213 :

SOLLICITATIONS SIMPLES –FLEXION - TORSION

PROBLÈMES-CORRIGES

Bienvenue à vous

au laboratoire de :

Dimensionnement Des Structures

du Département :

Génie Mécanique et Productique

Ce livre électronique est destiné à compléter le cours enseigné durant la première année du module F213, et relatif au deuxième Semestre.

Il reprend le plan suivi en amphithéâtre avec d'avantages de détails, d'illustrations ainsi que des corrigés des Problèmes du fascicule Travaux Dirigés qui, nous l'espérons, vous permettront de mieux comprendre cette matière qui n'est pas si terrible qu'elle peut laisser paraître.

A présent, choisissez sur votre gauche dans l'onglet signet un chapitre du programme que vous désirez voir ou revoir .

BON TRAVAIL-BON COURAGE

V.BLANCHOT-G.VESSIERE

F213

INERTIE

TORSION

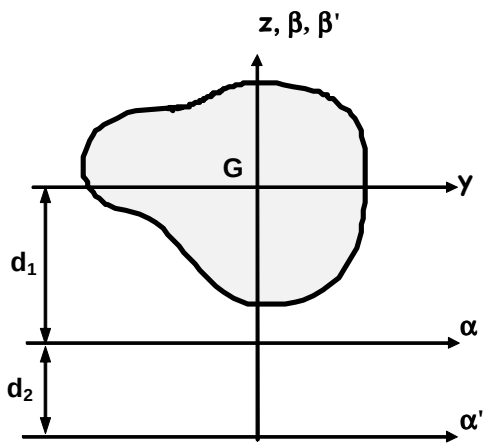
FLEXION

SOLLICITATIONS COMPOSEES

FLAMBEMENT

INERTIE

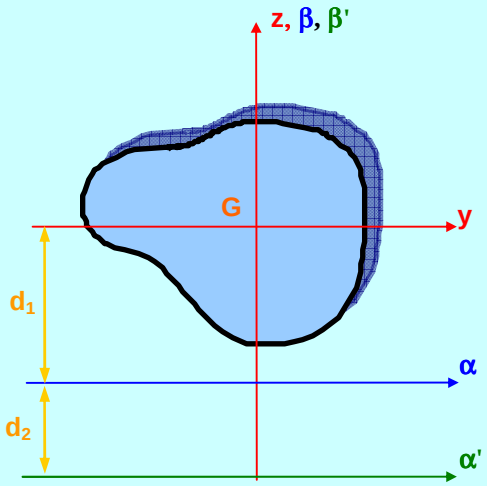
PROBLÈME N°1



1°) L'aire de la surface ci-contre vaut 129 cm². Ses moments d'inertie par rapport aux axes α et α' valent respectivement 37 460 cm^4 et 74 920 cm^4. La distance d_2 vaut 7.6 cm. Calculez la distance d_1, le moment d'inertie de la surface par rapport à l'axe central y, et le moment statique de la surface par rapport à l'axe α'.

2°) L'aire de la surface ombrée ci-contre vaut maintenant 96.78 cm². Son moment d'inertie par rapport à l'axe α' vaut 16 650 cm^4. Les distances d_1 et d_2 valent respectivement 7.6 cm et 5.1 cm. Calculez le moment d'inertie de la surface par rapport à l'axe α

RÈPONSES N°1



1) Théorème d'Huyghens :

$$\begin{cases} I_{\alpha\alpha} = I_{yy} + d_1^2 A & (1) \\ I_{\alpha'\alpha'} = I_{yy} + \left(d_1^2 + d_2^2\right)A & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 37460 = I_{yy} + d_1^2 129 & (1) \\ 74920 = I_{yy} + \left(d_1^2 + 7{,}6\right)129 & (2) \end{cases}$$

$$(2)-(1) \quad \Rightarrow \quad 37460 = \left(2d_1 \times 7{,}6 + 7{,}6^2\right)129$$ **d_1=15,3 cm**

En reportant la valeur de d_1 dans l'équation (1) : **I_{yy}= 7246,6 cm^4**

$$Q_{\alpha'} = x_{\beta'_G} A = (15{,}3 + 7{,}6)129$$ **$Q_{\alpha'}$=2954,1 cm^3**

2) $I_{yy} = I_{\alpha'\alpha'} - \left(d_1^2 + d_2^2\right)A$ I_{yy}=16650-12,7^2*96,78 I_{yy}=1040,35 cm^4

$I_{\alpha\alpha} = I_{yy} + d_1^2 A$ $I_{\alpha\alpha}$=1040,35+7,6^2*96,78 **$I_{\alpha\alpha}$=6630,37 cm^4**

PROBLÈME N°2

Calculez pour la surface ci-contre: a) I_{xx} et I_{yy} si b = 25 cm . b) b pour que $I_{xx} = I_{yy}$.

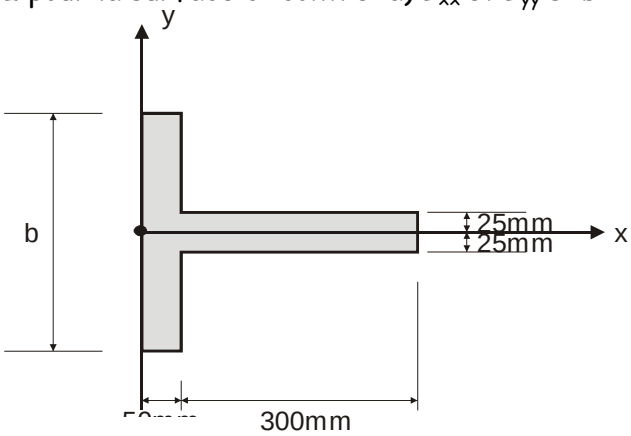
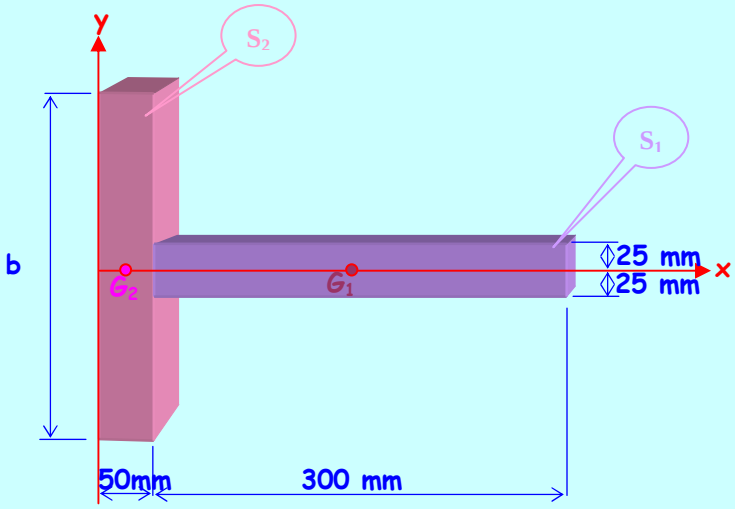


Figure E3

RÈPONSES N°2



a) b=25cm

Décomposons la surface S en deux S_1, et S_2

$$I_{xx}^{S_1} = \frac{30 \times 5^3}{12} \qquad I_{xx}^{S_2} = \frac{5\times 25^3}{12}$$

$$I_{xx}^{S} = I_{xx}^{S_1} + I_{xx}^{S_2} = \frac{30\times 5^3}{12} + \frac{5\times 25^3}{12}$$

I_{xx}=6822,92 cm^4

De même après application du théorème d'Huyghens :

$$I_{yy}^{S_1} = \frac{5\times 30^3}{12} + 20^2 \times 30 \times 5 \qquad I_{yy}^{S_2} = \frac{25\times 5^3}{12} + 2{,}5^2 \times 5 \times 25$$

$$I_{yy}^{S} = I_{yy}^{S_1} + I_{yy}^{S_2} = \frac{5\times 30^3}{12} + 20^2\times 30\times 5 + \frac{25\times 5^3}{12} + 2{,}5^2\times 5\times 25$$

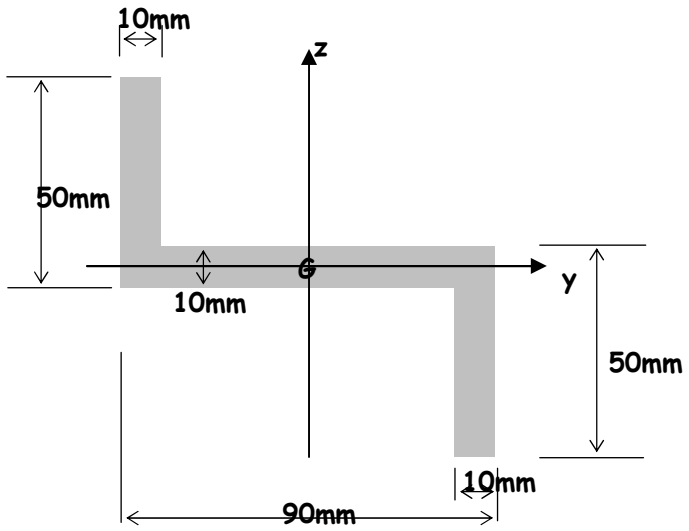
I_{yy}=72291,67 cm^4

b) $I_{xx} = I_{yy}$ $\quad \frac{30\times 5^3}{12} + \frac{5\times b^3}{12} = \frac{5\times 30^3}{12} + 20^2\times 30\times 5 + \frac{b\times 5^3}{12} + 2{,}5^2\times 5\times b$

$5b^3$-500b-851250=0 équation du 3ème degré admettant 2 solutions imaginaires et une solution réelle :

b=56 cm

PROBLÈME N°3



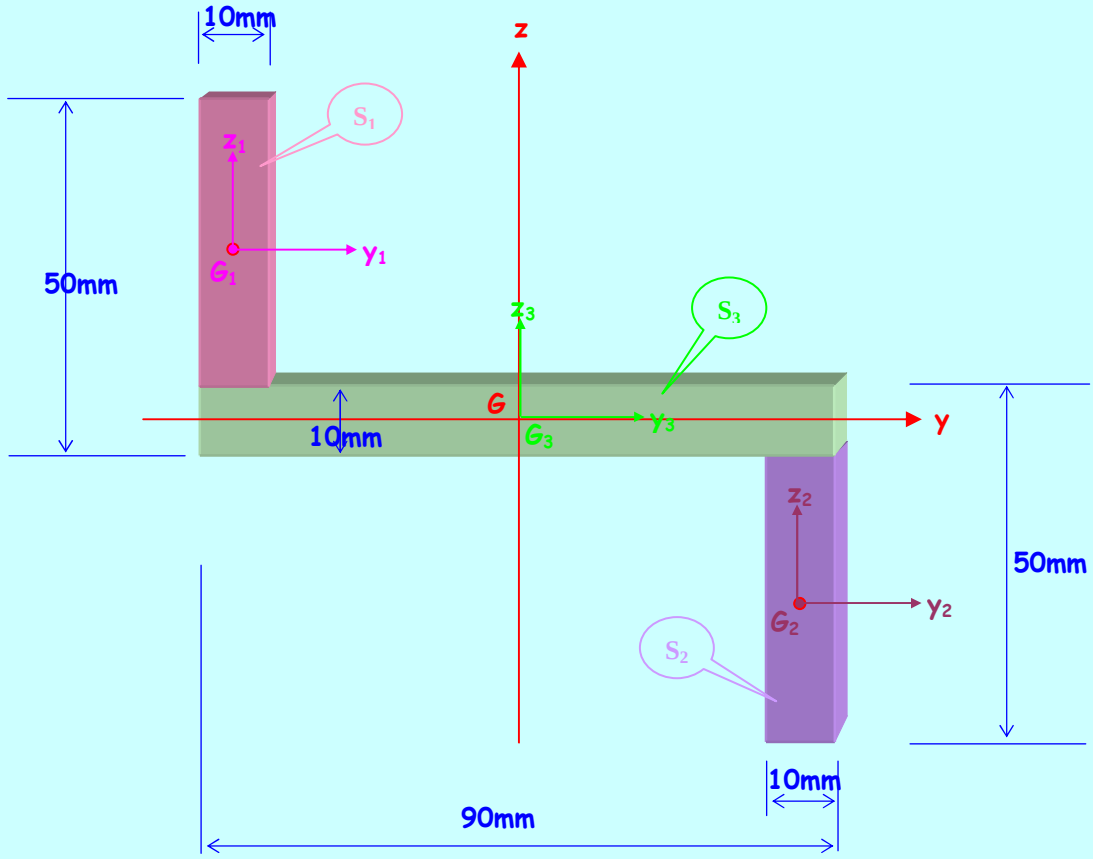
Calculez pour la surface ci-contre:

1°) Les moments et le produit d'inertie par rapport aux axes centraux y et z.

2°) La position des axes centraux principaux et les moments d'inertie principaux.

3°) Les moments et le produit d'inertie par rapport à deux nouveaux axes centraux obtenus par une rotation positive de 30° des axes y et z.

RÈPONSES N°3



1°)

Décomposons la surface initiale S en trois surfaces S_1, S_2 et S_3 : $I_{yy}^{S} = I_{yy}^{S_1} + I_{yy}^{S_2} + I_{yy}^{S_3}$ avec $I_{yy}^{S_1} = I_{yy}^{S_2}$

Appliquons le théorème d'Huyghens : $I_{yy}^{S_1} = I_{y_1y_1}^{S_1} + z_{G1}^2 A_1$ et $I_{yy}^{S_3} = I_{y_3y_3}^{S_3}$ $G_{1/yz}\left|\begin{matrix}-4cm\\2{,}5cm\end{matrix}\right.$

$$I_{yy}^{S} = 2\left(\frac{1\times 4^3}{12} + 2{,}5^2\times 4\right) + \frac{9\times 1^3}{12}$$ **I_{yy}^{S}=61,42 cm4**

De même : $I_{zz}^{S} = 2\left(\frac{4\times 1^3}{12} + (-4)^2\times 4\right) + \frac{1\times 9^3}{12}$ **I_{zz}^{S}=189,42 cm^4**

$I_{yz}^{S} = I_{yz}^{S_1} + I_{yz}^{S_2} + I_{yz}^{S_3}$ avec $I_{yz}^{S_3} = 0$ (y et z sont axes de symétrie pour S_3) $I_{yz}^{S_1} = I_{yz}^{S_2} = I_{y_1z_1}^{S_1} + y_{G1}z_{G1}A_1$

$I_{yz}^{S} = 2(0 + (-4)(2{,}5)\times 4\times 1)$ car $I_{y_1z_1}^{S_1} = 0$ (y_1 et z_1 sont axes de symétrie pour S_1) **I_{yz}^{S}=-80 cm^4**

2°)

Position des axes principaux :

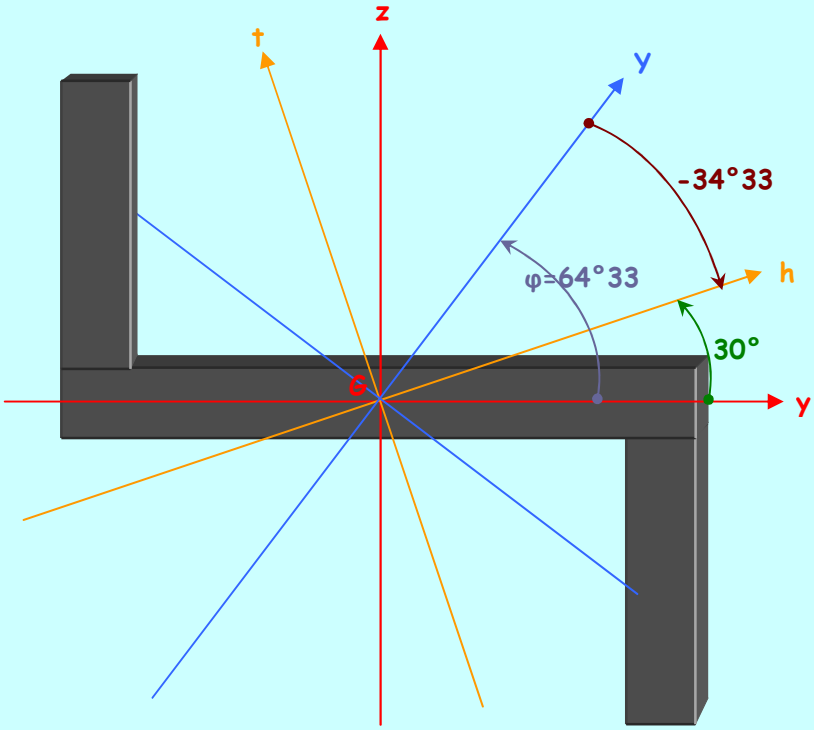
$$\tan 2\varphi = \frac{-2I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}}$$

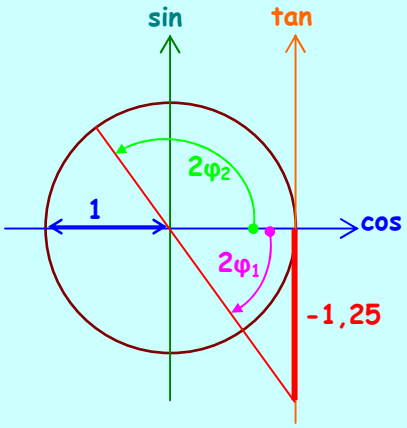
$\cos 2\varphi$ même signe que $I_{yy} - I_{zz}$

$\hat{\varphi} = (\vec{y}, \vec{Y})$

$$\tan 2\varphi = \frac{-2\times 80}{61{,}42 - 189{,}42} \approx -1{,}25$$

$\cos 2\varphi \langle 0$





Inversion trigonométrique de la tangente : $\tan 2\varphi \approx -1{,}25$ $\begin{cases} 2\varphi_1 = -51^\circ 34 \\ 2\varphi_2 = 128^\circ 66 \end{cases}$

Or $\cos 2\varphi \langle 0$ la solution φ_1 est donc à rejeter. **φ=64°33** avec $\hat{\varphi} = (\vec{y}, \vec{Y})$

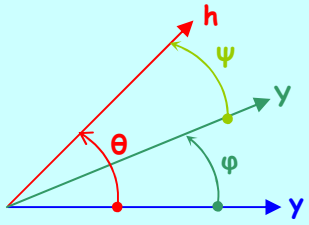
Moments d'inertie principaux

$$I_Y^Z = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4I_{yz}^2} = \frac{61{,}42 + 189{,}42}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(61{,}42 - 189{,}42)^2 + 4(-80)^2}$$

I_Y=227,87 cm^4
I_Z=22,97 cm^4

3°)
Utilisons les formules de rotation exprimées dans les axes principaux :

$$\begin{cases} I_{hh} = \dfrac{I_Y + I_Z}{2} + \dfrac{I_Y - I_Z}{2}\cos 2\psi \\ I_{tt} = \dfrac{I_Y + I_Z}{2} + \dfrac{I_Y - I_Z}{2}\cos 2\left(\psi + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ I_{ht} = \dfrac{I_Y - I_Z}{2}\sin 2\psi \end{cases} \qquad \text{avec } \hat{\psi} = \left(\vec{Y}, \vec{h}\right)$$

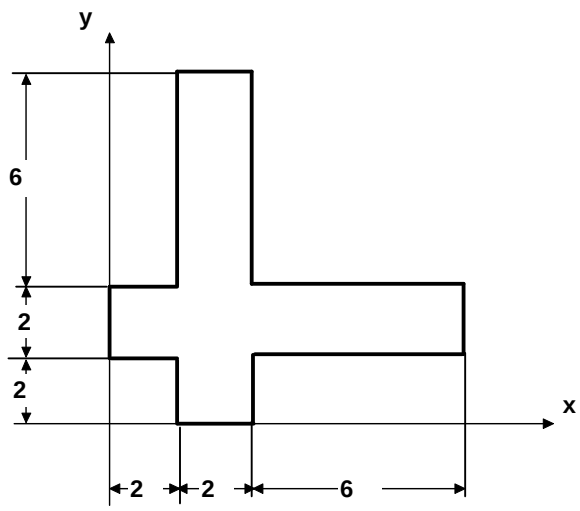


$$I_{hh} = \frac{227{,}87 + 22{,}97}{2} + \frac{227{,}87 - 22{,}97}{2}\cos 2\left(-34^\circ 33\right)$$

I_{hh}=162,7 cm^4
I_{tt}=88,14 cm^4
I_{ht}=-95,43 cm^4

Nous pouvons vérifier que : **I_{hh}+I_{tt} = I_Y+I_Z = I_G = 250,84 cm^4**

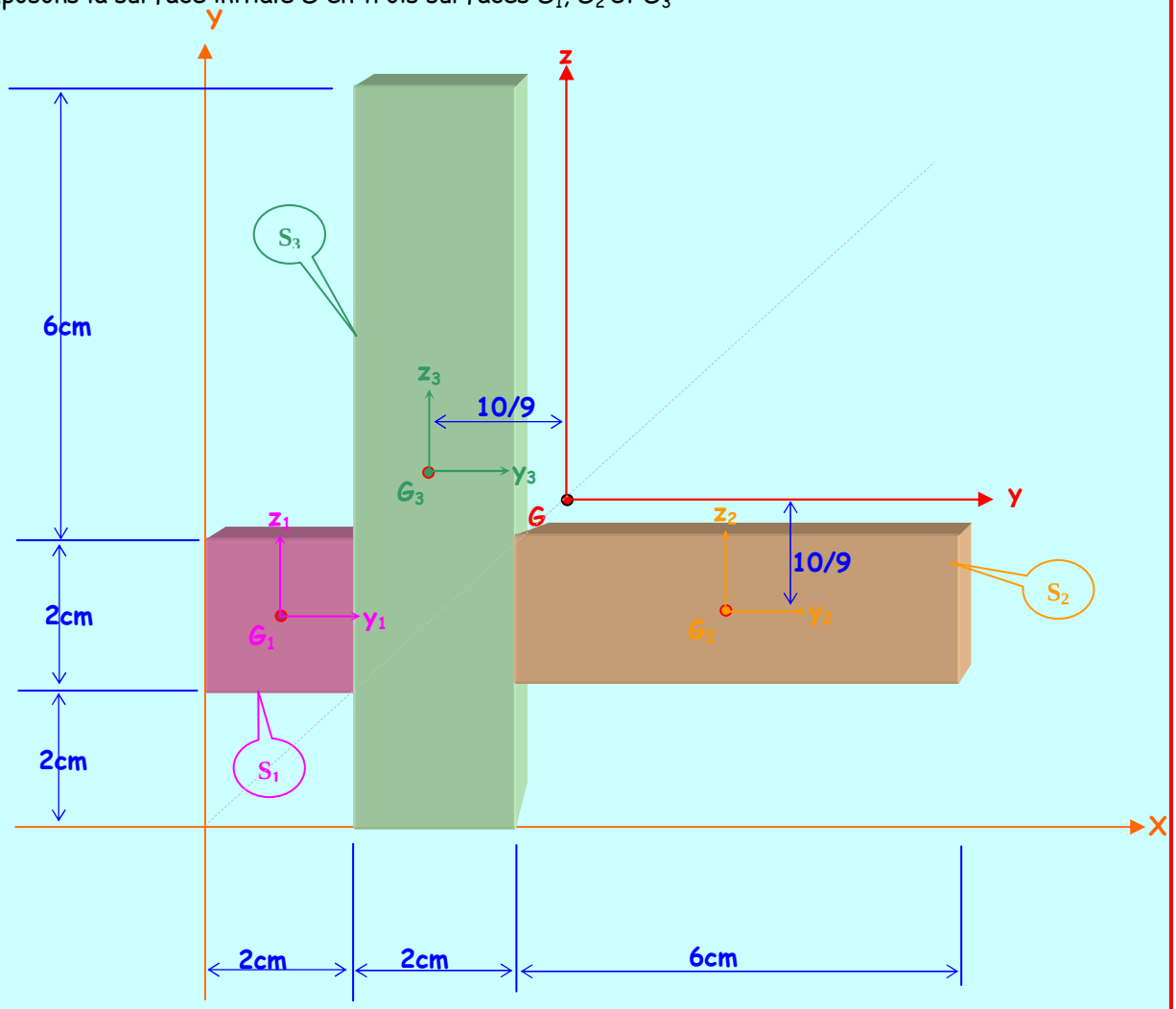
PROBLÈME N°4



Calculez, pour la surface ci-contre (les cotes sont en cm):
1°) La position du centre de gravité dans le repère x,y.
2°) Les moments et le produit d'inertie par rapport aux axes centraux parallèles à x,y.
3°) La position des axes centraux principaux et les moments d'inertie principaux.

RÈPONSES N°4

Décomposons la surface initiale S en trois surfaces S_1, S_2 et S_3



1)

$G_{1/XY}\left|\begin{matrix}1cm\\3cm\end{matrix}\right.$ $G_{2/XY}\left|\begin{matrix}7cm\\3cm\end{matrix}\right.$ $G_{3/XY}\left|\begin{matrix}3cm\\5cm\end{matrix}\right.$ $A_1=4cm^2$ $A_2=12cm^2$ $A_3=20cm^2$

$$X_G=\frac{X_{G1}A_1+X_{G2}A_2+X_{G3}A_3}{A_1+A_2+A_3}\Rightarrow\frac{1\times4+7\times12+3\times20}{4+12+20}$$

$$Y_G=\frac{Y_{G1}A_1+Y_{G2}A_2+Y_{G3}A_3}{A_1+A_2+A_3}\Rightarrow\frac{3\times4+3\times12+5\times20}{4+12+20}$$

$$G_{/XY}\left|\begin{matrix}4{,}11cm\\4{,}11cm\end{matrix}\right.$$

S_i	S_1	S_2	S3
A_i (cm^2)	4	12	20
$G_{i/yz}$ (cm)	-28/9	26/9	-10/9
	-10/9	-10/9	8/9
I_{yiyi} (cm^4)	$2^4/12$	$6*2^3/12$	$2*10^3/12$
I_{yizi} (cm^4)	0	0	0

2)

$$I_{yy}^{S} = I_{yy}^{S_1} + I_{yy}^{S_2} + I_{yy}^{S_3} \quad \text{avec} \quad I_{yy}^{Si} = I_{y_i y_i}^{S_i} + z_{Gi}^2 A_i$$

$$I_{yy}^{S} = \frac{2^4}{12} + \left(-\frac{10}{9}\right)^2 4 + \frac{6.2^3}{12} + \left(-\frac{10}{9}\right)^2 12 + \frac{2.10^3}{12} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 20$$

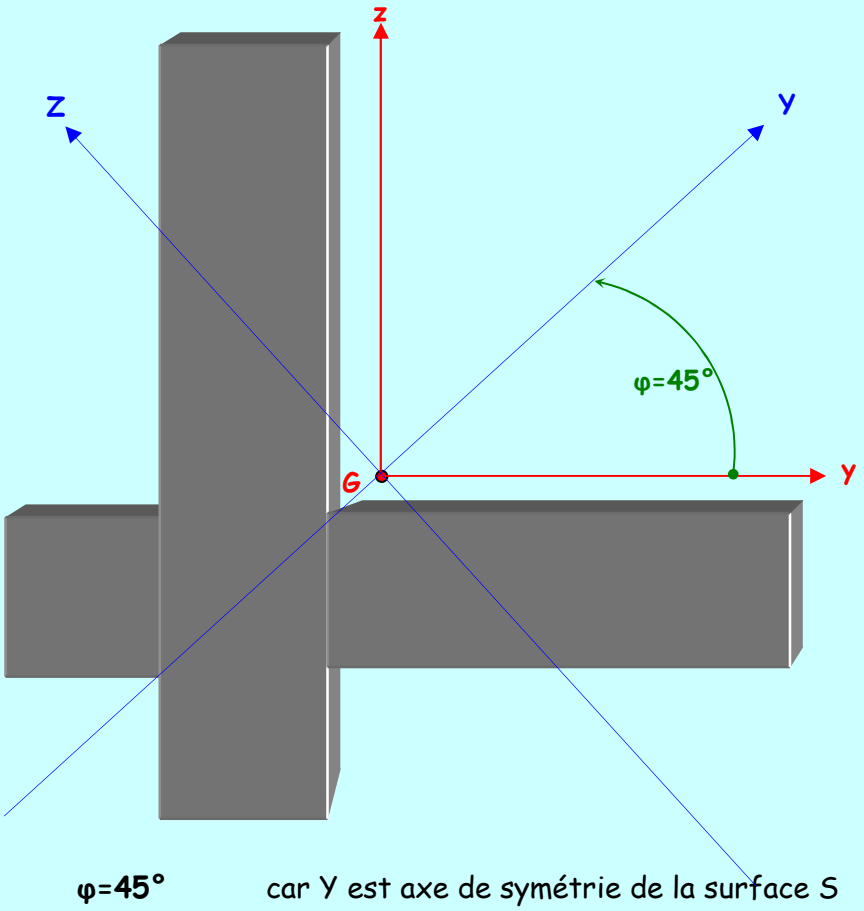
$I_{yy}^{S}=I_{zz}^{S}=207,56$ cm4

$$I_{yz}^{S} = I_{yz}^{S_1} + I_{yz}^{S_2} + I_{yz}^{S_3} \quad \text{avec} \quad I_{yz}^{Si} = I_{y_i z_i}^{S_i} + y_{Gi} z_{Gi} A_i$$

$$I_{yz}^{S} = 0 + \left(\frac{-28}{9}\right)\left(-\frac{10}{9}\right)4 + 0 + \left(\frac{26}{9}\right)\left(-\frac{10}{9}\right)12 + 0 + \left(\frac{-10}{9}\right)\left(\frac{8}{9}\right)20$$

$I_{yz}^{S}=-44,44$ cm4

<u>Eléments principaux d'Inertie :</u>



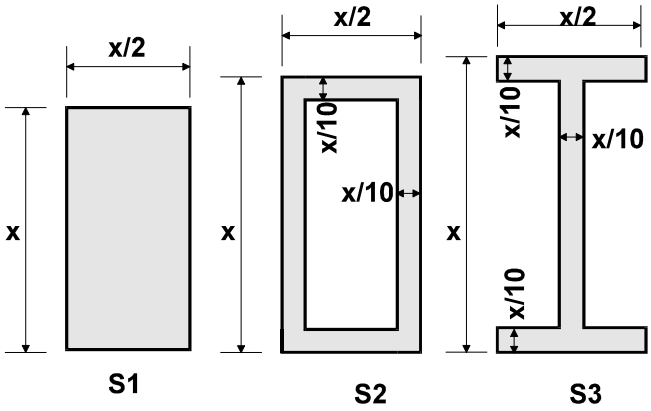
φ=45° car Y est axe de symétrie de la surface S

$$I_Y^Z = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{yy} - I_{zz}\right)^2 + 4I_{yz}^2} = \frac{207,56 + 207,562}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(0)^2 + 4(-44,44)^2}$$

$I_Y=252$ cm^4

$I_Z=163,12$ cm^4

PROBLÈME N°5



Considérons les trois surfaces ci-contre.
1°) Calculez pour chaque surface la valeur de x de telle façon que le moment d'inertie central maximum vale 54 cm^4.
2°) Calculez alors l'aire de chaque surface et en déduire la surface la plus rationnelle.

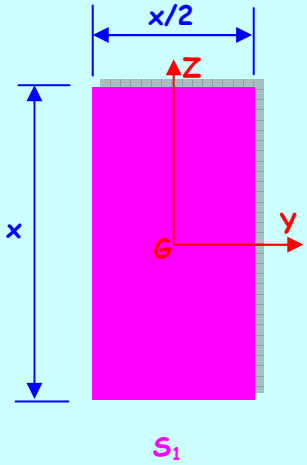
RÈPONSES N°5

Les trois sections S_1, S_2, S_3 possèdent 2 axes de symétries qui sont donc les axes principaux d'inertie. Le moment d'inertie maximum est celui relatif à l'axe Y.

Section S_1 :

$$I_Y = \frac{\frac{x}{2}\times x^3}{12} = \frac{x^4}{24} = 54cm^4 \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt[4]{54\times 24}$$

x=6 cm **A_1=18 cm^2**

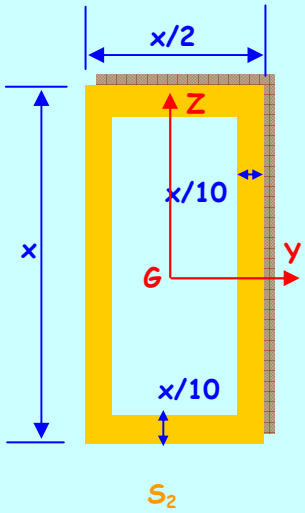


Section S_2 :

$$I_Y = \frac{x^4}{24} - \frac{\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{5}\right)\left(x-\frac{x}{5}\right)^3}{12} = 54cm^4 \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt[4]{\frac{54}{\frac{1}{24}-\frac{8}{625}}} = 6{,}58cm$$

$$A_2 = \frac{6{,}58^2}{2} - \left(\frac{3\times 6{,}58}{10}\right)\left(\frac{4\times 6{,}58}{5}\right)$$

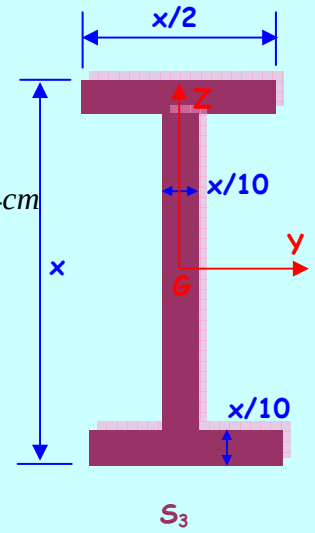
x=6,58 cm **A_2=11,25 cm^2**



Section S_3 :

$$I_Y = \frac{x^4}{24} - \frac{\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{10}\right)\left(x-\frac{x}{5}\right)^3}{12} = 54cm^4 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[4]{\frac{54}{\frac{1}{24}-\frac{64}{3750}}} = 6{,}84cm$$

$$A_3 = \frac{6{,}84^2}{2} - \left(\frac{2\times 6{,}84}{5}\right)\left(\frac{4\times 6{,}84}{5}\right)$$



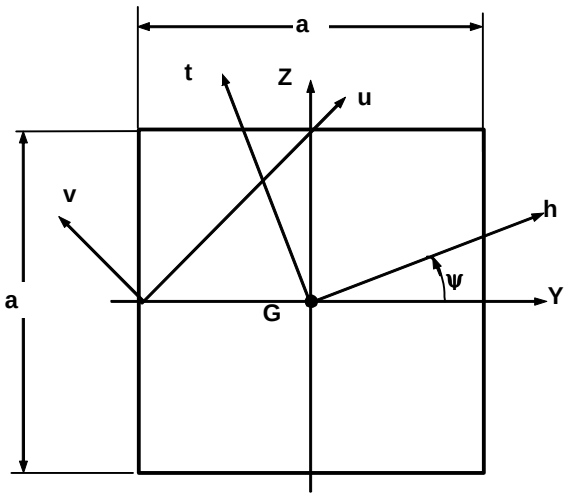
x=6,84 cm A_2=8,42 cm^2

Récapitulatif :

S_i	S_1	S_2	S_3
x(cm)	6	6,58	6,84
I_Y(cm^4)	54	54	54
A_i(cm^2)	18	11,25	8,42

Section la plus rationnelle S_3 car pour un même moment d'inertie son aire est la plus faible.

PROBLÈME N°6



1°) Montrez que pour un carré de côté a tous les axes centraux sont principaux et que tous les moments d'inertie centraux valent a^4 /12 (calculer I_{hh} et I_{ht}).

2°) Calculez les moments et le produit d'inertie du carré dans les axes u,v.

RÈPONSES N°6

1) 4 axes de symétrie : Tous les axes centraux sont donc principaux

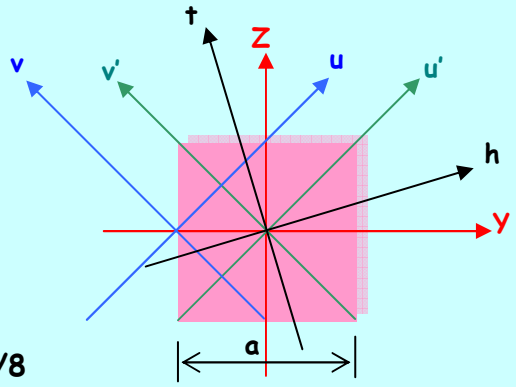
$$I_Y = I_Z = I_{hh} = I_{tt} = \frac{a^4}{12} \quad \Rightarrow \quad I_{ht} = 0$$

2)

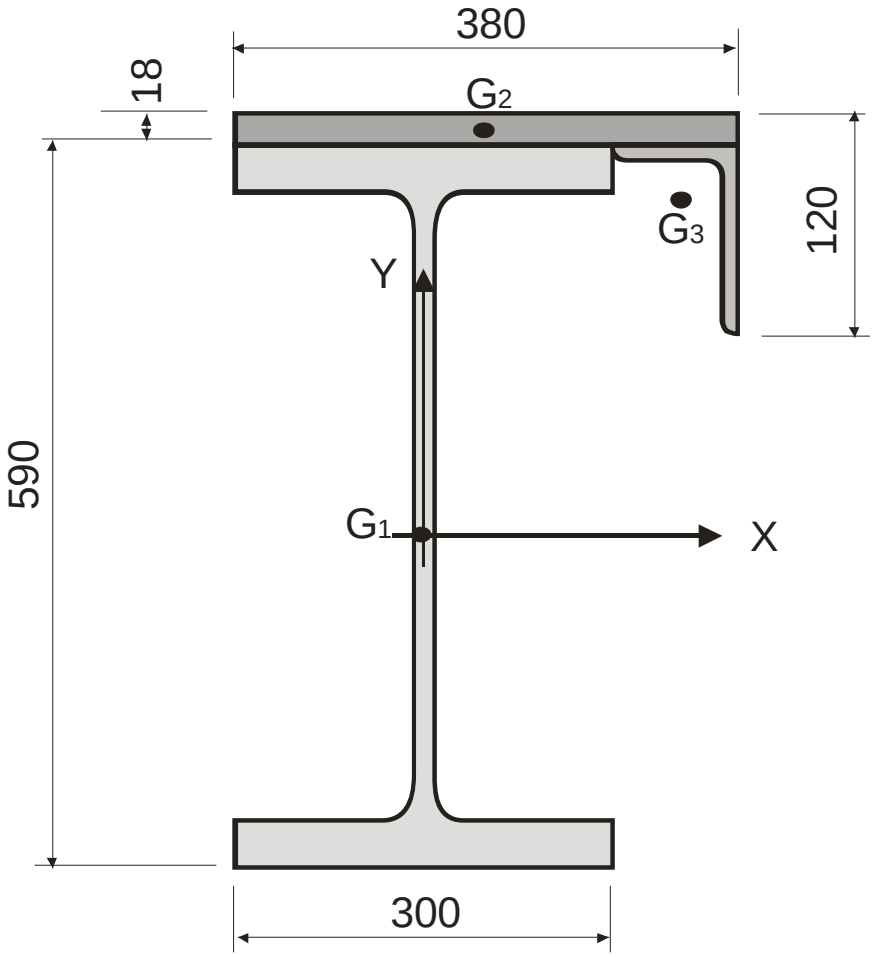
$$I_{u'u'} = I_{v'v'} = \frac{a^4}{12} \qquad I_{u'v'} = 0$$

$$I_{uu} = I_{u'u'} + x_{v_G}^2 A = \frac{a^4}{12} + \left(-\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 a^2 \qquad \mathbf{I_{vv}=5a^4/24}$$

$$I_{uv} = I_{u'v'} + x_{u_G} x_{v_G} A = 0 + \left(-\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right) a^2 \qquad \mathbf{I_{uv}=-a^4/8}$$



PROBLÈME N°7

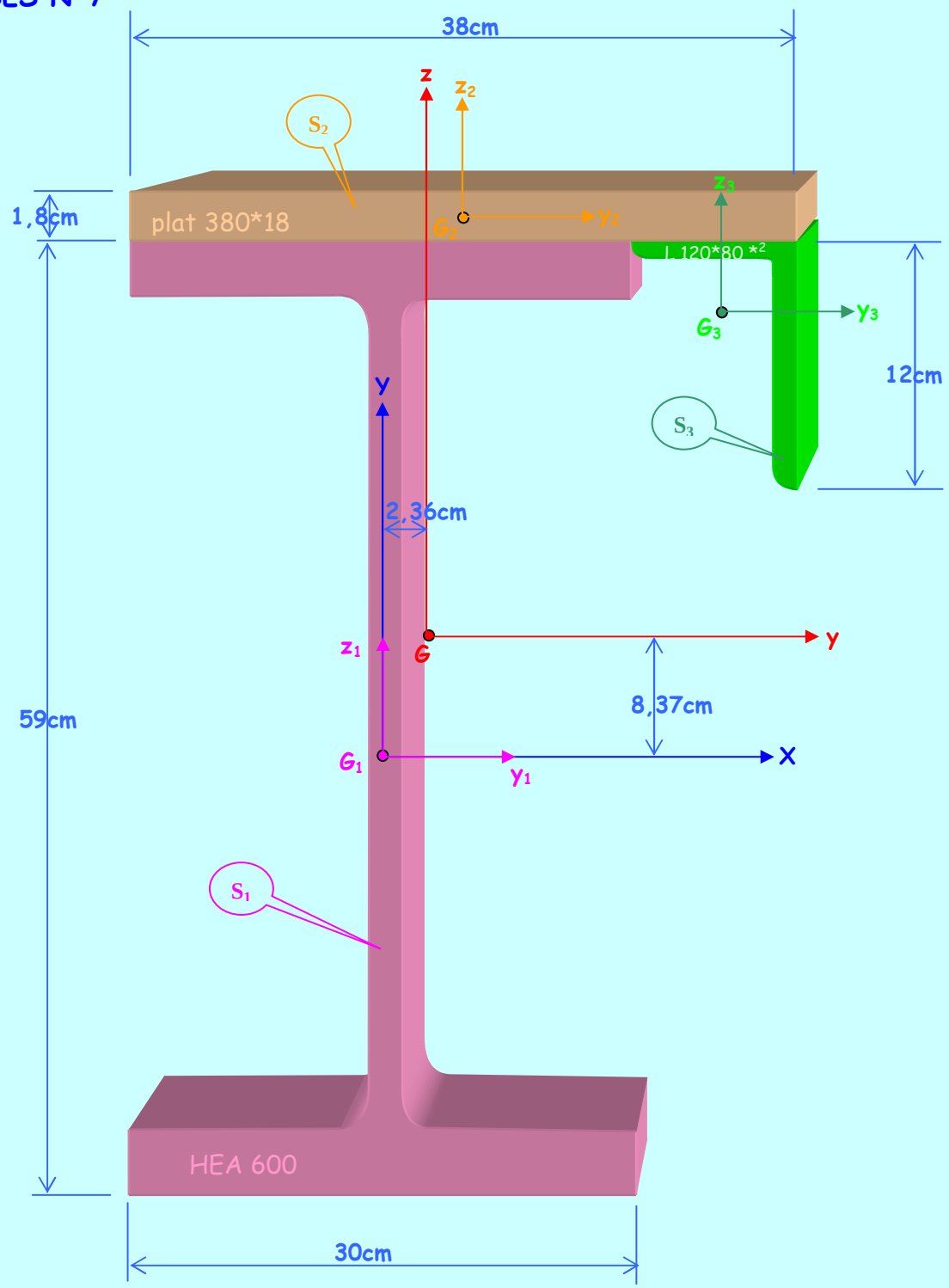


La section droite de la partie poutre de la contre flèche d'une grue à tour est représentée ci-contre. La section droite se compose d'un profilé HEA 600, d'un plat 380*18 mm, et d'une cornière à ailes inégales 120*80 série 2.

1°) Calculez les coordonnées du centre de gravité de la section droite dans le repère G_1,xy.

2°) Déterminez les éléments principaux des inerties.

RÈPONSES N°7



1) Détermination du centre de gravité G de la surface S :

$G_{1/XY}\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ $\quad G_{2/XY}\left|\begin{matrix}4cm\\30,4cm\end{matrix}\right.$ $\quad G_{3/XY}\left|\begin{matrix}20,97cm\\25,5cm\end{matrix}\right.$ $\quad A_1=226,5cm^2 \quad A_2=38.1,8cm^2$

$A_3=22,7cm^2$

$$X_G=\frac{X_{G1}A_1+X_{G2}A_2+X_{G3}A_3}{A_1+A_2+A_3} \Rightarrow \frac{38\times1,8\times4+22,7\times20,97}{226,5+(38\times1,8)+227}$$

$$Y_G=\frac{Y_{G1}A_1+Y_{G2}A_2+Y_{G3}A_3}{A_1+A_2+A_3} \Rightarrow \frac{38\times1,8\times30,4+22,7\times25,5}{226,5+(38\times1,8)+227}$$

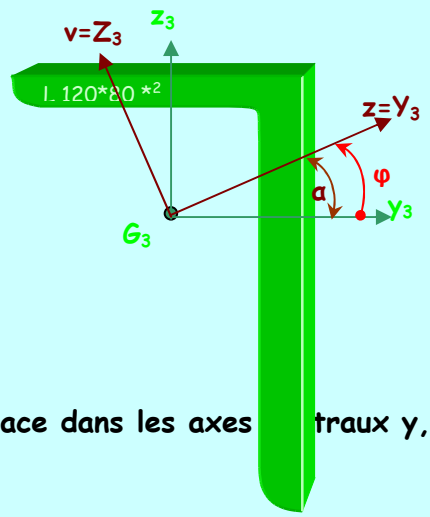
$$G_{/XY}\left|\begin{matrix}2,36cm\\8,37cm\end{matrix}\right.$$

2) Eléments principaux des inerties :

Préparation des calculs : A l'aide des tableaux AFNOR fournis en annexe nous pouvons relever les caractéristiques géométriques des 3 surfaces. Résumons les dans le tableau suivant :

S_i	S_1	S_2	S_3
$A_i(cm^2)$	226,5	38.1,8	22,7
$G_i/_{yz}(cm)$	-2,36	1,64	18,61
	-8,37	22,03	17,13
$I_{yiyi}(cm^4)$	141200	$38.1,8^3/12$	323
$I_{zizi}(cm^4)$	11270	$38^3.1,8/12$	114
$I_{yizi}(cm^4)$	0	0	?

Calcul du produit d'inertie de la cornière $I_{y_3z_3}$:



$$\tan 2\varphi = \frac{-2I_{y_3z_3}}{I_{y_3y_3} - I_{z_3z_3}}$$

$$\tan\alpha = 0{,}431$$

$$I_{y_3z_3} = \frac{-\left(I_{y_3y_3} - I_{z_3z_3}\right)}{2}\tan\left(2\left(\tan^{-1} 0{,}431\right)\right)$$

$$I_{y_3z_3} = -110{,}63cm^4$$

Calcul des moments et produit d'inertie de la surface dans les axes traux y,z.

$$I_{yy}^S = I_{yy}^{S_1} + I_{yy}^{S_2} + I_{yy}^{S_3} = I_{y_1y_1}^{S_1} + z_{G_1}^2 A + I_{y_2y_2}^{S_2} + z_{G_2}^2 A + I_{y_3y_3}^{S_3} + z_{G_3}^2 A$$

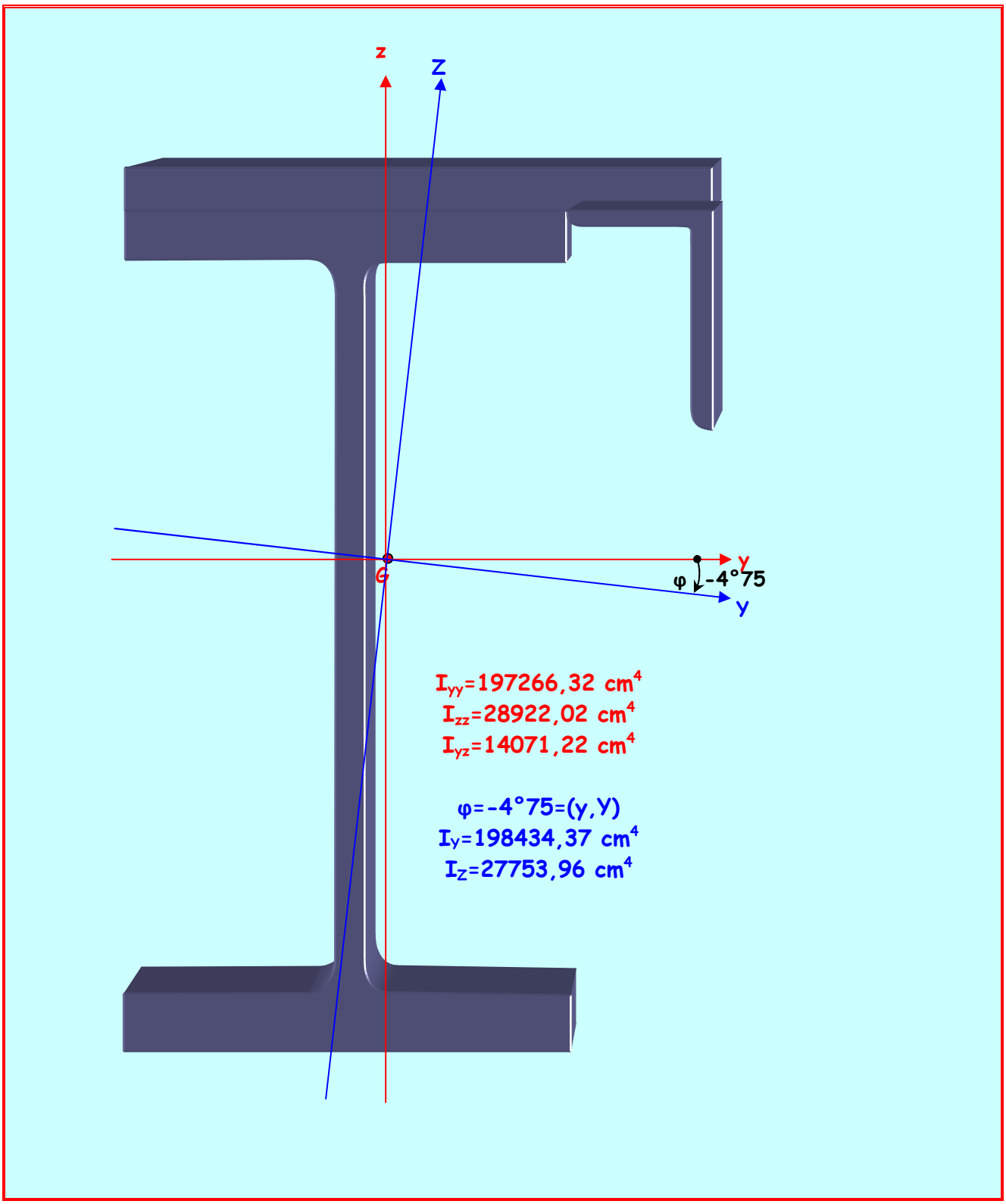
$$\begin{cases} I_{yy}^S = I_{yy}^{S_1} + I_{yy}^{S_2} + I_{yy}^{S_3} \\ I_{zz}^S = I_{zz}^{S_1} + I_{zz}^{S_2} + I_{zz}^{S_3} \\ I_{yz} = I_{yz}^{S_1} + I_{yz}^{S_2} + I_{yz}^{S_3} \end{cases} \quad avec \quad \begin{cases} I_{yy}^{Si} = I_{y_iy_i}^{S_i} + z_{Gi}^2 A \\ I_{zz}^{Si} = I_{z_iz_i}^{S_i} + y_{Gi}^2 A \\ I_{yz}^{Si} = I_{y_iz_i}^{S_i} + y_{Gi} z_{Gi} A_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{yy}^S = 197266{,}32cm^4 \\ I_{zz}^S = 28922{,}02cm^4 \\ I_{yz}^S = 14071{,}22cm^4 \end{cases}$$

Eléments principaux :

$$\tan 2\varphi = \frac{-2I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}} \approx -0{,}1671 \quad \begin{cases} 2\varphi_1 = -9^\circ 49 \\ 2\varphi_2 = 170^\circ 51 \end{cases} \quad \cos 2\varphi \rangle 0 \quad \hat{\varphi} = -4^\circ 75 = \left(\vec{y}, \vec{Y}\right)$$

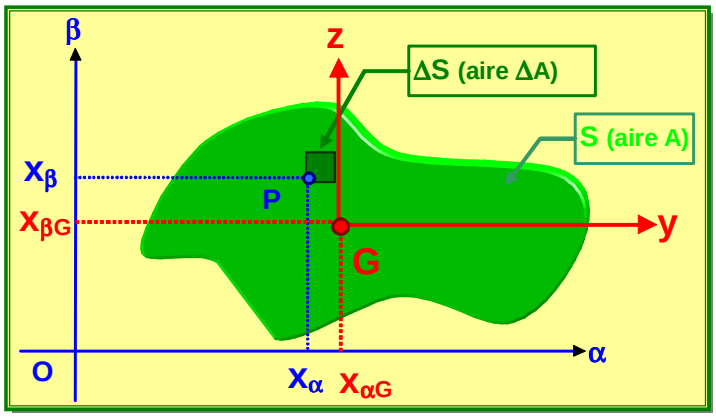
$\cos 2\varphi$ même signe que $I_{yy} - I_{zz}$:

$$I_Y^Z = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{yy} - I_{zz}\right)^2 + 4I_{yz}^2} \quad \begin{cases} I_Z = 27753{,}96cm^4 \\ I_Y = 198434{,}37cm^4 \end{cases}$$


z
Z
y
G
φ
-4°75
y
I_{yy}=197266,32 cm^4
I_{zz}=28922,02 cm^4
I_{yz}=14071,22 cm^4
φ=-4°75=(y,Y)
I_y=198434,37 cm^4
I_Z=27753,96 cm^4

CARACTÉRISTIQUES GÉOMETRIQUES DES SECTIONS DROITES DES POUTRES

1. Moments statiques. Centre de gravité:



Soient deux axes α et β, et P un point de la section droite auquel on associe un élément de surface infiniment petit ΔS d'aire ΔA.

Par définition, les quantités définies par:

$$Q_\alpha = \sum_S x_\beta \Delta A = \iint_S x_\beta dA = x_{\beta_G} A$$
$$Q_\beta = \sum_S x_\alpha \Delta A = \iint_S x_\alpha dA = x_{\alpha_G} A$$

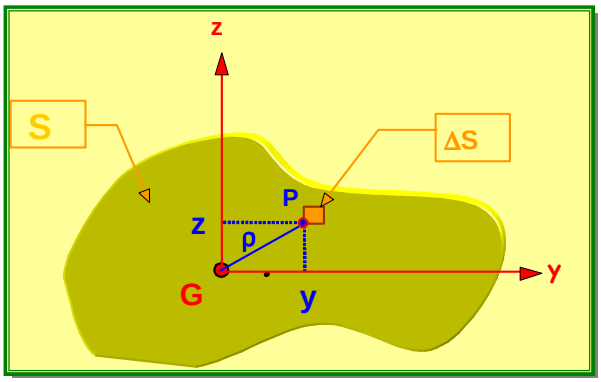
sont les moments statiques de la section droite par rapport aux axes α et β.
Unité de mesure: *l'unité SI de moment statique est le m^3. On utilise plus généralement le cm^3.*

N.B. : les moments statiques peuvent être positifs, négatifs ou nuls.

Les moments statiques sont donc nuls si les axes α et β sont centraux (s'ils passent par le centre de gravité G de la section droite). On note y et z de tels axes dans ce qui suit.

2. Moments et produit d'inertie:

2.1. Moments d'inertie centraux par rapport aux axes d'un repère situé dans le plan de la section droite:



Soient deux axes centraux y et z, et P un point de la section droite auquel on associe un élément de surface infiniment petit ΔS d'aire ΔA.

Par définition, les quantités strictement positives définies par:

$$I_{yy} = \sum_S z^2 \Delta A = \iint_S z^2 dA$$
$$I_{zz} = \sum_S y^2 \Delta A = \iint_S y^2 dA$$

sont les moments d'inertie centraux la section droite par rapport aux axes y et z.
Unité de mesure: *l'unité SI de moment d'inertie est le m^4. On utilise plus généralement le cm^4.*

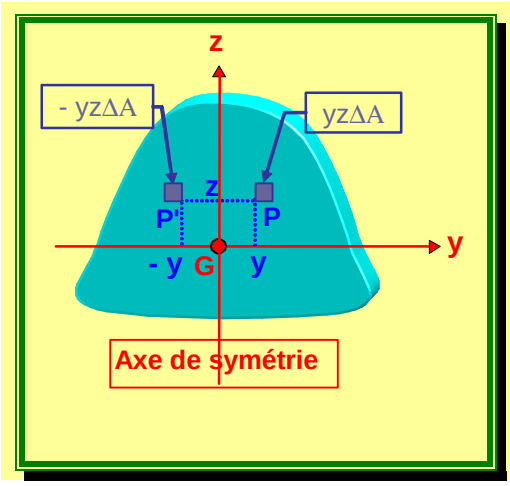
N.B. : les moments d'inertie sont toujours positifs, jamais négatifs ou nuls.

2.2. Produit d'inertie central par rapport aux axes d'un repère situé dans le plan de la section droite:

Par définition, la quantité définie par:

$$I_{yz} = \sum_S yz\ \Delta A = \iint_S yz dA$$

est le produit d'inertie central la section droite par rapport aux axes y et z.



Unité de mesure: l'unité SI de produit d'inertie est le m^4. On utilise plus généralement le cm^4.

N.B. : le produit d'inertie peut être positif, négatif ou nul.

Il est nul lorsque l'un des deux axes est axe de symétrie.

$$I_{yz} = \sum_S yz\ \Delta A = \iint_S yz dA = 0$$

2.3. Moment d'inertie polaire par rapport au centre de gravité G de la section droite:

Par définition, la quantité strictement positive définie par:

$$I_G = \sum_S \rho^2 \Delta A = \iint_S \rho^2 dA$$

est le moment d'inertie polaire de la section droite par rapport au centre de gravité G de la section droite (ρ est le rayon polaire du point P).

Unité de mesure: *l'unité SI de moment d'inertie polaire est le m^4. On utilise plus généralement le cm^4.*

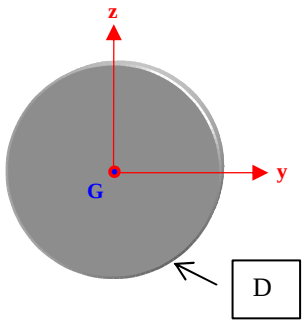
N.B. Compte tenu de la relation:

$$\rho^2 = y^2 + z^2$$

$$\boxed{I_G = I_{yy} + I_{zz}}$$

Exemples:

cas du cercle.



$$I_{yy} = I_{zz}$$

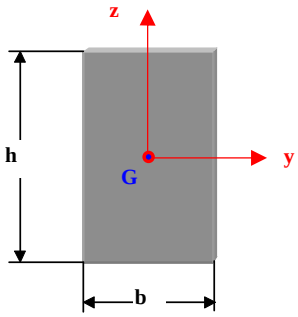
$$I_{yz} = 0$$

$$I_G = I_{yy} + I_{zz} = 2I_{yy}$$

$$I_G = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I_{yy} = \frac{\pi D^4}{64}$$

cas du rectangle.



$$I_{yz} = 0$$

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{12}$$

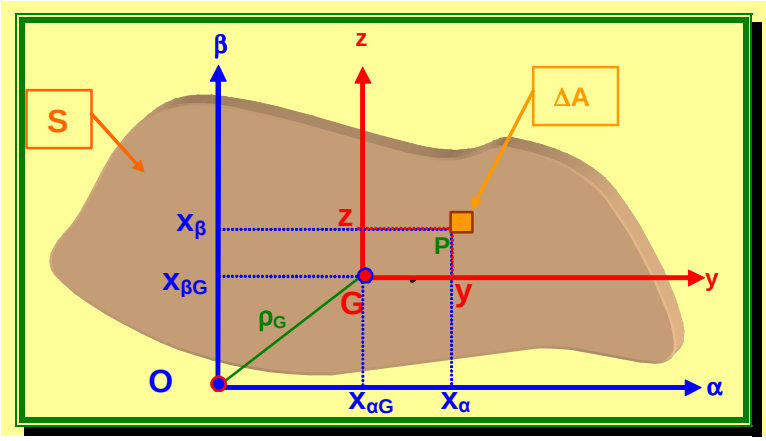
$$I_{zz} = \frac{b^3 h}{12}$$

$$I_G = I_{yy} + I_{zz}$$

$$I_G = \frac{bh}{12}\left(b^2 + h^2\right)$$

2.4. Translation des axes centraux: théorème d'HUYGHENS:

Soient deux repères, (O,α β) quelconque, et (G,yz) central, tels que les axes soient parallèles, et un point P de la section droite auquel on associe un élément de surface infiniment petit ΔS d'aire ΔA.



Les relations entre les coordonnées:

$$x_\alpha = x_{\alpha G} + y$$

$$x_\beta = x_{\beta G} + z$$

permettent d'écrire:

$$I_{\alpha\alpha} = \iint_S x_\beta{}^2 dA = \iint_S \left(x_{\beta_G} + z\right)^2 dA$$

Or :

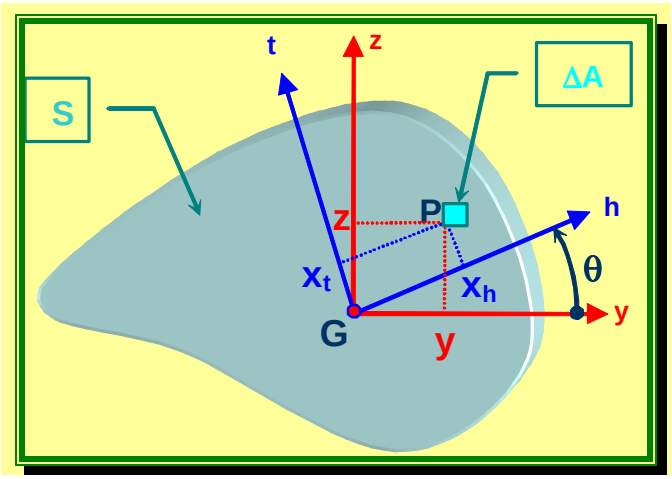
$$x_{\beta_G}^2 \iint_S dA = x_{\beta_G}^2 A \quad ; \quad \iint_S z^2 dA = I_{yy} \quad ; \quad 2x_{\beta_G} \iint_S z dA = 2x_{\beta_G} Q_y = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_{\alpha\alpha} &= I_{yy} + Ax_{\beta G}^2 \\ I_{\beta\beta} &= I_{zz} + Ax_{\alpha G}^2 \\ I_{\alpha\beta} &= I_{yz} + Ax_{\alpha G} x_{\beta G} \\ I_O &= I_G + A\rho_G^2 \end{aligned}}$$

Ces relations constituent le théorème d'HUYGHENS.

2.5. Rotation des axes centraux :

2.5.1. Rotation des axes centraux:



Soient deux repères, (G,y,z), et (G,h,t) centraux, tels que le repère (G,h,t) se déduise du repère (G,y,z) par une rotation d'angle θ et un point P de la section droite auquel on associe un élément de surface infiniment petit ΔS d'aire ΔA.

Les relations entre les coordonnées:

$$\begin{cases} x_h = y\cos\theta + z\sin\theta \\ x_t = -y\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$

permettent d'écrire:

$$I_{hh} = \iint_S x_t^2 dA = \iint_S (-y\sin\theta + z\cos\theta)^2 dA = \iint_S (-y\sin\theta)^2 dA + \iint_S (z\cos\theta)^2 dA + \iint_S 2(-y\sin\theta \times z\cos\theta) dA$$

$$I_{hh} = (\sin\theta)^2 \iint_S y^2 dA + (\cos\theta)^2 \iint_S z^2 dA - 2\sin\theta\cos\theta \iint_S yz dA$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_{hh} &= I_{yy}\cos^2\theta + I_{zz}\sin^2\theta - 2I_{yz}\sin\theta\cos\theta \\ I_{tt} &= I_{yy}\sin^2\theta + I_{zz}\cos^2\theta + 2I_{yz}\sin\theta\cos\theta \\ I_{ht} &= (I_{yy} - I_{zz})\sin\theta\cos\theta + I_{yz}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{aligned}}$$

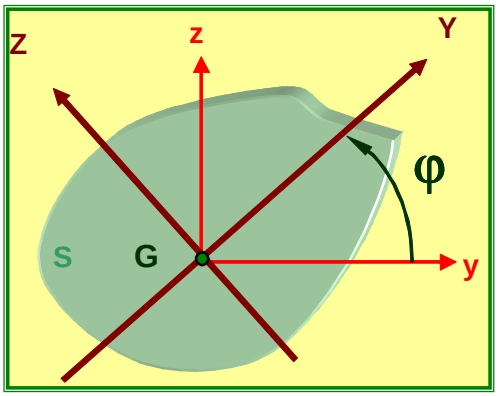
En fonction de l'arc double 2 θ , les relations précédentes s'écrivent:

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \qquad 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_{hh} &= \frac{I_{yy}+I_{zz}}{2} + \frac{I_{yy}-I_{zz}}{2}\cos 2\theta - I_{yz}\sin 2\theta \\ I_{tt} &= \frac{I_{yy}+I_{zz}}{2} - \frac{I_{yy}-I_{zz}}{2}\cos 2\theta + I_{yz} + \sin 2\theta \\ I_{ht} &= \frac{I_{yy}-I_{zz}}{2}\sin 2\theta + I_{yz}\cos 2\theta \end{aligned}}$$

2.6. Éléments principaux des inerties de la section droite:

a) Définition:



Il existe toujours dans le plan d'une surface plane deux axes centraux perpendiculaires (ou une infinité d'axes centraux perpendiculaires) appelés axes principaux d'inertie (notés Y et Z) suivant lesquels :

1°) Le produit d'inertie de la surface est nul.

2°) Les moments d'inertie principaux (notée I_Y et I_Z), sont maximum et minimum (ou constants).

Soit φ l'angle θ particulier tel que $I_{ht} = 0$

$$0 = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2}\sin 2\varphi + I_{yz}\cos 2\varphi$$

$$\boxed{\tan 2\varphi = -\frac{2I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}}}$$

En fonction de l'arc simple, on obtient :

$$\boxed{\tan \varphi = -\frac{I_Y - I_{yy}}{I_{yz}}}$$

Soit φ_1 l'angle θ particulier tel que I_{hh} soit maximum ou minimum. On a alors:

$$\tan 2\varphi_1 = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

Par conséquent: $\varphi = \varphi_1$

b) Expression des moments d'inertie principaux:

Des expressions donnant I_{hh} et I_{tt}, on tire, compte tenu de l'expression de I_{yz} en fonction de $\tan 2\varphi$:

$$I_Y = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2}\cos 2\varphi - I_{yz}\sin 2\varphi = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2}\cos 2\varphi + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2}\tan 2\varphi \sin 2\varphi$$

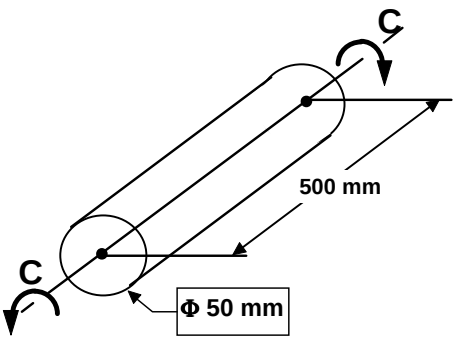
$$I_Y = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2}\cos 2\varphi + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2}\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2}\left(\frac{1}{\cos 2\varphi}\right)$$

Or : $\dfrac{1}{\cos 2\varphi} = \sqrt{1 + \tan^2 2\varphi} = \sqrt{1 + \left(-\dfrac{2I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}}\right)^2}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} I_Y = \dfrac{I_{yy} + I_{zz}}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4I_{yz}^2} & \text{(maxi)} \\ I_Z = \dfrac{I_{yy} + I_{zz}}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4I_{yz}^2} & \text{(mini)} \\ I_Y \rangle I_Z \quad \Rightarrow \quad \cos 2\varphi (I_{yy} - I_{zz}) > 0 & \end{array}}$$

TORSION

PROBLÈME N°8



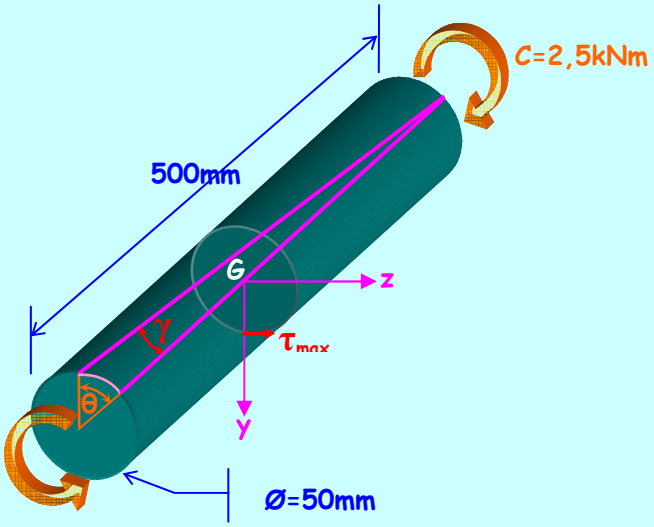
Un cylindre est soumis à un couple de torsion C = 2.5 kNm. Le module de COULOMB du matériau vaut 78 GPa. Calculez:

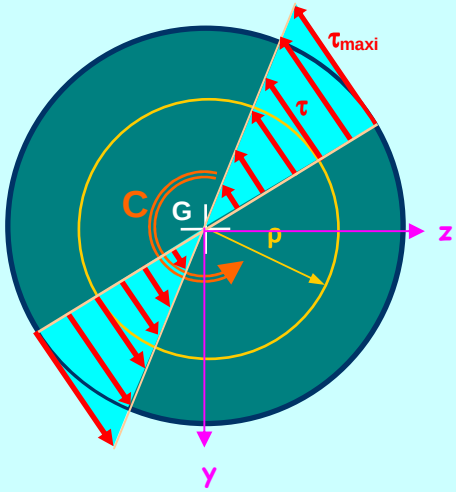
a) la contrainte tangentielle maximum dans le cylindre.

b) la distorsion des génératrices en rd et en °.

c) l'angle de rotation des sections extrêmes en °.

RÈPONSES N°8





a) Le moment de torsion M_x est constant tout le long de la barre. $M_x = C$

Considérons une section quelconque G : $\tau_{\max i} = \frac{C}{I_G} R$ avec $I_G = \frac{\pi D^4}{32}$

$$\tau_{\max i} = \frac{2{,}5.10^6 \times 25 \times 32}{\pi \times 50^4}$$ **τ_{max}=101,86 MPa**

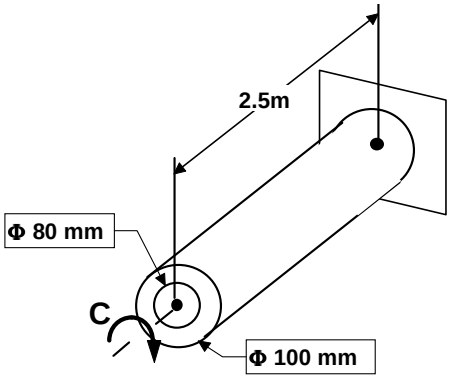
b) Appliquons la loi de Hooke en torsion : $\tau = G\gamma$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{101{,}86}{78.10^3}$$ **γ=1,305.10^{-3} rd = 0,0748°**

c) L' angle de rotation des sections extrêmes nous est donné par la relation : $\theta_x^{\max i} = \frac{M_x L}{G I_G}$

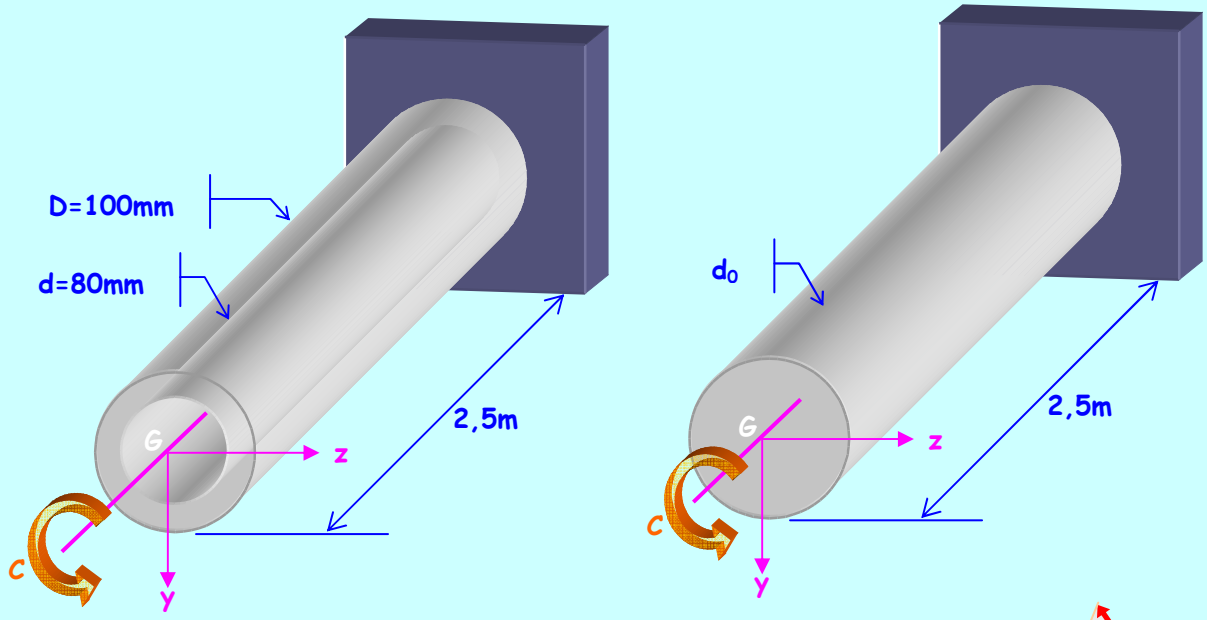
$$\theta_x = \frac{2{,}5.10^6 \times 500 \times 32}{78.10^3 \times \pi \times 50^4}$$ **θ = 0,0261 rd = 1°50**

PROBLÈME N°9



a) Calculez le couple C qui provoque une rotation des sections extrêmes du tube de 2° sachant que G = 27 GPa. En déduire la contrainte tangentielle maximum.
b) Calculez, pour d'un cylindre de même poids que le tube et qui supporte le même couple, l'angle de rotation des sections extrêmes et la contrainte tangentielle maximum.

RÈPONSES N°9



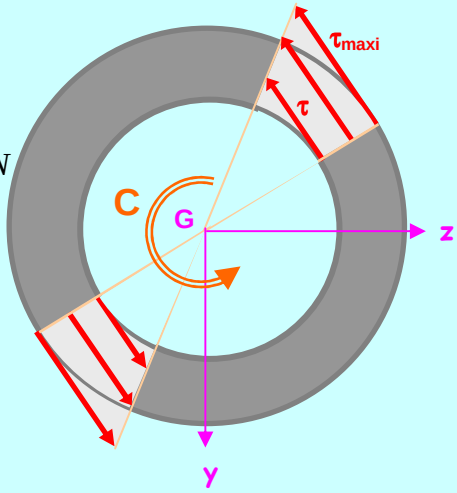
a) $\theta_x^{\max i} = \dfrac{M_x L}{G I_G}$ avec $I_G = \dfrac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32}$ et $\theta_{rd} = \dfrac{\theta^\circ \times \pi}{180}$

$$M_x = \frac{G I_G \theta_x^{\max i}}{L} = \frac{27.10^3 \times \pi \times \left(100^4 - 80^4\right) \times 2 \times \pi}{32 \times 180 \times 2{,}5.10^3} = 2185130 mmN$$

C = 2185,13mN

$$\tau_{\max i} = \frac{C}{I_G} R = \frac{2185{,}13.10^3 \times 100 \times 32}{2 \times \pi \times \left(100^4 - 80^4\right)}$$

τ_{max} = 18,85 MPa



b) Même poids implique même volume donc même aire

$$A = A_0 \Rightarrow \frac{\pi d_0^2}{4} = \frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4} \quad \Rightarrow \quad d_0 = \sqrt{100^2 - 80^2} = 60mm$$

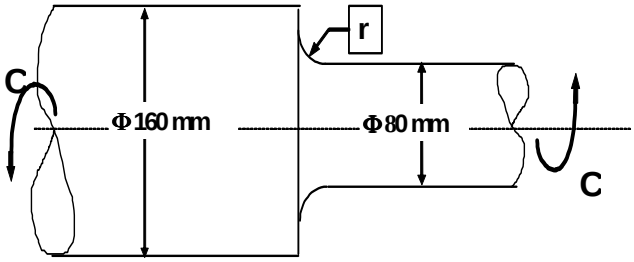
$$\theta_x^{\max i} = \frac{M_x L}{G I_G} = \frac{2185{,}13.10^3 \times 2500 \times 32}{27.10^3 \times \pi \times 60^4}$$

θ_{max}= 0,159rd = 9°11

$$\tau_{\max i} = \frac{C}{I_G} R = \frac{2185{,}13.10^3 \times 30 \times 32}{\pi \times 60^4}$$

τ_{max}= 51,52 MPa

PROBLÈME N°10

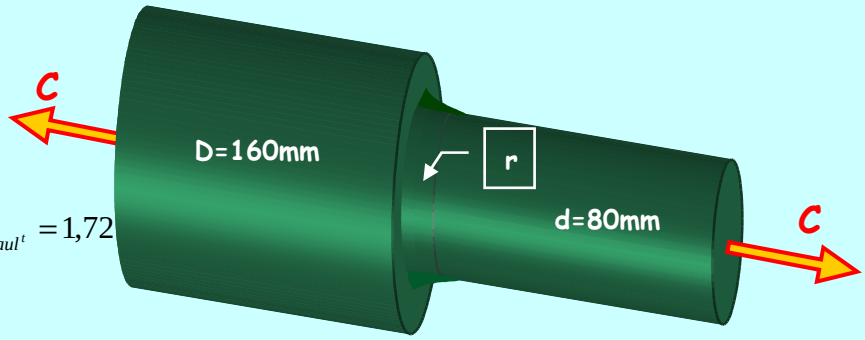


Un arbre épaulé tourne à 900 tr/mn. La contrainte tangentielle admissible vaut 55 MPa. Calculez:

a) la puissance transmise en kW si r=4mm.

b) le gain de puissance si r=10mm.

RÈPONSES N°10



a) r=4mm

$$K_{epaul^t} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{D}{d} = \dfrac{160}{80} = 2 \\ \dfrac{r}{d} = \dfrac{4}{80} = 0{,}05 \end{cases} \qquad K_{epaul^t} = 1{,}72$$

$$\tau_{\max i} = K\frac{C}{I_G}\frac{d}{2} \Rightarrow C = \frac{2\tau_{\max i} I_G}{Kd} = \frac{55\times\pi\times 80^4}{32\times 1{,}72\times 40} = 3214653 mmN$$

C=3214,65mN

$$P = C\omega \qquad \text{avec } \omega = \frac{\pi N}{30}$$

La puissance s'exprimant en Watt, le couple en mN et la rotation angulaire en radian par seconde.

$$P = \frac{3214{,}65\times\pi\times 900}{30} = 302974 W$$

P=303kW

b) r=10mm

$$K_{epaul^t} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{D}{d} = \dfrac{160}{80} = 2 \\ \dfrac{r}{d} = \dfrac{10}{80} = 0{,}125 \end{cases} \qquad K_{epaul^t} = 1{,}35$$

$$P = \frac{303\times 1{,}72}{1{,}35} = 386 kW \quad \Rightarrow \quad Gain = \frac{386-303}{303}\times 100$$

$G_{\%}$=27,4%

PROBLÈME N°11

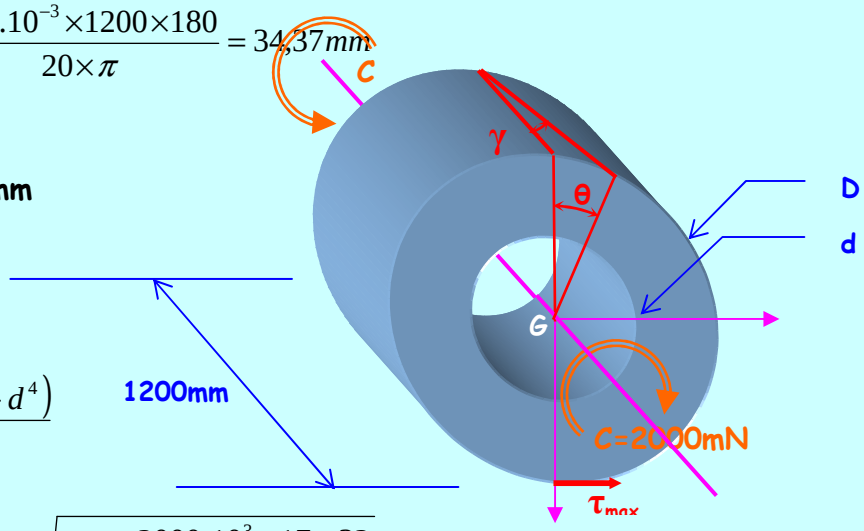
Un arbre de torsion tubulaire de diamètre extérieur D, de diamètre intérieur d, de longueur 1200mm, est sollicité par un couple de 2000 mN. Sous l'action de ce couple, l'angle de torsion total de l'une des extrémités par rapport à l'autre doit être de 20°±0.5°. La contrainte maximum admissible en torsion est de 400 MPa. Le module de COULOMB du matériau vaut 80 GPa.

1) Calculer la distorsion angulaire maximum en radians en appliquant la loi de HOOKE.
2) En déduire le diamètre extérieur D en mm (arrondir le résultat au mm).
3) Quel est alors le diamètre intérieur d en mm (arrondir le résultat au mm).
4) Avec les valeurs trouvées en 2) et 3) calculer la contrainte maximum de torsion (en MPa) et l'angle de torsion des sections extrêmes (en °).

RÈPONSES N°11

1) $\gamma_{\max} = \dfrac{\tau_{\max}}{G} = \dfrac{400}{80.10^3}$ **γ=5.10^{-3}rd**

2) $\gamma = \dfrac{\theta D}{2L} \Rightarrow D = \dfrac{2\gamma L}{\theta} = \dfrac{2\times 5.10^{-3}\times 1200\times 180}{20\times\pi} = 34{,}37mm$



En arrondissant au mm : **D=34mm**

3) $\tau_{\max i} = \dfrac{C}{I_G}R$ avec $I_G = \dfrac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32}$

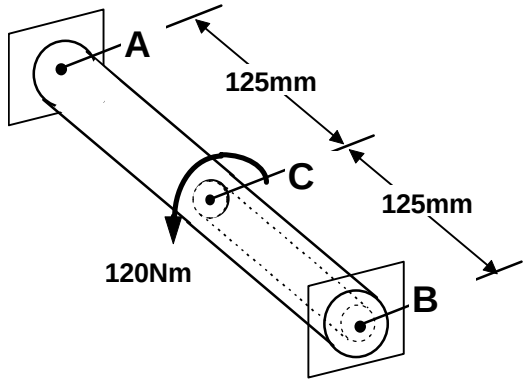
$$400 = \frac{2000.10^3\times 17\times 32}{\pi\times\left(34^4 - d^4\right)} \Rightarrow d = \sqrt[4]{34^4 - \frac{2000.10^3\times 17\times 32}{400\times\pi}} = 26{,}19mm$$

En arrondissant au mm : **d=26mm**

4) $\tau_{\max} = \dfrac{2000.10^3\times 17\times 32}{\pi\times\left(34^4 - 26^4\right)}$ **τ_{max} = 393,83 MPa**

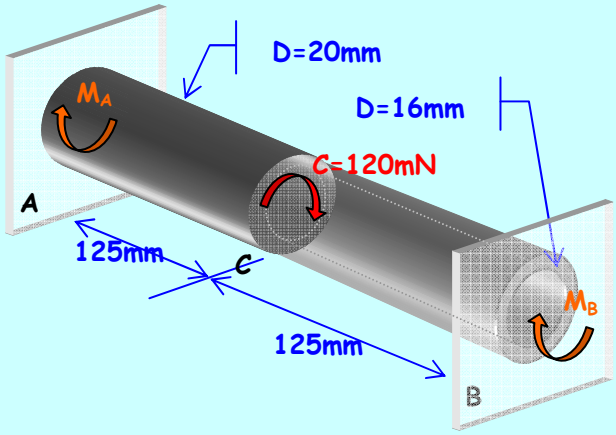
$\theta_x^{\max i} = \dfrac{M_x L}{G I_G} = \dfrac{2000.10^3\times 1200\times 32}{80.10^3\times\pi\times\left(34^4 - 26^4\right)}$ **θ_{max}= 0,347rd = 19°91**

PROBLÈME N°12



Le diamètre extérieur vaut 20 mm, le diamètre intérieur 16 mm. La barre AB est encastrée en A et B. Calculez les moments d'encastrement en A et B.

RÈPONSES N°12



Problème spatial : H=i-6n=6 car
6 inconnues en A, 6 inconnues en B .
Compte tenue du chargement, nous pouvons réduire le degré d'hyperstaticité à 1 :
2inconnues externes, un moment en A et un en B

Equation d'équilibre : $M_A + M_B = C = 120Nm$

Equation de déformation : $\theta_{A/B} = \theta_{AC} + \theta_{CB} = 0$

$$\theta_{AC} = \frac{M_x^{AC} L^{AC}}{GI_G^{AC}} \text{ avec } M_x^{AC} = -M_A \qquad \theta_{CB} = \frac{M_x^{CB} L^{CB}}{GI_G^{CB}} \text{ avec } M_x^{CB} = M_B$$

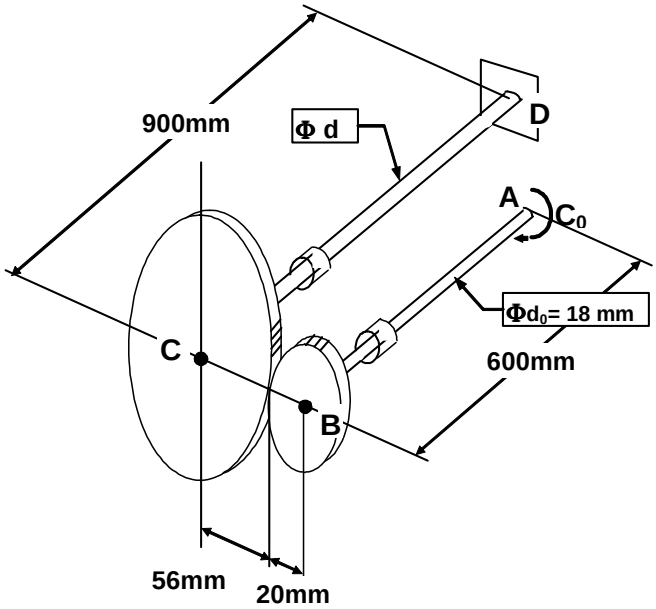
$$\frac{M_x^{AC} L^{AC}}{GI_G^{AC}} + \frac{M_x^{CB} L^{CB}}{GI_G^{CB}} = \frac{-M_A}{I_G^{AC}} + \frac{M_B}{I_G^{CB}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{M_A}{M_B} = \frac{I_G^{AC}}{I_G^{CB}} = \frac{20^4}{20^4 - 16^4}$$

D'où le système à résoudre :

$$\begin{cases} M_A + M_B = 120 \\ \dfrac{M_A}{M_B} = \dfrac{20^4}{20^4 - 16^4} \end{cases} \qquad M_B = \frac{120}{1 + \dfrac{20^4}{20^4 - 16^4}} = 44{,}55 \quad M_A = 75{,}45$$

M_A = 75,45 Nm **M_B = 44,55 Nm**

PROBLÈME N°13



La contrainte tangentielle maximum dans les arbres AB et CD vaut 55 MPa. Calculez:

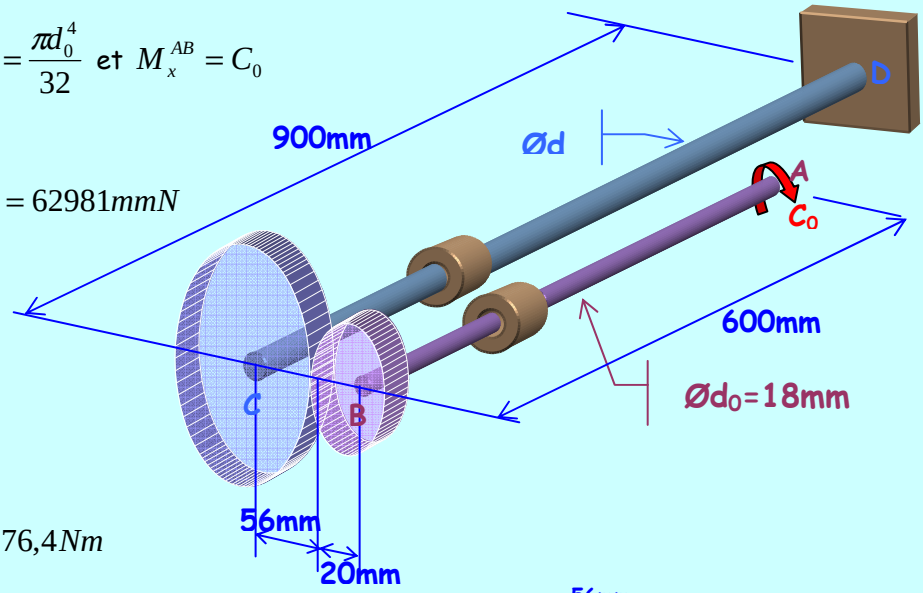
a) la valeur du couple C_0.

b) le diamètre d.

c) la rotation de la section droite A (en °) par rapport à la section droite D sachant que G= 80 GPa.

RÈPONSES N°13

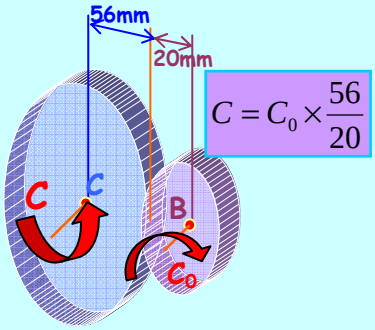
a) $\tau_{\max i} = \dfrac{M_x^{AB}}{I_G^{AB}} \dfrac{d_0}{2}$ avec $I_G^{AB} = \dfrac{\pi d_0^4}{32}$ et $M_x^{AB} = C_0$



$$C_0 = \frac{\tau_{\max i} I_G^{AB}}{\frac{d_0}{2}} = \frac{55 \times \pi \times 18^4}{32 \times 9} = 62981 mmN$$

C_0 = 63 Nm

b) $C = C_0 \times \dfrac{56}{20} = 63 \times \dfrac{56}{20} = 176{,}4 Nm$



$\tau_{\max i} = \dfrac{M_x^{CD}}{I_G^{CD}} \dfrac{d}{2}$ avec $I_G^{CD} = \dfrac{\pi d^4}{32}$ et $M_x^{CD} = C$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 176{,}4.10^3}{\pi \times 55}} = 25{,}37$$

d = 25,4 mm

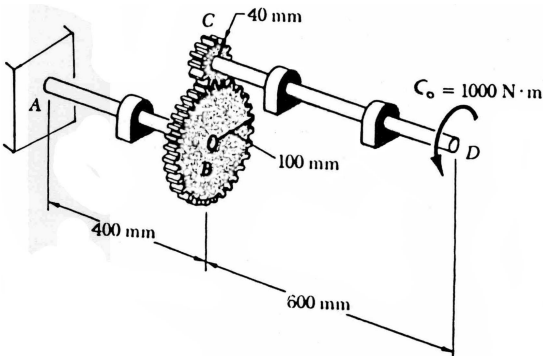
c) $\theta_{AB} = \dfrac{M_x^{AB} L^{AB}}{G I_G^{AB}}$; $\theta_{CD} = \dfrac{M_x^{CD} L^{CD}}{G I_G^{CD}}$

$$\theta_{A/D} = \theta_A = \theta_{CD} \times \frac{56}{20} + \theta_{AB} = \left(\frac{176{,}4.10^3 \times 900 \times 32}{80.10^3 \times \pi \times 25{,}4^4} \times \frac{56}{20} + \frac{63.10^3 \times 600 \times 32}{80.10^3 \times \pi \times 18^4} \right) = 0{,}1818 rd$$

θ_A= 10°42

PROBLÈME N°14

On considère l'assemblage de la figure ci-contre, constitué de deux arbres élastiques AB et CD reliés par deux engrenages. Les arbres AB et CD sont constitués du même acier de module de Coulomb : 80GPa, et ont même diamètre d. L'arbre AB a une longueur de 400mm et l'arbre CD une longueur de 600mm. Un couple C_0 = 1000Nm est appliqué à l'extrémité D de l'arbre CD. L'extrémité A de l'arbre AB est encastrée.



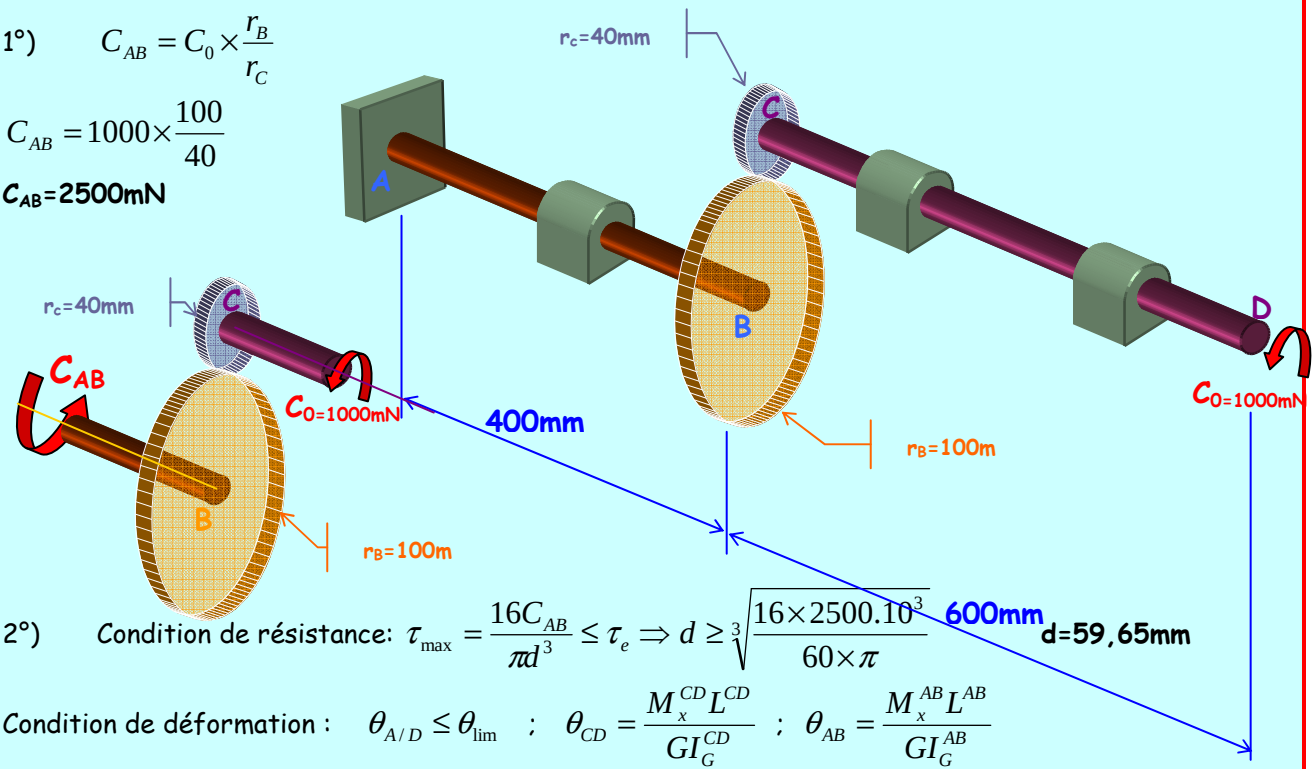
1) Le point de contact des dentures des engrenages est situé sur une circonférence de rayon r_B =100mm pour l'engrenage B et de rayon r_C = 40mm pour l'engrenage C. Calculer le moment de torsion auquel est soumis l'arbre AB.
2) Sachant que la rotation D par rapport à A ne peut excéder une valeur de 1,5° et que la contrainte tangentielle maximum admissible dans les deux arbres ne peut excéder 60 MPa, calculer le diamètre d des arbres AB et CD **arrondi au mm.**

RÈPONSES N°14

1°) $C_{AB} = C_0 \times \frac{r_B}{r_C}$

$C_{AB} = 1000 \times \frac{100}{40}$

C_{AB}=2500mN



2°) Condition de résistance: $\tau_{max} = \frac{16C_{AB}}{\pi d^3} \le \tau_e \Rightarrow d \ge \sqrt[3]{\frac{16 \times 2500.10^3}{60 \times \pi}}$ **d=59,65mm**

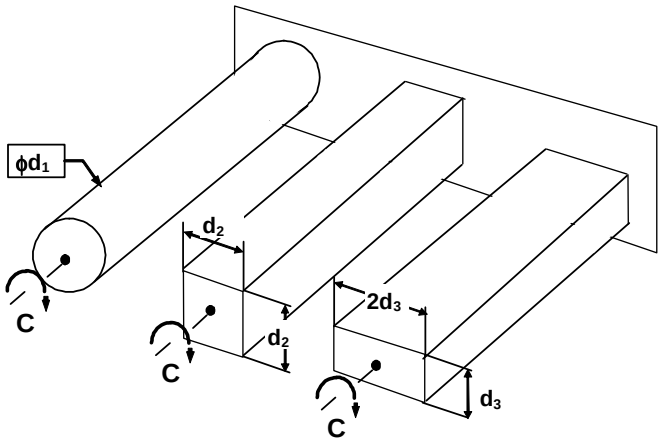
Condition de déformation : $\theta_{A/D} \le \theta_{lim}$; $\theta_{CD} = \frac{M_x^{CD} L^{CD}}{GI_G^{CD}}$; $\theta_{AB} = \frac{M_x^{AB} L^{AB}}{GI_G^{AB}}$

$$\theta_{A/D} = \theta_{AB} \times \frac{100}{40} + \theta_{CD} = \left(\frac{2500.10^3 \times 400 \times 32}{80.10^3 \times \pi \times d^4} \times \frac{100}{40} + \frac{1000.10^3 \times 600 \times 32}{80.10^3 \times \pi \times d^4} \right) \le \frac{1{,}5 \times \pi}{180}$$

D'où $d \le \sqrt[4]{\frac{\left(\frac{2500.10^3 \times 400 \times 32}{80.10^3 \times \pi} \times \frac{100}{40} + \frac{1000.10^3 \times 600 \times 32}{80.10^3 \times \pi} \right) \times 180}{1{,}5 \times \pi}} = 62{,}31mm$ d=62,31mm

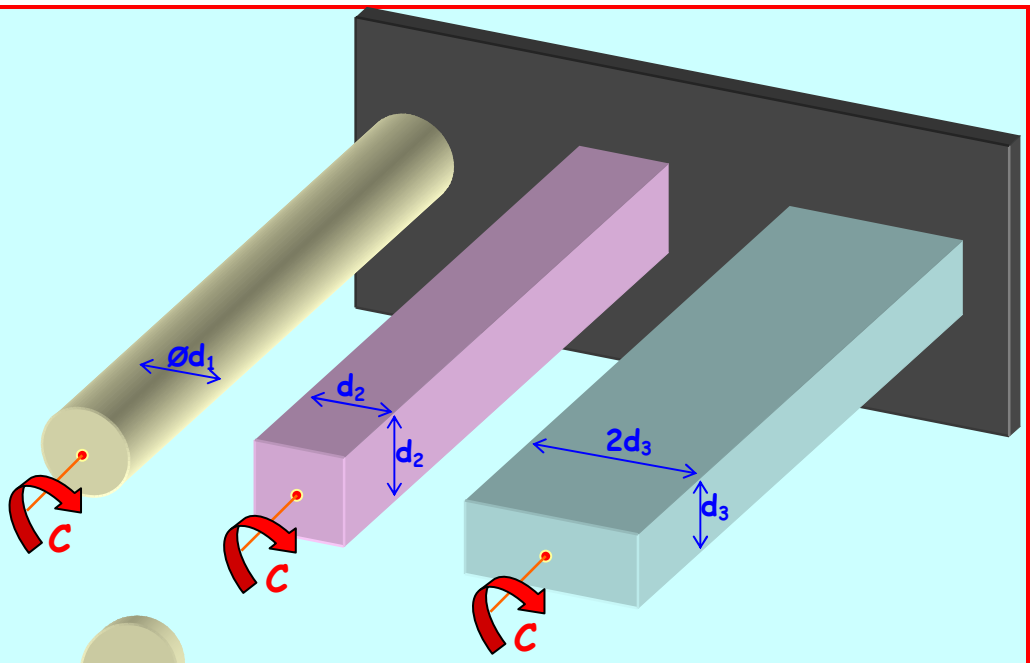
Choix du diamètre d=63 mm

PROBLÈME N°15



Calculez d_1, d_2, d_3 dans chacun des 3 cas sachant que C= 300 Nm et que la contrainte de cisaillement maximum vaut 60 MPa. Quelle est la section la plus rationnelle?

RÈPONSES N°15



D'après l'annexe 4 :

$$J = k_1 e^3 h$$

$$\tau_{\max i} = \frac{|M_x|}{k_2 e^2 h}$$

a) Section circulaire :

$$\tau_{\max i} = \frac{|M_x|}{I_G}\frac{d_1}{2} = \frac{16|M_x|}{\pi d_1^3} \le \tau_e \quad \Rightarrow \quad d_1 \ge \sqrt[3]{\frac{300.10^3 \times 16}{60 \times \pi}}$$

d_1=29,42mm Aire : A_1=679,79mm²

b) Section carrée :

$$\tau_{\max i} = \frac{|M_x|}{k_2 e^2 h} \quad e = h = d_2 \Rightarrow \frac{h}{e} = 1 \Rightarrow k_2 = 0{,}208 \qquad d_2 \ge \sqrt[3]{\frac{300.10^3}{60 \times 0{,}208}}$$

d_2=28,86mm A_2=832,9mm²

c) Section rectangulaire :

$$\tau_{\max i} = \frac{|M_x|}{k_2 e^2 h} \qquad 2e = h = d_3 \Rightarrow \frac{h}{e} = 2 \Rightarrow k_2 = 0{,}246 \qquad d_3 \ge \sqrt[3]{\frac{300.10^3}{60 \times 0{,}246 \times 2}}$$

d_3=21,66mm A_3=938,31mm²

La section la plus rationnelle est donc circulaire

PROBLÈME N°16

Deux barres réalisées en un même matériau ont même longueur et même poids. L'une a une section circulaire (1), l'autre carrée (2). Déterminez pour une même contrainte tangentielle maximum:

a) le rapport des couples de torsion transmis.

b) le rapport des angles de rotation des sections extrêmes.

RÈPONSES N°16

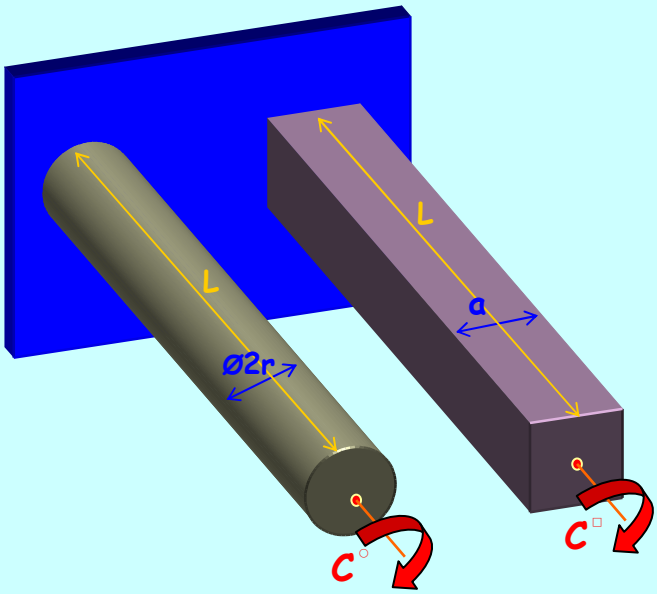
D'après l'annexe 4 :

Section carrée

$$\tau_{\max i} = \frac{|M_x|}{k_2 e^2 h} \qquad \theta_x' = \frac{M_x}{GJ}$$

$$J = k_1 e^3 h$$

$$\frac{h}{e} = 1 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} k_1 = 0{,}141 \\ k_2 = 0{,}208 \end{array} \right.$$



Section circulaire

$$\tau_{\max i} = \frac{|M_x|}{I_G}\frac{d_1}{2} \qquad \theta_x' = \frac{M_x}{GI_G}$$

$$I_G = \frac{\pi r^4}{2}$$

Même longueur, et même poids impliquent que les aires sont identiques :

$$\pi r^2 = a^2 \qquad \Rightarrow \qquad a = r\sqrt{\pi}$$

a) Rapport des couples de torsion transmis. $\tau_{\max i}^{cercle} = \tau_{\max i}^{carré}$

$$\frac{C^{cercle}}{\frac{\pi r^4}{2}} r = \frac{C^{carré}}{0{,}208 r^3 \pi\sqrt{\pi}} \Rightarrow \frac{C^{cercle}}{C^{carré}} = \frac{1}{0{,}208\sqrt{\pi}\,2} = 1{,}356$$

$C^{\circ}/C^{\square}$ =1,356

b) Rapport des angles de rotation des sections extrêmes.

$$\theta^{cercle} = \frac{C^{cercle} L}{GI_G} \qquad \theta^{carré} = \frac{C^{carré} L}{GJ} \qquad \text{avec } J = k_1 r^4 \pi^2$$

$$\frac{\theta^{cercle}}{\theta^{carré}} = \frac{C^{cercle} J}{C^{carré} I_G} = 1{,}356 \frac{0{,}141 r^4 \pi^2 2}{\pi r^4} = 1{,}356 \times 0{,}141 \times 2\pi = 1{,}201$$

$\theta^{\circ}/\theta^{\square}$ =1,201

TORSION

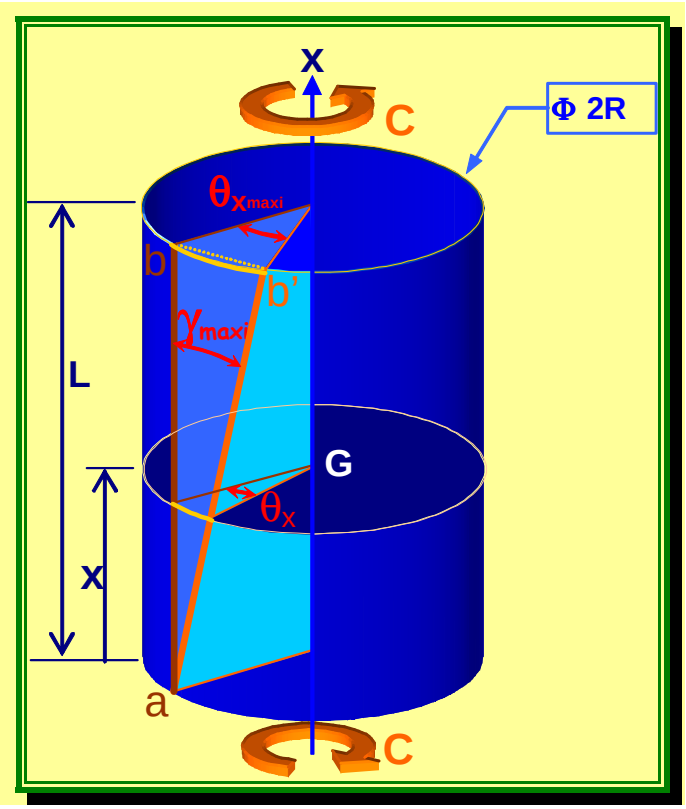
1. Définition :

Si, pour une poutre droite à section constante, le torseur de section se réduit à M_x, quel que soit la section droite, la poutre est soumise à de la torsion. On distingue suivant la forme de la section droite:

- La torsion de **COULOMB** pour les sections droites circulaires ou tubulaire.
- La torsion de **SAINT-VENANT** pour les sections droites non circulaires.

2. Torsion de COULOMB:

2.1. Contraintes en un point P appartenant à une section droite :



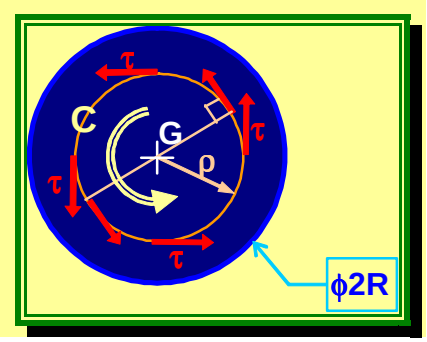
Après application du couple $\vec{C}$ on constate que:

- La longueur et le diamètre du cylindre n'ont pas variés.
- Toutes les sections droites subissent une rotation θx proportionnelle à x.
- La seule déformation est une distorsion γ des génératrices, tout à fait comparable à celle qu'on observe dans le cisaillement simple.

On peut donc écrire, quel que soit le point de la section droite:

$\sigma = 0$

$\tau = G\gamma$ d'après la loi de HOOKE

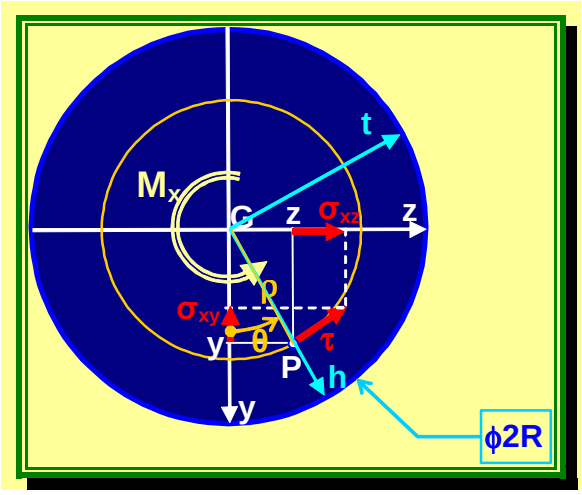


Étant donnée la symétrie de révolution autour de l'axe de torsion, la contrainte tangentielle τ est:

1°) tangente aux cercles de rayon polaire ρ.

2°) la même en des points situés sur un cercle de rayon polaire ρ.

Considérons un point P de la section droite , la contrainte τ varie linéairement le long du rayon polaire : $\tau = k\rho$.



$$\begin{cases} y = \rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = -\tau\sin\theta = -k\rho\sin\theta = -kz \\ \sigma_{xz} = \tau\cos\theta = k\rho\cos\theta = ky \end{cases}$$

Le vecteur contrainte en un point P doit satisfaire ces 6 équations (Voir cours module F112)

$$(1)\quad 0 = \iint_S \sigma_{xx} dA \qquad (4)\quad M_x = \iint_S (y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy}) dA$$

$$(2)\quad 0 = \iint_S \sigma_{xy} dA \qquad (5)\quad 0 = \iint_S z\sigma_{xx} dA$$

$$(3)\quad 0 = \iint_S \sigma_{xz} dA \qquad (6)\quad 0 = -\iint_S y\sigma_{xx} dA$$

Les équations (1) (5) et (6) sont identiquement vérifiées car la composante normale $\sigma_{xx} = \sigma = 0$

L' équation $(2)\quad 0 = \iint_S \sigma_{xy} dA = \iint_S -kzdA = -k\iint_S zdA = -kQ_y^S = 0$ également vérifiée, de même pour (3) car le moment statique par rapport à des axes centraux est nul.

L' équation (4) nous permet de calculer la constante k :

$$M_x = \iint_S (y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy}) dA = k\iint_S (y^2 + z^2) dA = k\iint_S \rho^2 dA = kI_G \qquad \Rightarrow \quad k = \frac{M_x}{I_G}$$

Le vecteurcontrainte dans les axes xyz:

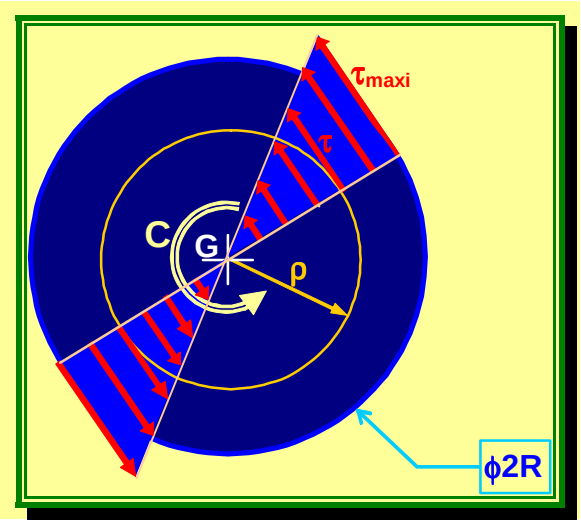
$$\vec{\Phi}^P_{x/xyz} \begin{cases} 0 \\ \sigma^P_{xy} = -\dfrac{M_x z^P}{I_G} \\ \sigma^P_{xz} = \dfrac{M_x y^P}{I_G} \end{cases}$$

s'écrit dans les axes xht:

$$\vec{\Phi}^P_{x/xht} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \tau^P = \dfrac{M_x \rho^P}{I_G} \end{cases}$$

La contrainte maximum de torsion en des point P situés sur le contour de la section droite vaut:

$$\tau_{\max i} = \frac{M_x}{I_G} R$$



La distorsion maximum (à l'abscisse polaire ρ=R) vaut:

$$\gamma_{\max i} \approx tg\gamma_{\max i} = \frac{\widehat{bb'}}{ab} = \frac{R\theta_x^{\max i}}{L}$$

La distorsion à l'abscisse polaire ρ vaut:

$$\gamma = \frac{\rho\theta_x^{\max i}}{L}$$

Soit, en introduisant l'angle unitaire de torsion $\theta_x^{'} = \frac{\theta_x^{\max i}}{L}$

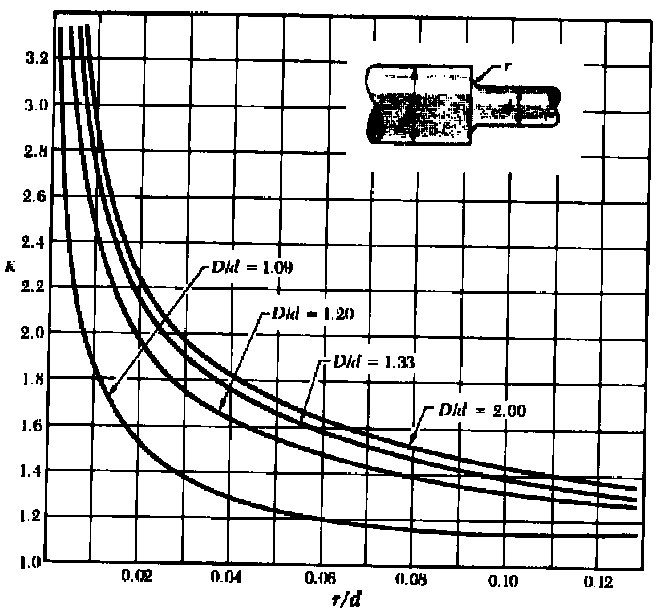
$$\gamma = \rho\theta_x^{'}$$

La contrainte tangentielle τ s'écrit:

$$\boxed{\tau = G\theta_x^{'}\rho}$$

$$\boxed{M_x = G\theta_x^{'}I_G}$$

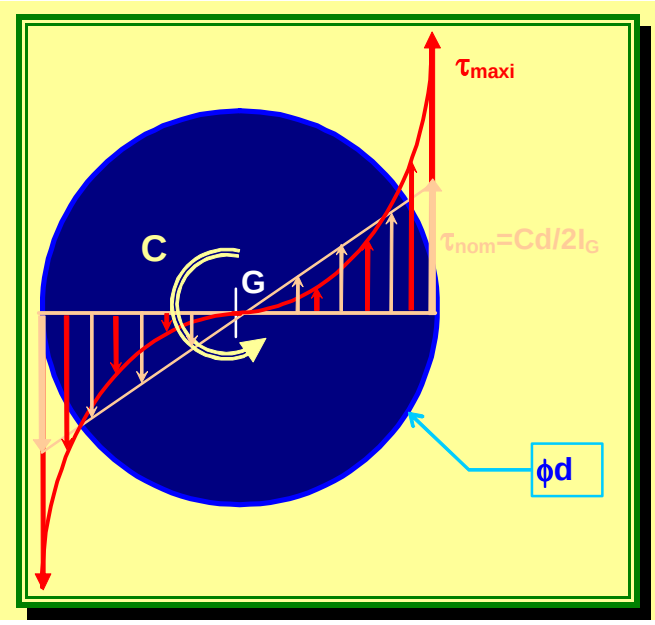
2.2. Concentration de contraintes. Influence de la variation brutale de la section droite:



Stress-concentration factors for fillets in circular shafts.

On constate que dans la section la plus faible et au voisinage du raccordement, la contrainte tangentielle réelle maximum de torsion subit une forte majoration par rapport à la valeur nominale fournie par la théorie des poutres.

La contrainte maximum réelle $\tau_{max\,i}$ de torsion se calcule à partir de la contrainte nominale maximum $\frac{C}{I_G}\frac{d}{2}$ fournie par la théorie des poutres par la relation:

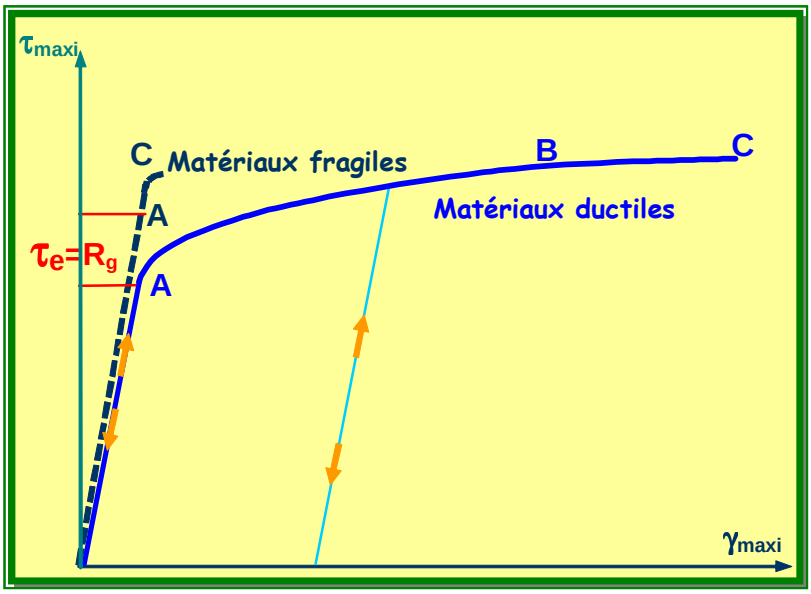


$$\tau_{max\,i} = K\frac{C}{I_G}\frac{d}{2}$$

K est le facteur de concentration de contraintes.

2.3. Essai de torsion:

Cet essai n'est pas normalisé. On soumet une éprouvette, à section circulaire, à un couple croissant lentement jusqu'à la rupture de l'éprouvette.
On enregistre le diagramme couple C/rotation θ_z de deux sections., que l'on rend intrinsèque en divisant le couple par $\frac{\pi D^3}{16}$ et la rotation par $\frac{L}{R}$.



Le diagramme est généralement composé d'une partie OA linéaire et réversible: la zone élastique, et d'une partie courbe ABC: la zone plastique où l'éprouvette subit des déformations irréversibles. La rupture intervenant au point C.
On constate qu'il y a deux comportements très différents suivant que le matériau est **ductile** ou **fragile**.
Dans la zone élastique la

loi de proportionnalité entre la contrainte tangentielle maximum de torsion $\tau_{\max i} = \frac{C}{I_G} R$ et la distorsion γ_{maxi} des génératrices de l'éprouvette est la loi de **HOOKE** en torsion.
Comme pour le cisaillement simple elle s'écrit:

$$\boxed{\tau_{\max i} = G\gamma_{\max i}}$$

où G est le module d'élasticité transversale ou module de COULOMB du matériau.
La contrainte tangentielle maximum de torsion à la fin de la zone élastique est la limite élastique au cisaillement du matériau. Elle se note $\tau_e$ou Rg.

N.B.

❑ L'essai de torsion est le seul qui permette une détermination correcte du module de COULOMB G et de la limite élastique au cisaillement τ_e du matériau.

❑ On montre que le module de YOUNG E, le module de COULOMB G, et le coefficient de POISSON ν sont, lorsque le matériau est isotrope, liés par la relation:

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

❑ On constate que pour un matériau fragile les limites élastiques en traction et cisaillement sont sensiblement les mêmes tandis que pour un matériau ductile:

$$\boxed{\tau_e \approx \frac{\sigma_e}{2}}$$

2.4.. Rotations des sections droites:

Expression de la rotation d'une section droite d'abscisse z. De la relation $C = G\theta'_x I_G$ on tire à abscisse x:

$$\theta_x = \frac{M_x}{GI_G} x$$

Expression de la rotation maximum (celle de la section d'abscisse L):

$$\boxed{\theta_x^{\max i} = \frac{M_x L}{GI_G}}$$

2.5. Coefficient de sécurité:

Il se calcule par la relation:

$$\boxed{\alpha = \frac{\tau_e}{\tau_{\max i}}}$$

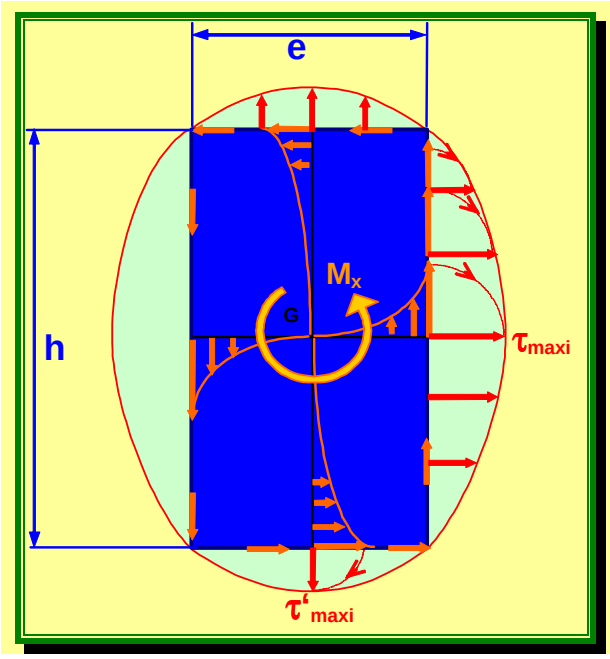
N.B. On impose quelquefois une condition de rigidité pour les arbres de transmission:

$$\theta'_x \leq 0.25° / m$$

3. Torsion de SAINT-VENANT (sections droites non circulaires):

On constate expérimentalement que les sections droites ne restent pas planes après application du couple de torsion. Elles subissent un **gauchissement** axial qui peut entraîner, si celui-ci est empêché, l'apparition de contraintes normales dans la section droite. L'hypothèse de NAVIER-BERNOULLI n'est donc plus vérifié, le principe de l'indépendance des effets des forces non plus, seule la théorie de l'élasticité peut résoudre le problème.

Torsion des Sections Rectangulaires :



La figure ci-contre permet de visualiser la répartition des contraintes tangentielles de torsion dans une barre à section rectangulaire.

On montre alors, en élasticité, que:

1°) La relation entre le moment de torsion et l'angle unitaire de torsion est:

$$\boxed{\theta_x' = \frac{M_x}{GJ}}$$

où J est le **moment d'inertie de torsion** de la section rectangulaire. Il se calcule par la relation suivante:

$$\boxed{J = k_1 e^3 h}$$

où k_1 est une fonction du rapport h/e donné dans le tableau suivant:

h/e	1	1.5	2	3	4	5	6	8	10	∞
k_1	0.141	0.196	0.229	0.263	0.281	0.291	0.299	0.307	0.313	1/3
k_2	0.208	0.231	0.246	0.267	0.282	0.291	0.299	0.307	0.313	1/3
k_3	1.000	0.859	0.795	0.753	0.745	0.744	0.743	0.742	0.742	0.742

N.B. Lorsque la section droite est circulaire la relation entre le moment de torsion et l'angle unitaire de torsion est:

$$\boxed{\theta_x' = \frac{M_x}{GI_G}}$$

Le moment d'inertie de torsion est alors le **moment d'inertie polaire** du cercle ($\frac{\pi D^4}{32}$).

2°) <u>La contrainte maximum de torsion (au milieu des grands côtés du rectangle) vaut:</u>

$$\boxed{\tau_{\max i} = \frac{|M_x|}{k_2 e^2 h}}$$

où k_2 est une fonction du rapport h/e donné dans le tableau précédent.

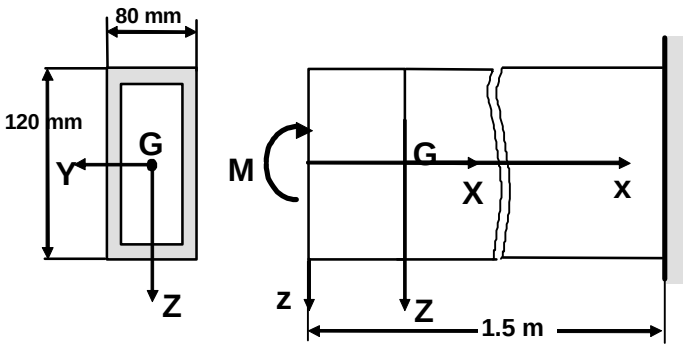
3°) <u>La contrainte au milieu des petits côtés du rectangle vaut:</u>

$$\boxed{\tau'_{\max i} = k_3 \tau_{\max i}}$$

où k_3 est une fonction du rapport h/e donné dans le tableau précédent.

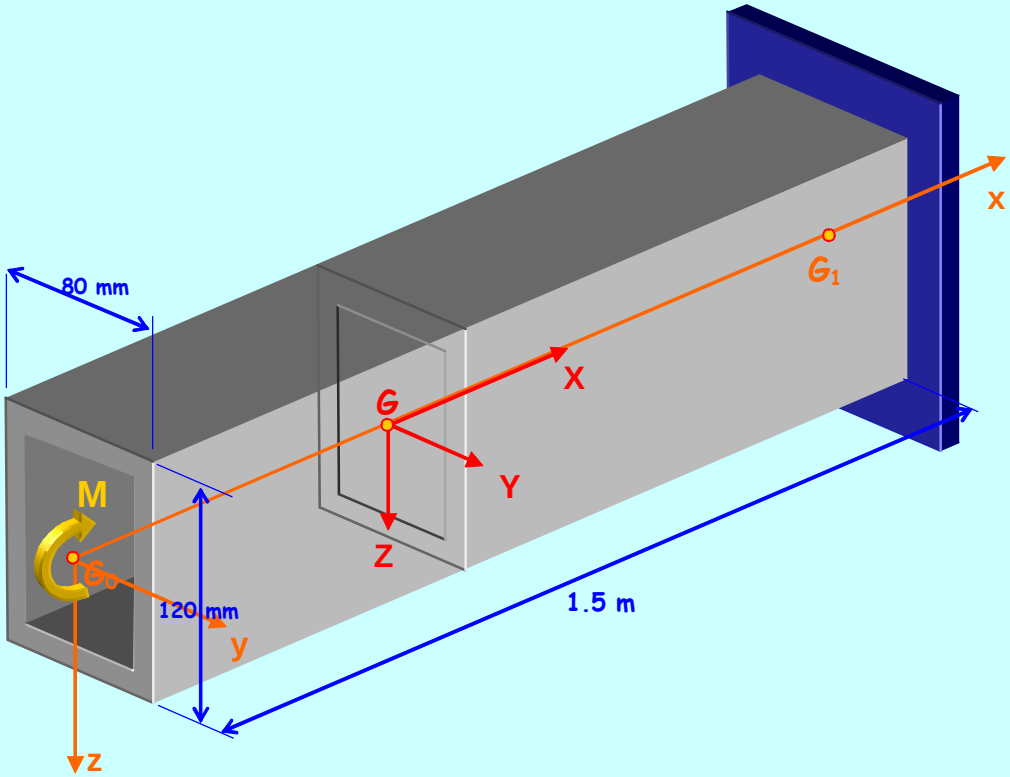
FLEXION

PROBLÈME N°17



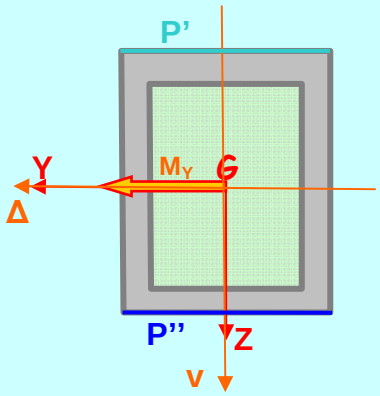
Considérons la poutre ci-contre soumise à un moment de flexion M. La section droite de la poutre est un tube rectangulaire en aluminium d'épaisseur 8 mm. Calculer la valeur du moment M que peut supporter la poutre, sachant que $\sigma_e = \sigma_e^{'} = 200\,\text{MPa}$ et que le coefficient de sécurité vaut 1.25. Calculer le rayon de courbure de la ligne moyenne sachant que E=70 GPa et la flèche maximum sachant que la longueur de la poutre est de 1.5 m.

RÈPONSES N°17



Le moment de flexion My=+M est constant tout au long de la poutre G_0G_1. Toutes les sections sont donc équidangereuses.

Considérons une section quelconque G. les axes ,Y et Z sont principaux d'inertie pour la section tubulaire G (axes de symétrie). Le moment de flexion M_Y=+M est porté par l'axe principal Y : Nous sommes donc en présence de flexion pure plane. L'axe neutre Δ est donc confondu avec celui qui porte le moment fléchissant Y. L'ensemble des points P' et P'' qui sont les plus éloignés de l'axe neutre (v_{maxi}) sont les points les plus contraints. Les points P' sont comprimés et P'' tendus.



$$\sigma_{xx}^{P'} = \frac{M_Y}{I_Y} Z^{P'} = \left| \frac{M}{\frac{80.120^3}{12} - \frac{64.104^3}{12}} (-60) \right| \leq \frac{\sigma_{e'}}{\alpha} \;;$$

$$\sigma_{xx}^{P''} = \frac{M_Y}{I_Y} Z^{P''} = \frac{M}{\frac{80.120^3}{12} - \frac{64.104^3}{12}} 60 \leq \frac{\sigma_e}{\alpha}$$

D'où : $\frac{M}{\frac{80.120^3}{12} - \frac{64.104^3}{12}} 60 \leq \frac{200}{1,25}$ **M≤14,7 kNm**

L'équation de la déformée est donnée par : $w'' = -\frac{M_Y}{EI_Y} = -\frac{M}{EI_Y} \quad \Rightarrow \quad w'' EI_Y = -M$

In tégrons 2fois : $w'' EI_Y = -M \qquad w' EI_Y = -Mx + C_1$

$$wEI_Y = \frac{-Mx^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Conditions limites pour calculer les constantes d'intégration : en G_1 : $\begin{cases} x = l \rightarrow w = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{Ml^2}{2} \\ x = l \rightarrow w' = 0 \Rightarrow C_1 = Ml \end{cases}$

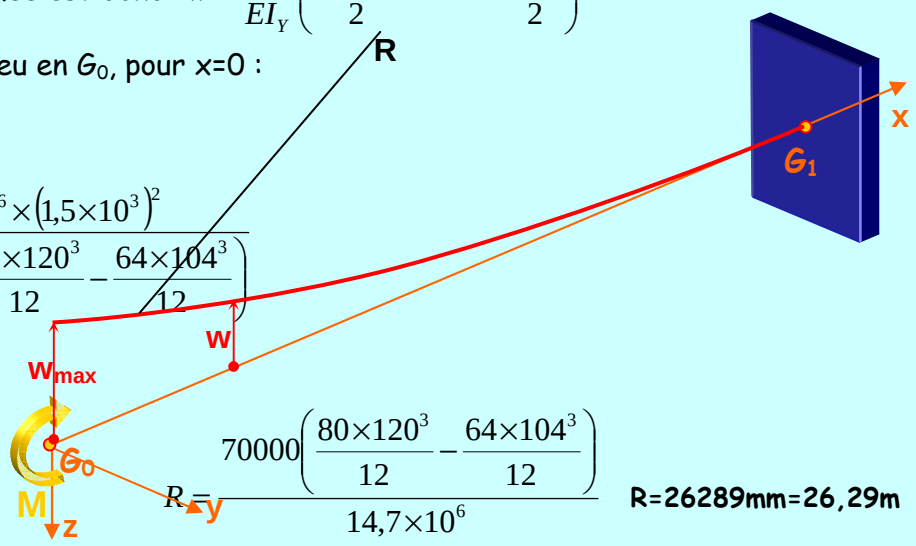
L'équation de la déformée est donc : $w = \frac{1}{EI_Y}\left(\frac{-Mx^2}{2} + Mlx - \frac{Ml^2}{2}\right)$

La flèche maximum a lieu en G_0, pour x=0 :

$$w_{max} = -\frac{Ml^2}{2EI_Y}$$

$$w_{max} = -\frac{14,7\times10^6 \times (1,5\times10^3)^2}{2\times70000\times\left(\frac{80\times120^3}{12} - \frac{64\times104^3}{12}\right)}$$

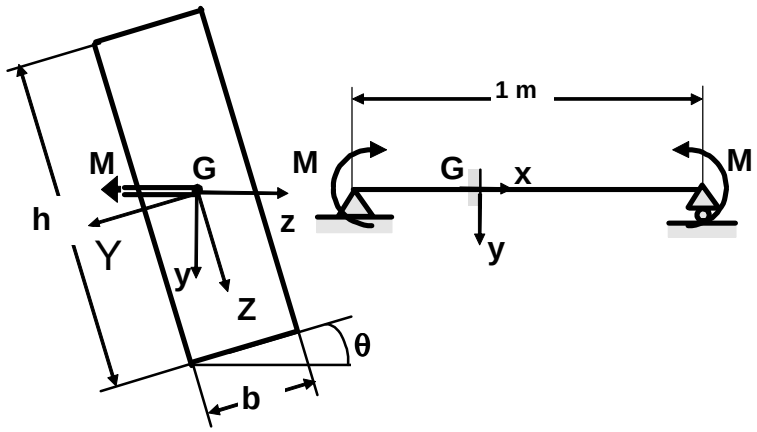
w_{max}=-42,79mm



$$\frac{1}{R} \approx w'' \Rightarrow R = \frac{EI_Y}{M} \qquad R = \frac{70000\left(\frac{80\times120^3}{12} - \frac{64\times104^3}{12}\right)}{14,7\times10^6}$$

R=26289mm=26,29m

PROBLÈME N°18



1°) La section droite de la poutre est un rectangle (b=30 mm et h=90 mm). La longueur de la poutre est de 1 m. Le module de YOUNG vaut 200 GPa. La contrainte normale maximum ne peut dépasser 120 MPa. Calculer :

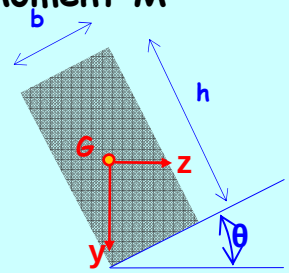
a) le moment fléchissant maximum quand θ = 0°, 30°, 90°.

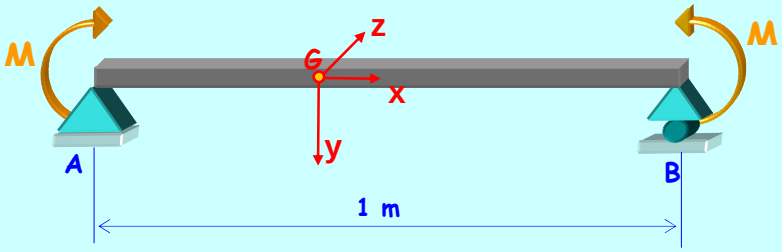
b) les flèches quand on applique ces moments de flexion à chaque extrémité.

2°) La section droite est un UAP. Le moment de flexion appliqué vaut M = 5000 Nm. Déterminer les dimensions du UAP qui convient dans chacun des trois cas (θ=0°, 30°, 90°) si la contrainte normale maximale vaut 120 MPa.

RÈPONSES N°18

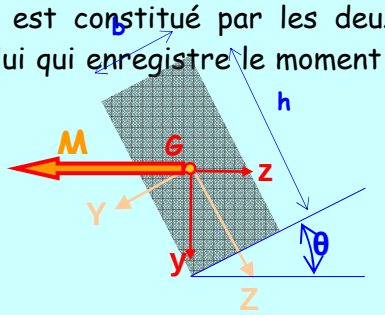
1) Moment M





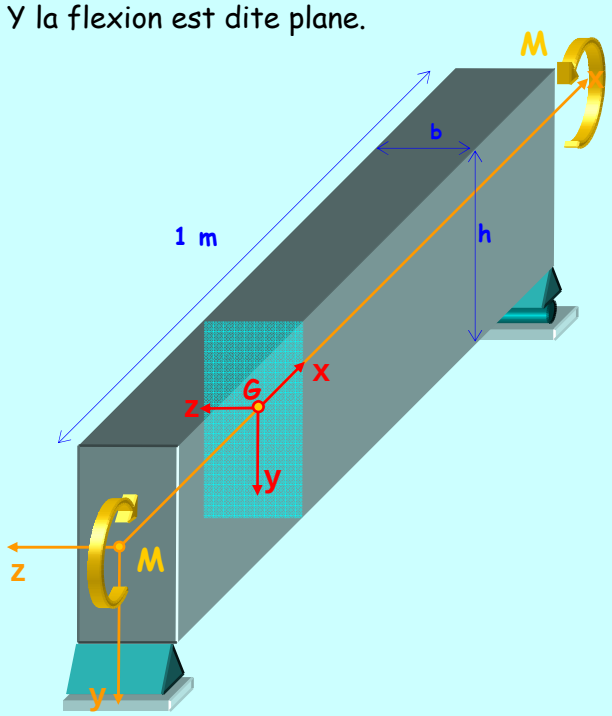
Le système est autoéquilibré, les réactions en A et B sont nulles. Dans la section G le Torseur de Section se réduit a une seule composante du moment suivant l'axe z : M_z=-M. Toutes les sections G sont donc équidangereuses. Nous sommes donc en présence de Flexion Pure.

Placons nous à une section quelconque G. La section étant rectangulaire, nous savons que le système d'axex principaux est constitué par les deux axes de symétrie. Orientons l'axe principal Y comme étant celui qui enregistre le moment d'inertie maximum, et déduisons l'axe Z par une rotation de +π/2.

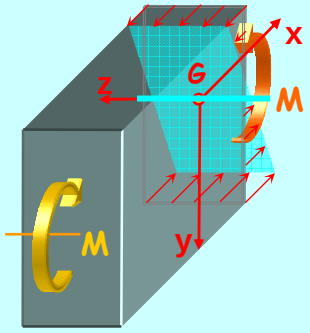


a) θ=0°

La poutre est dans ce cas placé sur champ. Le moment de flexion étant porté par l'axe principal Y la flexion est dite plane.



L'axe neutre Δ est donc confondu avec celui qui porte le moment. C'est l'axe de rotation de la section.

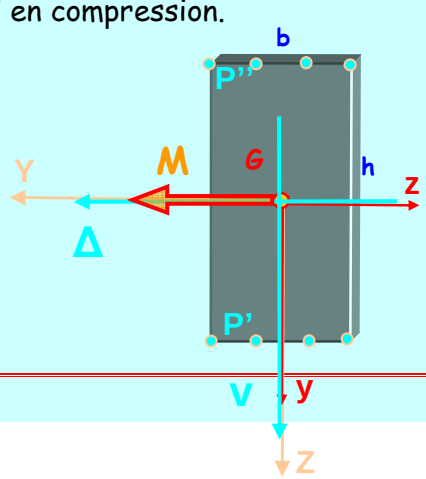


Les points les plus éloignés de l'axe neutre x_v^{maxi} sont les plus contraints.
Les points P' sont les plus contraints en traction, et P'' en compression.

$$\sigma_{xx}^{P'} = \frac{M_Y}{I_Y} Z^{P'} = \frac{M}{\frac{b.h^3}{12}} \left(\frac{h}{2}\right) \leq \sigma_e$$

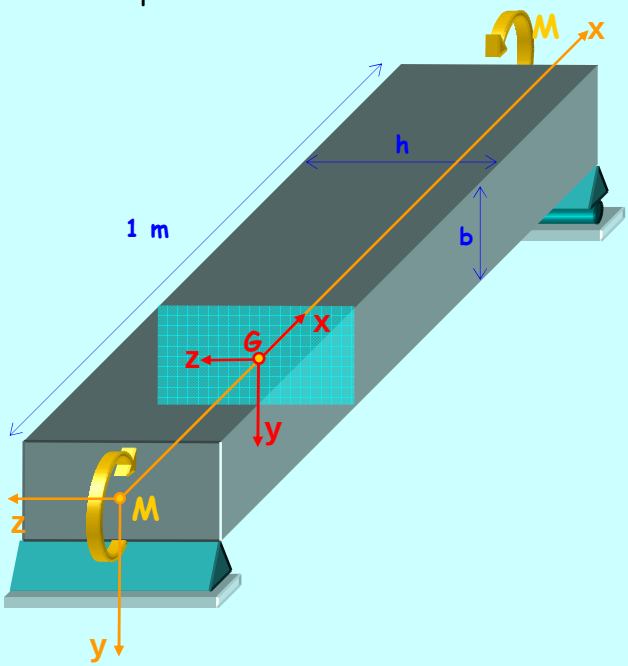
$$M \leq \frac{30 \times 90^2 \times 120}{6}$$

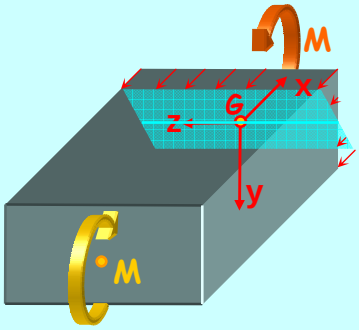
M=4,86 kNm



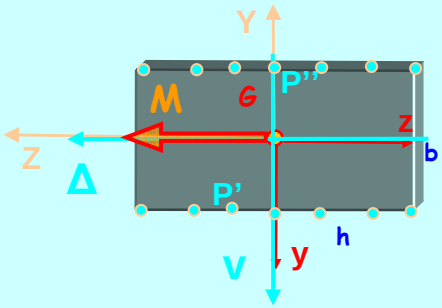
a) θ=90°

La poutre est dans ce cas placé sur plat. Le moment de flexion étant porté par l'axe principal Z la flexion est dite plane.





Le détail des calculs est similaire au cas précédent



$$\sigma_{xx}^{P'} = -\frac{M_Z}{I_Z} Y^{P'} = -\frac{M}{\frac{h.b^3}{12}}\left(-\frac{b}{2}\right) \leq \sigma_e$$

$$M \leq \frac{90 \times 30^2 \times 120}{6}$$ **M=1,62 kNm**

a) θ=30°

La poutre est maintenant incliné de 30°.

Le moment de flexion M n'étant pas porté par l'axe principal Y ni par l'axe principal Z la flexion est dite déviée.

Afin de trouver les points les plus contraints, il nous faut rechercher l'axe neutre Δ.

L'axe neutre qui est l'axe de rotation représente le lieu des points de la section où la contrainte normale σ_{xx}=0.

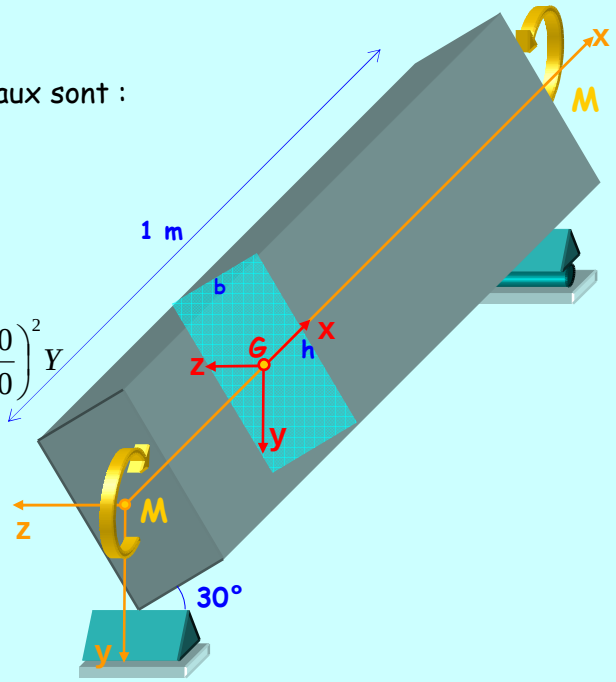
Dans les axes principaux son équation est :

$$Z = \frac{M_Z}{M_Y}\frac{I_Y}{I_Z}Y$$

Les composantes du moment sur les axes principaux sont :

$M_Y = M\cos 30$ $\qquad$ $M_Z = -M\sin 30$

D'où :



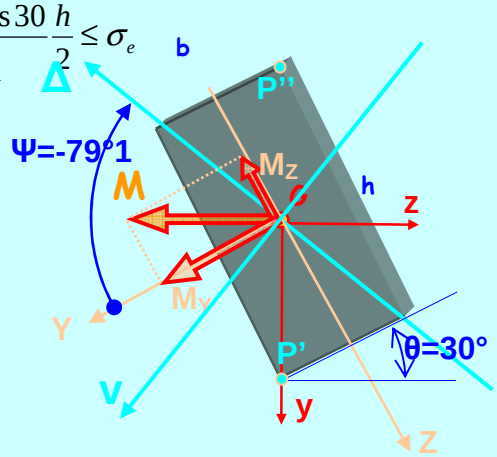
$$Z = \frac{-M\sin 30}{M\cos 30}\frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{hb^3}{12}}Y = -\tan 30\left(\frac{h}{b}\right)^2 Y = -\tan 30\left(\frac{90}{30}\right)^2 Y$$

Equation de l'axe neutre : $\qquad Z = -5{,}196Y$

$$\hat{\psi} = \left(\vec{Y},\vec{\Delta}\right) = -79°1$$

Deux points les plus contraints P', P''.

$$\sigma_{xx}^{P'} = -\frac{M_Z}{I_Z}Y^{P'} + \frac{+M_Y}{I_Y}Z^{P'} \le \sigma_e \qquad -\frac{-M\sin 30}{\frac{hb^3}{12}}\frac{b}{2} + \frac{+M\cos 30}{\frac{bh^3}{12}}\frac{h}{2} \le \sigma_e$$



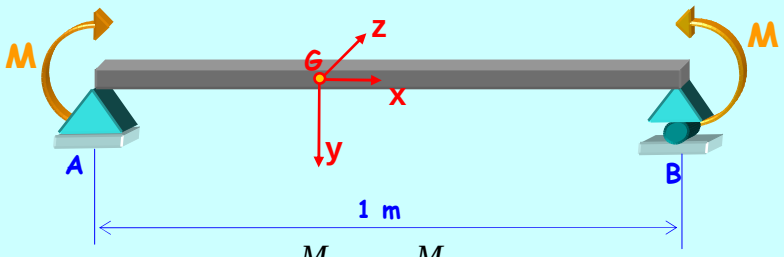
$$M \le \frac{\sigma_e}{6\left(\frac{\sin 30}{hb^2} + \frac{\cos 30}{bh^2}\right)} \qquad M \le \frac{120}{6\left(\frac{\sin 30}{90\times 30^2} + \frac{\cos 30}{30\times 90^2}\right)}$$

M=2,05 kNm

C'est une valeur comprise entre les deux extremes des cas précédents.

Flèche :

b) θ=0°



L'équation de la déformée est donnée par : $v'' = \frac{M_Z}{EI_Z} = -\frac{M}{EI_z} \quad \Rightarrow \quad v''EI_Z = -M$

In tégrons 2fois : $v''EI_z = -M$

$v'EI_z = -Mx + C_1$

$$vEI_z = \frac{-Mx^2}{2} + C_1x + C_2$$

Conditions limites pour calculer les constantes d'intégration : en: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow w = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ x = l \rightarrow w = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{Ml}{2} \end{cases}$

L'équation de la déformée est donc : $v = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{-Mx^2}{2} + \frac{Ml}{2}x\right)$

La flèche maximum a lieu en x=l/2 : $v_{max} = \frac{Ml^2}{8EI_z} = \frac{4{,}86.10^6 \times (1.10^3)^2 \times 12}{8 \times 200.10^3 \times 30 \times 90^3}$ **v_{max}=1,67mm**

b) θ=90°

Le calcul de la flèche est similaire au cas précédent :

$$w_{max} = -\frac{Ml^2}{8EI_y} = -\frac{1{,}62.10^6 \times (1.10^3)^2 \times 12}{8 \times 200.10^3 \times 90 \times 30^3}$$ **w_{max}=5 mm**

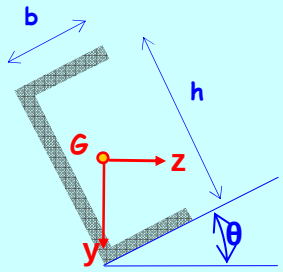
b) θ=30°

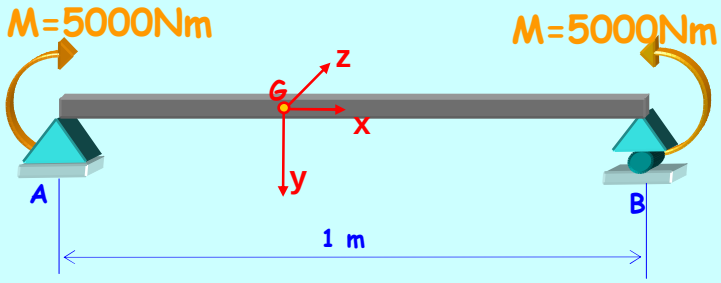
Nous appliquons le principe de superposition : $f_{max} = \sqrt{v^2 + w^2}$

$$f_{max} = \frac{l^2}{8E}\sqrt{\left(\frac{M_Y}{I_Y}\right)^2 + \left(\frac{M_Z}{I_Z}\right)^2} \qquad M_Y = M\cos 30 \qquad M_Z = -M\sin 30$$

$$f_{max} = \frac{(1.10^3)^2}{8 \times 200.10^3}\sqrt{\left(\frac{2{,}05.10^6 \cos 30 \times 12}{30 \times 90^3}\right)^2 + \left(\frac{2{,}05.10^6 \sin 30 \times 12}{\times 90 \times 30^3}\right)^2}$$ **f_{max}=3,22 mm**

2) UAP :

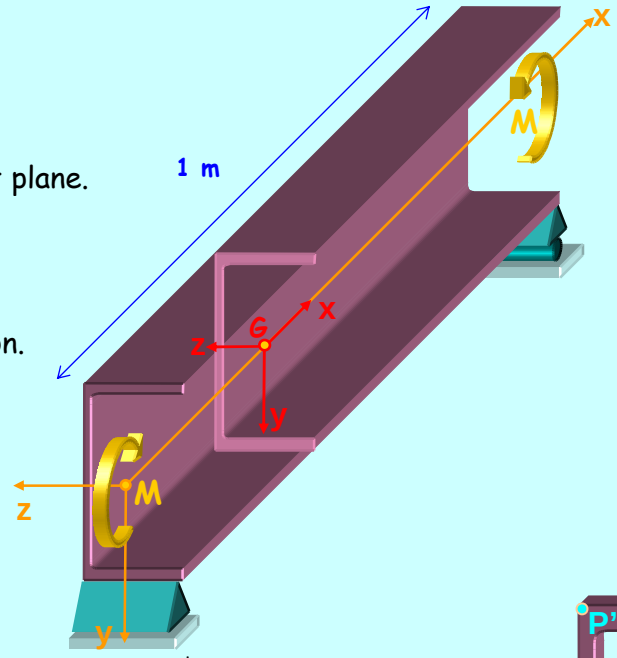




a) θ=0°

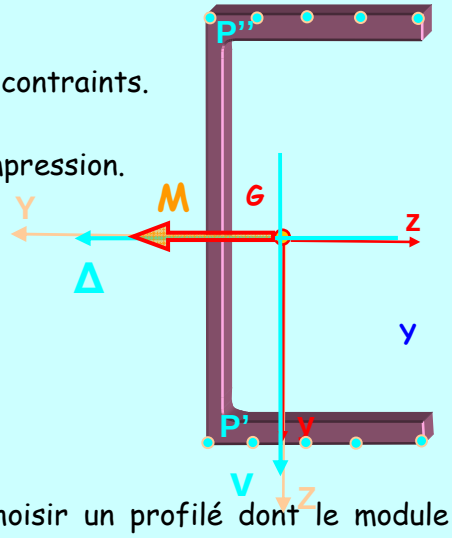
Le moment de flexion étant porté par l'axe principal Y la flexion est plane.

L'axe neutre Δ est donc confondu avec celui qui porte le moment.
C'est l'axe de rotation de la section.



Les points les plus éloignés de l'axe neutre x_v^{maxi} sont les plus contraints.

Les points P' sont les plus contraints en traction, et P'' en compression.



$$\sigma_{xx}^{P'} = \frac{M_Y}{I_Y} Z^{P'} = \frac{M}{I_Y} Z^{P'} \leq \sigma_e$$

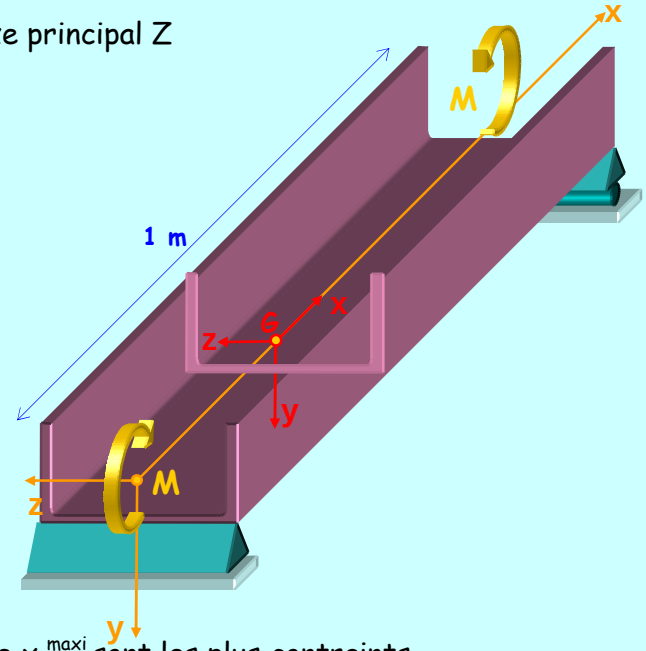
$$\frac{I_Y}{Z^{P'}} \geq \frac{M}{\sigma_e} \qquad \frac{I_Y}{Z^{P'}} \geq \frac{5000.10^3}{120} \qquad \frac{I_Y}{Z^{P'}} \geq 41{,}66cm^3$$

En se référant à l'annexe des profils UAP nous devons choisir un profilé dont le module d'inertie de flexion est supérieur à 41,66cm3

Le choix du profilé sera **UAP100** dont le module d'inertie de flexion est 41,9cm^3 .

a) θ=90°

Le moment de flexion étant porté par l'axe principal Z
la flexion est plane.

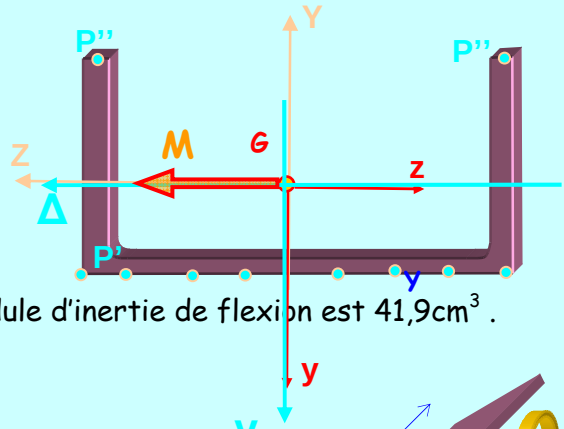


L'axe neutre Δ est donc confondu
avec celui qui porte le moment.
C'est l'axe de rotation de la section.

Les points les plus éloignés de l'axe neutre x_v^{maxi} sont les plus contraints.
Les points P' sont les plus contraints en traction, et P'' en compression.

$$\sigma_{xx}^{P''} = -\frac{M_Z}{I_Z} Y^{P''} = \frac{M}{I_Z} Y^{P''} \leq \sigma_e$$

$$\frac{I_Z}{Z^{P''}} \geq \frac{M}{\sigma_e} \qquad \frac{I_Z}{Z^{P''}} \geq 41{,}66 cm^3$$



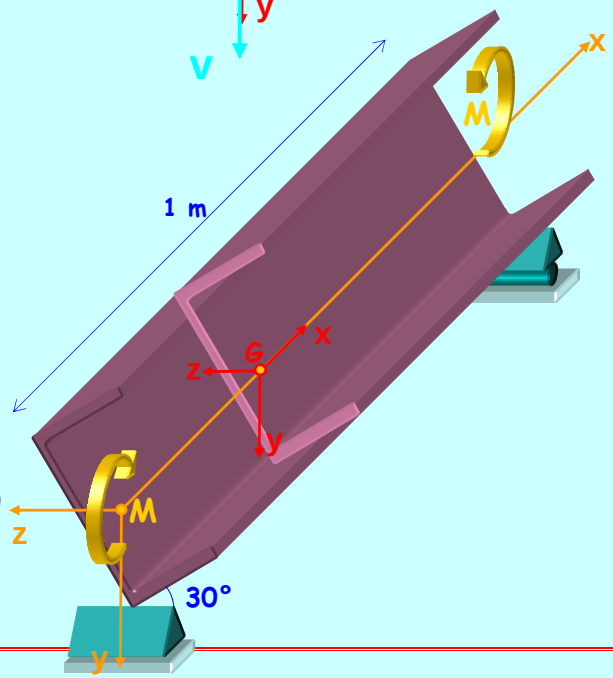
Le choix du profilé sera **UAP250** dont le module d'inertie de flexion est 41,9cm^3 .

a) θ=30°

Le profilé est maintenant incliné de 30°.

Nous sommes en présence
d'une flexion déviée
car le moment n'est plus porté
par un axe principal d'inertie.

Nous savons que le choix
devra etre compris entre les UAP100 et UAP250
compte tenu des cas étudiés pré&cédement.



Faisons le choix d'un UAP175 :

L'axe neutre qui est l'axe de rotation représente le lieu des points de la section où la contrainte normale σ_{xx}=0.

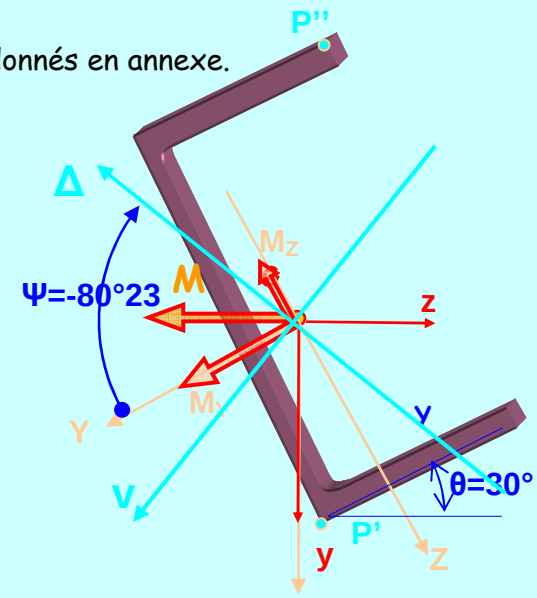
Dans les axes principaux son équation est :

$$Z = \frac{M_Z}{M_Y}\frac{I_Y}{I_Z}Y$$

Les composantes du moment sur les axes principaux sont :

$M_Y = M\cos 30$ $\qquad$ $M_Z = -M\sin 30$

Les valeurs des moments d'inertie principaux sont donnés en annexe.



$$Z = \frac{-M\sin 30}{M\cos 30}\frac{I_Y}{I_Z}Y = -\tan 30\frac{1272}{126{,}4}Y$$

Equation de l'axe neutre : $\qquad Z = -5{,}81Y$

$$\hat{\psi} = \left(\vec{Y},\vec{\Delta}\right) = -80°23$$

Deux points les plus contraints P', P''. :

$$P'_{/YZ}\begin{cases}21{,}2mm\\87{,}5mm\end{cases} \qquad P''_{/YZ}\begin{cases}-48{,}8mm\\-87{,}5mm\end{cases}$$

P' est en traction, et P'' en compression. Le matériau étant symétrique le point P'' est le plus contraint

$$\sigma_{xx}^{P''} = \left|-\frac{M_Z}{I_Z}Y^{P''} + \frac{+M_Y}{I_Y}Z^{P''}\right| \le \sigma_{e'} \qquad \left|-\frac{-5000.10^3\sin 30}{126{,}4.10^4}(-48{,}8) + \frac{5000.10^3\cos 30}{1272.10^4}(-87{,}5)\right| \le 120$$

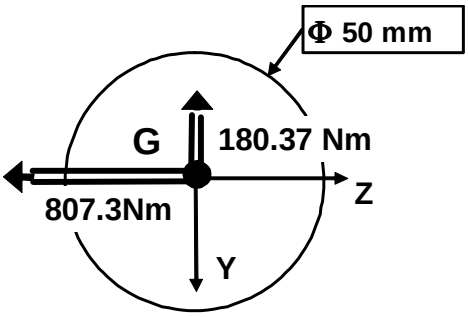
$\sigma_{xx}^{P''} = 126 \le 120$ $\qquad$ Le profilé ne convient pas.

Reprenons les calculs avec le profilé UAP200. L'approche est identique :

$$\sigma_{xx}^{P''} = \left|-\frac{M_Z}{I_Z}Y^{P''} + \frac{+M_Y}{I_Y}Z^{P''}\right| \le \sigma_{e'} \qquad \left|-\frac{-5000.10^3\sin 30}{169{,}7.10^4}(-52{,}8) + \frac{5000.10^3\cos 30}{1946.10^4}(-1005)\right| \le 120$$

La condition est vérifiée, **Choix du profilé : UAP200**

PROBLÈME N° 19



Un arbre de diamètre 50 mm est soumis à un moment de flexion dont les composantes dans G,I,II sont :

M_Y= - 180.37 Nm

M_Z= - 807.3 Nm

Calculer :

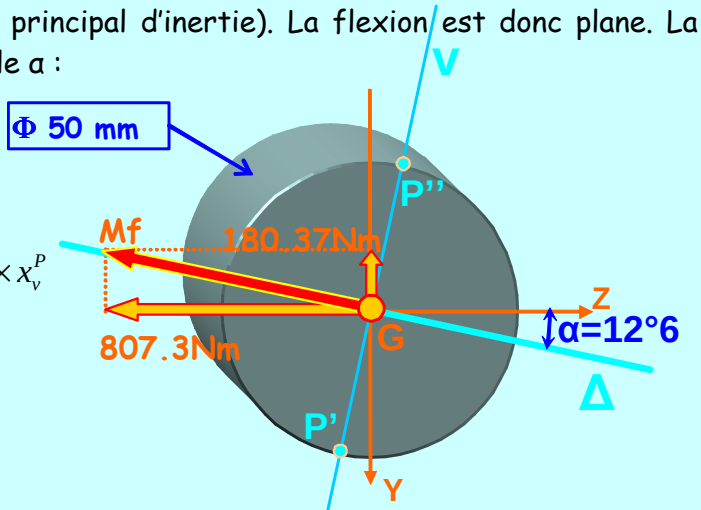
1°) la position de l'axe neutre de flexion.

2°) Les contraintes normales extrêmes.

RÈPONSES N°19

Le moment résultant Mf est porté par un axe principal d'inertie (Pour une section circulaire, tout diamètre étant axe de symétrie est principal d'inertie). La flexion est donc plane. La position de l'axe neutre est donné par l'angle α :

$$\alpha = Arc\tan\left(\frac{180,37}{807,3}\right) = 12°6$$



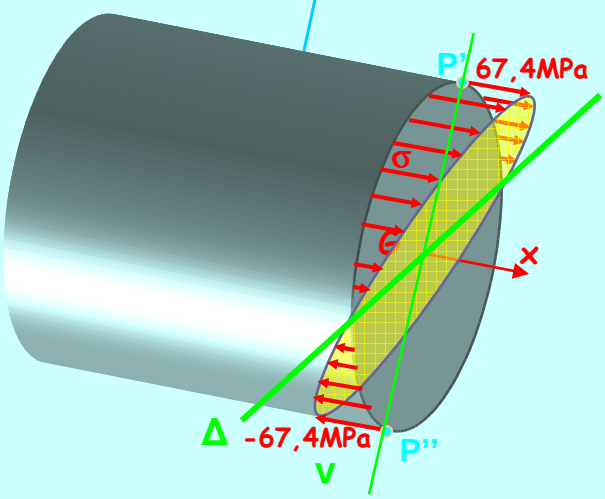
$$\sigma_{xx}^{P} = \frac{M_\Delta}{I_{\Delta\Delta}} x_v^P = \frac{-\sqrt{180,37^2 + 807,31^2}.10^3}{\pi \times 50^4} 64 \times x_v^P$$

$$P'_{/\Delta v}\begin{cases} 0 \\ -25mm \end{cases} \qquad P''_{/\Delta v}\begin{cases} 0 \\ 25mm \end{cases}$$

Le point P' est en traction :

$$\sigma_{xx}^{P'} = \frac{-\sqrt{180,37^2 + 807,31^2}.10^3}{\pi \times 50^4} 64 \times (-25)$$

$\sigma_{xx}^{P'}$=67,4MPa

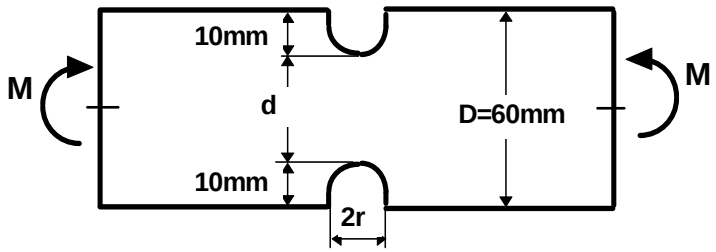


Le point P'' est en compression :

$$\sigma_{xx}^{P''} = \frac{-\sqrt{180,37^2 + 807,31^2}.10^3}{\pi \times 50^4} 64 \times (25)$$

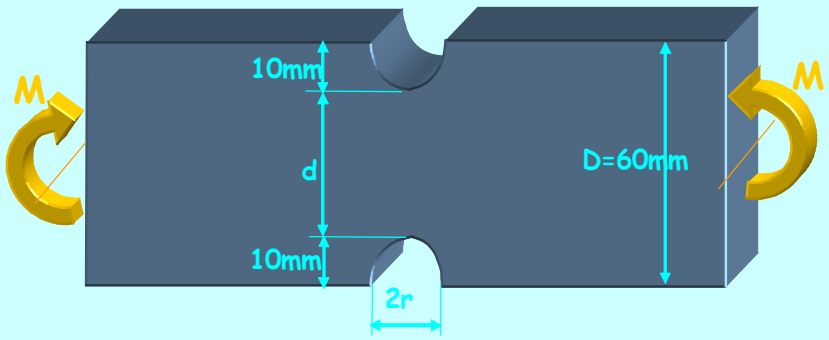
$\sigma_{xx}^{P''}$=-67,4MPa

PROBLÈME N°20



Une barre dont la largeur est de 60 mm et l'épaisseur de 9 mm est entaillée comme indiquée sur la figure ci contre. Elle est soumise à un moment de flexion de 180 Nm. Calculer le rayon r pour que la contrainte normale maximum ne dépasse pas 150 MPa.

RÈPONSES N°20



Il y a concentration de contraintes compte tenu du changement brusque de la section.

Nous devons chercher le facteur de concentration K à l'aide des abaques fournis en annexe.

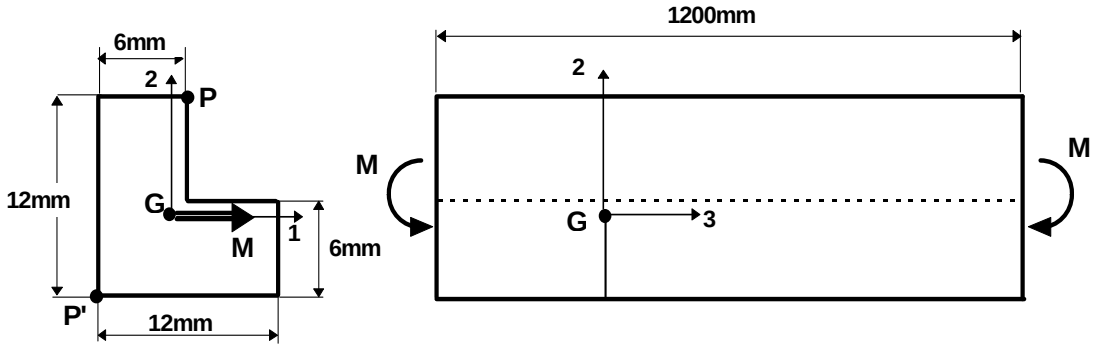
La contrainte normale maxi dans la section la plus faible, nous est donnée par :

$$\sigma_{xx} = \frac{180.10^3}{\frac{9\times 40^3}{12}} \times 20 = 75MPa = \sigma_{nom}$$

$\sigma_{\max i} = K\sigma_{nom}$ d'où la valeur de K : $K = \frac{150}{75} = 2$

A l'aide de l'annexe 3 : $K = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{D}{d} = \frac{60}{40} = 1{,}5 \\ \frac{r}{d} = 0{,}12 \end{cases}$ $r = 4{,}8mm$ **r=4,8 mm**

PROBLÈME N°21



Une barre est soumise à deux couples de flexion M à ses extrémités.

1°) <u>Etude de la section droite.</u> Déterminer:

a) La position du centre de gravité de la section droite.

b) Les moments et produit d'inertie de la section dans le repère (G,y,z).

c) Les moments d'inertie principaux et la position des axes principaux de la section.

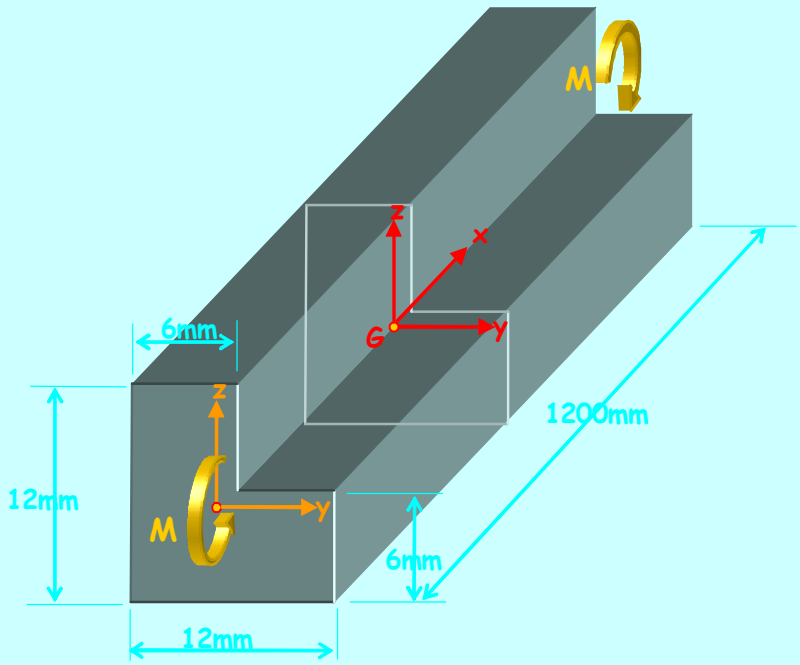
2°) <u>Etude de la flexion.</u>

a) Déterminer la position angulaire de l'axe neutre.

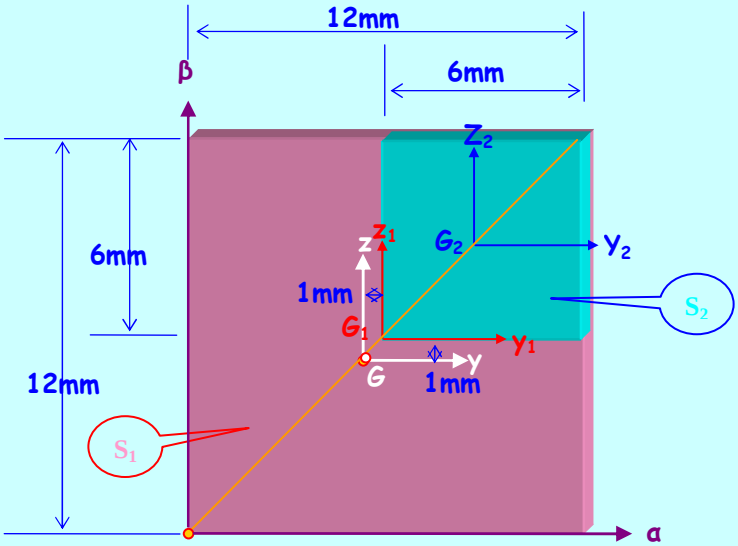
b) Mettre en place sur la figure le point P le plus tendu et le point P' le plus comprimé et donner leurs coordonnées dans le repère (G,Y,Z).

c) Calculer la valeur du moment M que l'on peut appliquer sans que les contraintes maximum ne dépassent +75 MPa en traction (au point P) et -90 MPa en compression (au point P').

RÈPONSES N°21



1°) Etude de la section droite



Décomposons la surface initiale S en deux surfaces carrées S_1, S_2 , et remarquons que la surface S possède un axe de symétrie.

a) La position du centre de gravité de la section droite.

En se referent au cours sur les inerties:

$$G_{1/\alpha\beta}\Big|\begin{matrix}6\\6\end{matrix} \qquad G_{2/\alpha\beta}\Big|\begin{matrix}9\\9\end{matrix} \qquad A_1=144mm^2 \qquad A_2=36mm^2$$

$$X\alpha_G = \frac{X\alpha_{G1}A_1 + X\alpha_{G2}A_2}{A_1 + A_2} \Rightarrow \frac{6\times144+9\times36}{144+36} \qquad G_{/\alpha\beta}\Big|\begin{matrix}5mm\\5mm\end{matrix}$$

b) Les moments et produit d'inertie de la section dans le repère (G,y,z).

S_i	S_1	S_2
$A_i(mm^2)$	144	36
$G_i/_{yz}(mm)$	1	4
	1	4
$I_{yiyi}(mm^4)$	12^3	$6^4/12$
$I_{zizi}(mm^4)$	12^3	$6^4/12$
$I_{yizi}(mm^4)$	0	0

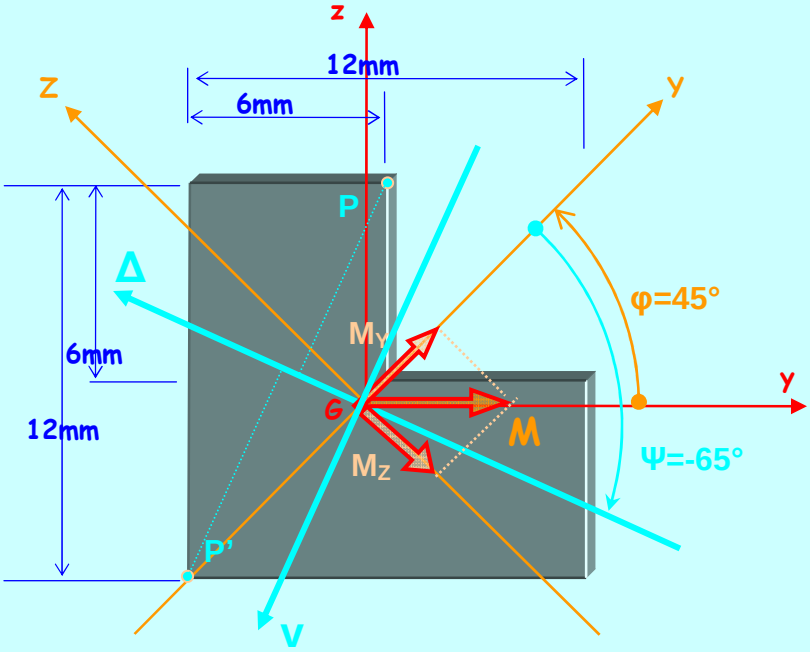
$$\begin{cases} I_{yy}^{S} = I_{yy}^{S_1} + I_{yy}^{S_2} \\ I_{yz} = I_{yz}^{S_1} + I_{yz}^{S_2} \end{cases} \quad avec \quad \begin{cases} I_{yy}^{Si} = I_{y_i y_i}^{S_i} + z_{Gi}^2 A \\ I_{yz}^{Si} = I_{y_i z_i}^{S_i} + y_{Gi} z_{Gi} A_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{yy}^{S} = 1188 mm^4 \\ I_{zz}^{S} = 1188 mm^4 \\ I_{yz}^{S} = -432 mm^4 \end{cases}$$

c) Les moments d'inertie principaux et la position des axes principaux de la section.

$$\hat{\varphi} = 45° = \left(\vec{y}, \vec{Y}\right) \text{ car axe de symétrie}$$

$$I_Y^Z = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{yy} - I_{zz}\right)^2 + 4I_{yz}^2} \quad \begin{cases} I_Z = 756 mm^4 \\ I_Y = 1620 mm^4 \end{cases}$$

2°) Etude de la flexion.



L'axe neutre qui est l'axe de rotation représente le lieu des points de la section où la contrainte normale σ_{xx}=0.

Son équation est : $Z = \frac{M_Z}{M_Y}\frac{I_Y}{I_Z}Y$

Les composantes du moment sur les axes principaux sont :

$M_Y = M\cos 45$ $\qquad$ $M_Z = -M\sin 45$

Equation de l'axe neutre : $Z = \frac{-M\sin 45}{M\cos 45}\frac{1620}{756}Y = -\frac{1620}{756}Y \qquad Z = -2{,}14Y$

$$\hat{\psi} = \left(\vec{Y}, \vec{\Delta}\right) = -65°$$

Deux points les plus contraints P, P'. : $P_{/yz}\begin{cases}1mm\\7mm\end{cases}$ $P'_{/yz}\begin{cases}-5mm\\-5mm\end{cases}$

$P_{/YZ}\begin{cases}5{,}66mm\\4{,}24mm\end{cases}$ $P'_{/YZ}\begin{cases}-7{,}07mm\\0\end{cases}$ en utilisant les formules de rotation : $\begin{cases}Y = y\cos 45 + z\sin 45\\Z = -y\sin 45 + z\cos 45\end{cases}$

Le point P est le plus tendu :

$$\sigma_{xx}^{P} = -\frac{M_Z}{I_Z}Y^P + \frac{+M_Y}{I_Y}Z^P \le \sigma_e \qquad -\frac{-M\sin 45}{756}5{,}66 + \frac{M\cos 45}{1620}4{,}24 \le 75$$

Donc, pour qu'en traction la contrainte ne dépasse pas 75 MPa , il faut que :

M=10497 Nmm

Le point P' est le plus comprimé :

$$\sigma_{xx}^{P'} = \left|-\frac{M_Z}{I_Z}Y^{P'} + \frac{+M_Y}{I_Y}Z^{P'}\right| \le \sigma_{e'} \qquad \left|-\frac{-M\sin 45}{756}(-7{,}07)\right| \le 90$$

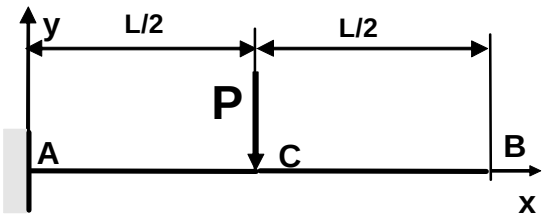
Donc, pour qu'en compression la contrainte ne dépasse pas 90 MPa , il faut que :

M=13610 Nmm

Conclusion :

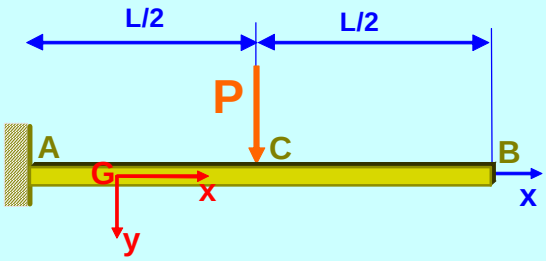
Le moment maximum que l'on peut appliquer est le moment le plus petit **M=10,5 kNm** car il respecte les conditions limites en traction et en compression alors que si on avait pris M=13,60 kNm, la condition en traction n'aurait pas été respectée.

PROBLÈME N°22



Calculez l'équation de la déformée. En déduire la flèche maximum.

RÈPONSES N°22



Pour calculer l'équation de la déformée, nous allons utiliser l'équation différentielle : $v'' = \frac{M_Z}{EI_Z}$

Il faut donc chercher le Torseur de Section en G.

Zone AC : $0 \langle x \langle \frac{L}{2}$

$$M_z = P\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

$$v''EI_z = -Px + \frac{PL}{2}$$

$$v'EI_z = -\frac{Px^2}{2} + \frac{PL}{2}x + C_1$$

$$vEI_z = -\frac{Px^3}{6} + \frac{PLx^2}{4} + C_1x + C_2$$

Zone CB : $\frac{L}{2} \langle x \langle L$

$$M_z = 0$$

$$v''EI_z = 0$$

$$v'EI_z = C_3$$

$$vEI_z = C_3x + C_4$$

Afin de déterminer les constantes d'intégrations, écrivons les conditions aux limites en A pour la zone AC et la continuité des flèches et des pentes en C pour les 2 zones.

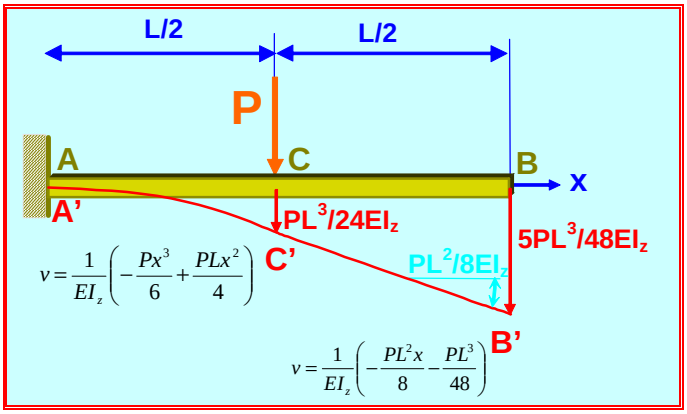
En A : $\begin{cases} x=0 \rightarrow v=0 \Rightarrow C_2=0 \\ x=0 \rightarrow v'=0 \Rightarrow C_1=0 \end{cases}$

En C : $\begin{cases} x=\dfrac{L}{2} \rightarrow v_{zoneAC}=v_{zoneCB} \Rightarrow C_4=-\dfrac{PL^3}{48} \\ x=\dfrac{L}{2} \rightarrow v'_{zoneAC}=v'_{zoneCB} \Rightarrow C_3=\dfrac{PL^2}{8} \end{cases}$

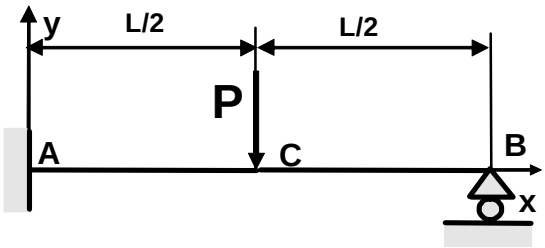
Les équations de la déformée sont donc : **Zone AC** : $v=\dfrac{1}{EI_z}\left(-\dfrac{Px^3}{6}+\dfrac{PLx^2}{4}\right)$ une cubique

Zone CB : $v=\dfrac{1}{EI_z}\left(\dfrac{PL^2x}{8}-\dfrac{PL^3}{48}\right)$ une droite.

La flèche maxi a lieu en B sur la zone CB pour x=L : $v_{\max}^{B}=\dfrac{5PL^3}{48EI_z}$

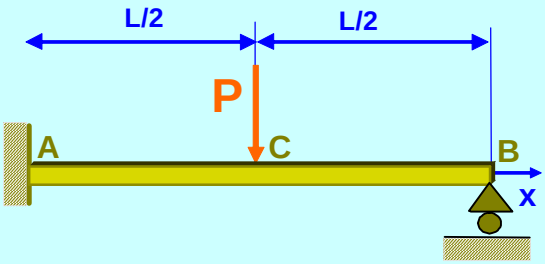


PROBLÈME N°23



Déterminez les actions d'appuis en A et B.

RÈPONSES N°23

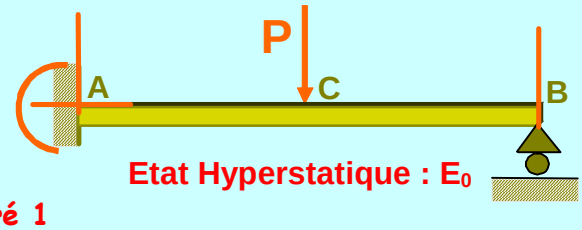


Nous sommes en présence d'un cas hyperstatique externe de degré 1, car le problème étant plan , nous disposons de 3 équations de statique et avons à déterminer 4 inconnues, 2 réactions en A ainsi qu'moment et une réaction en B.

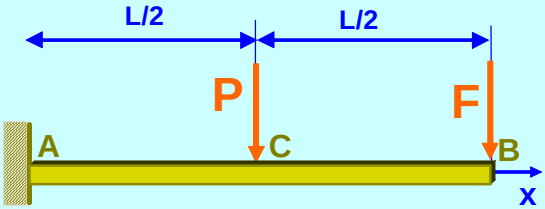
Détermination de l'hyperstaticité :

- Inconnues : 4
  - 3 réactions F_{AH}, F_{AV} et F_{BV}
  - 1 inconnue moment M_A

H = i-3n = 4 – 3 = 1 => **Hyperstatique de degré 1**



Etat Hyperstatique : E_0



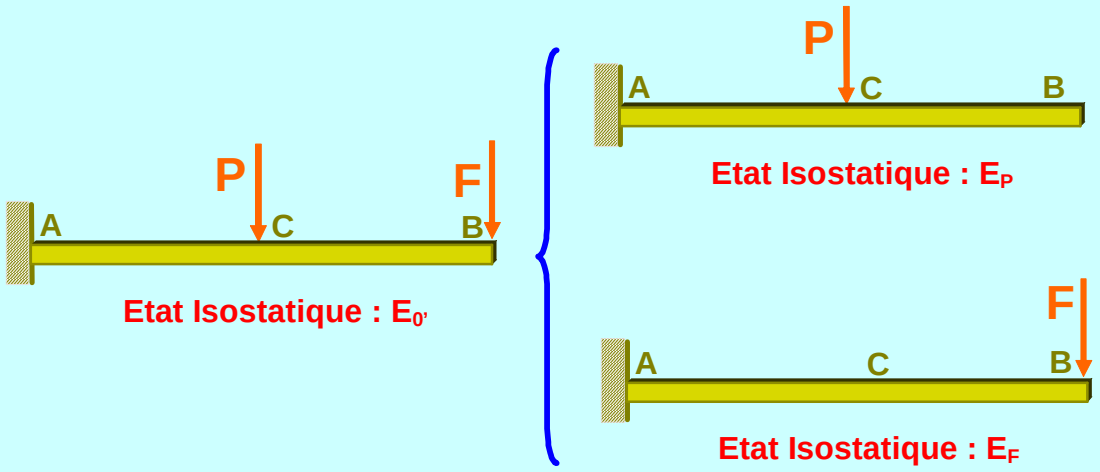
Etat Isostatique : $E_{0'}$

Pour lever l'indétermination provoquée par l'hyperstaticité, nous allons considérer un sytème équivalent isostatique.

Choissisons comme inconnue hyperstatique la réaction en B et construisons un système isostatique sans l'appui en B. Plaçons en B une force verticale F.

Les 2 Etats Isostatique et Hyperstatique sont équivalents si le déplacement vertical de la section B dans l'état isostatique est nul. $E_0 \equiv E_{0'} \left| \begin{array}{l} lorsque \\ \delta_{vB} = 0 \end{array} \right.$

Calcul du déplacement vertical de B dans l'état isostatique $E_{0'}$:



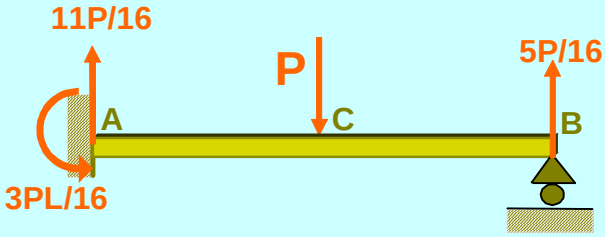
En appliquant le principe de superposition, l'état $E_{0'}$ peut etre décomposé en l'état E_P et E_F.

La flèche dans l'état $E_{0'}$ est la superposition des flèches dans les états E_P et E_F : $\delta_{vB}^{0'} = \delta_{vB}^{P} + \delta_{vB}^{F}$

La flèche dans l'état E_0 en B est la flèche nulle dans l' état $E_{0'}$: $\delta_{vB}^{0} = \delta_{vB}^{0'} = 0$ équation de déplacement qui nous donne la valeur de F qui s'identifie avec la réaction en B. $\delta_{vB}^{0} = \delta_{vB}^{P} + \delta_{vB}^{F} = 0$

Compte tenu des résultats du problème 6 : $\delta_{vB}^{P} = \dfrac{5PL^3}{48EI_z}$ et $\delta_{vB}^{F} = \dfrac{FL^3}{3EI_z}$

$$\delta_{vB}^{0} = \delta_{vB}^{P} + \delta_{vB}^{F} = 0 \qquad \frac{5PL^3}{48EI_z} + \frac{FL^3}{3EI_z} = 0 \qquad F = -\frac{5P}{16}$$



PROBLÈME N°24

On se propose ici d'étudier un plongeoir de piscine en flexion (voir photo ci-contre).

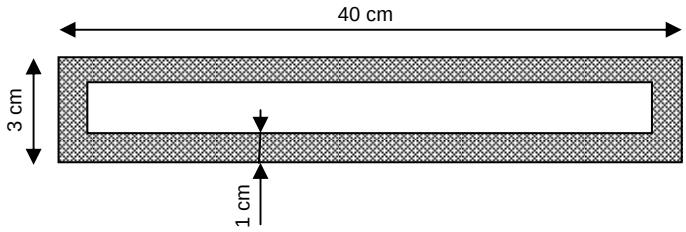
Caractéristiques planche de plongeoir :

Matériau :

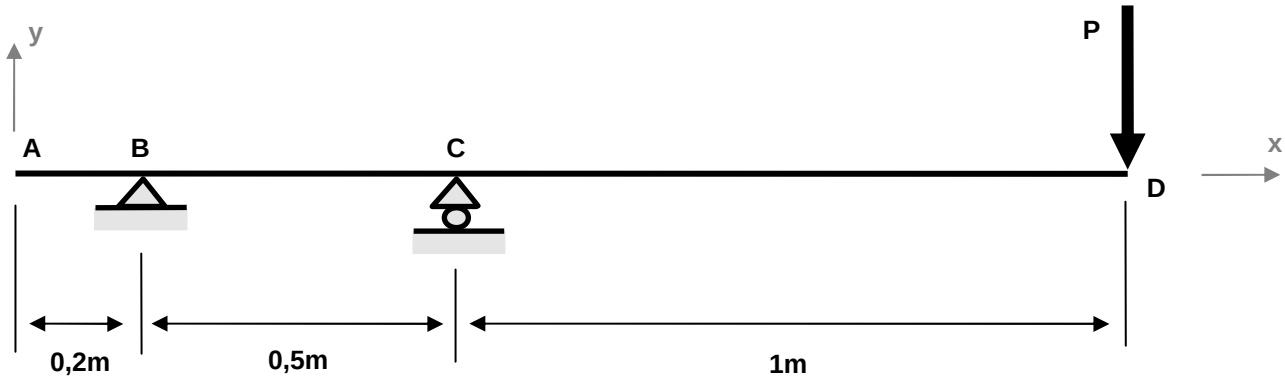
Composite verre-époxy

- E = 21000 MPa
- Re = 200 MPa

Section creuse :



Modélisation du plongeoir :



Partie I : résistance

1. Déterminer les réactions des appuis du plongeoir au sol en fonction de P.
2. Exprimer littéralement le ou les torseurs de section puis tracez les diagrammes de sollicitation.
3. En déduire la section la plus sollicitée.
4. Pour cette section, déterminer l'expression de la contrainte normale maxi σ_{max} en fonction de la charge P.
5. Soit P = 10 000 N. Faire l'application numérique de σ_{max}. Quel est alors le coefficient de sécurité de tenue de la structure ?

Partie II : déformation

1. Tracer l'allure approximative de la déformée de la planche sous l'application de P
2. Soit le moment de flexion entre C et D : **M = a x + b** où a et b sont 2 constantes.
   Donner littéralement l'expression de la déformée entre C et D sans résoudre les constantes d'intégration.
3. Une étude expérimentale a permis de déterminer au point C un angle d'inclinaison de la planche par rapport à sa position initiale à l'horizontal de **-5.22°**
   Déterminer alors les constantes d'intégration.
4. Que vaut alors la flèche maxi de la planche.

RÈPONSES N°24

Inconnues de liaison : X_B, Y_B et Y_C

- Moment : $\sum \vec{M} = \vec{0}$

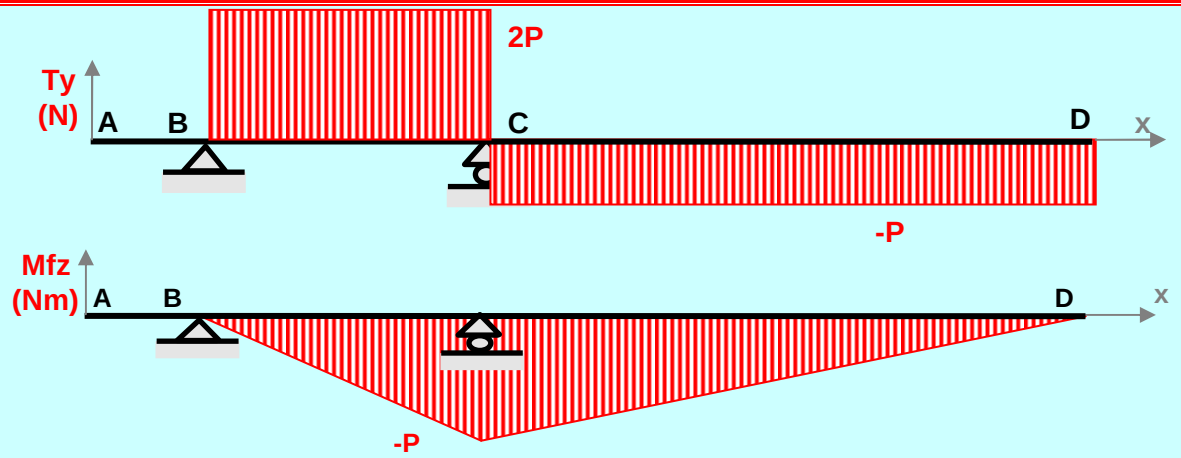
Sur z au point C (équilibre en rotation autour du point C) : $-P \times 1 - Y_B \times 0.5 = 0 \rightarrow$ **$Y_B = -2P$**

- Résultante : $\sum \vec{F} = \vec{0}$

Sur x : **$X_B = 0$**

Sur y : $Y_B + Y_C = 0 \rightarrow$ **$Y_C = 3P$**

Entre A et B :	Entre B et C :	Entre C et D :
en passant par l'amont	en passant par l'amont	en passant par l'aval
$\Im section_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$	$\Im section_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 2P & 0 \\ 0 & -2P(x-0.2) \end{Bmatrix}_G$	$\Im section_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & -P(1.7-x) \end{Bmatrix}_G$



La section la plus sollicitée est au **point C** car les diagrammes de cisaillement et de flexion sont maxi en ce point.

$\sigma_n = \frac{Mf_y}{Ig_y} z - \frac{Mf_z}{Ig_z} y$ avec :

- $Mf_y = 0$ et
- $Mf_z = -1000 \times P$ Nmm au point C
- $Ig_z = Ig_{z1} - Ig_{z2} = BH^3/12 - bh^3/12 = 400x30^3/12 - 380x10^3/12 = 868333\ mm^4$

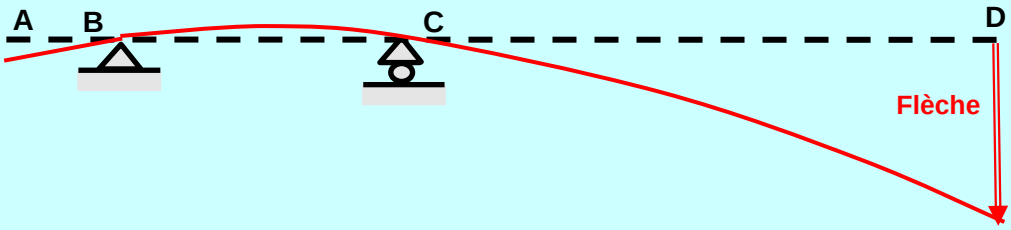
Dans la section C, la contrainte est maxi pour $y_{max} = 15mm$:

$$\sigma_{max} = \frac{1000P}{Ig_z} 15$$

AN : $\sigma_{max} = 172{,}74 MPa$

$s = \frac{Re}{\sigma_{max}} = 1.16$ soit 16% de sécurité

Partie II : déformation



$$y'' = \frac{Mf_z}{EIg_z} = \frac{1}{EIg_z}(ax+b)$$

Intégrons une première fois : $y' = \frac{1}{EIg_z}(\frac{ax^2}{2} + bx + c)$

Intégrons une deuxième fois : $y = \frac{1}{EIg_z}(\frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} + cx + d)$

a et b d'après la question I.2 : ax + b = -P(1.7 – x) soit a = P et b = -1.7P

Pente au point C connue : y'(0.7) = tan(-5.22°) = -0.091 soit $c = -0.091EIg_z - \frac{a(0.7)^2}{2} - 0.7b$

Déplacement nul du point C (car appui) : y(0.7) = 0 soit $d = \frac{a(0.7)^3}{6} + \frac{b(0.7)^2}{2} + 0.7c$

La flèche maxi est située au point D : $y(1.7) = \frac{1}{EIg_z}(\frac{a(1.7)^3}{6} + \frac{b(1.7)^2}{2} + c1.7 + d) = -27.2\text{mm}$

FLEXION PURE

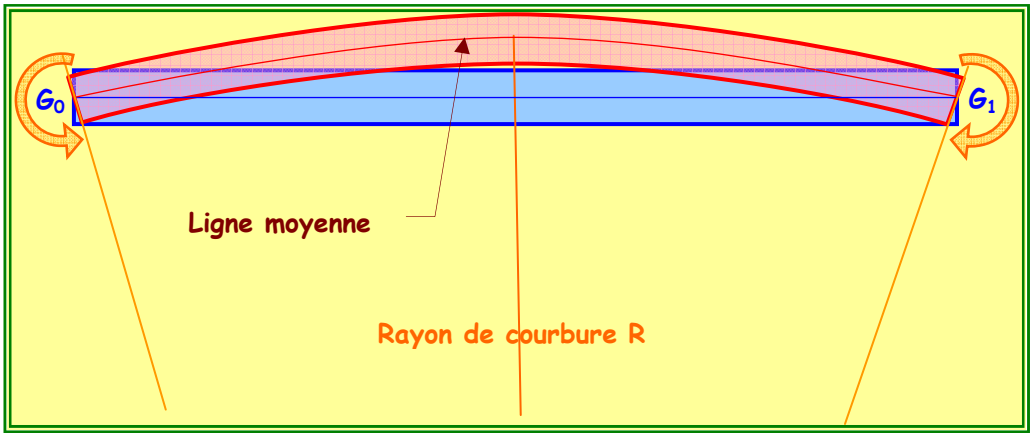
1. Définition:

Si, pour une poutre droite à section constante, le torseur de section se réduit à M_Y, ou M_Z, ou les deux quel que soit la section droite, la poutre est soumise à de la flexion pure.

Suivant que le moment fléchissant est confondu ou n'est pas confondu avec un axe principal d'inertie de la section droite, la flexion est dite plane (ou symétrique) ou déviée (ou non symétrique).

1.1. Contraintes en un point P appartenant à une section droite:

Considérons une poutre soumise à de la flexion pure. La figure ci-dessous la représente avant et après déformation. On constate expérimentalement que les fibres situées au dessus de la fibre moyenne s'allongent, alors que les fibres situées sous la fibre moyenne se raccourcissent. La fibre moyenne ne change pas de longueur : on l'appelle aussi fibre neutre. Toutes les sections droites subissent une rotation θ_x



Le vecteur contrainte en un point P quelconque d'une section droite S doit satisfaire ces 6 équations (Voir cours module F112)

$$(1)\quad 0=\iint_S \sigma_{xx}dA \qquad (4)\quad 0=\iint_S (y\sigma_{xz}-z\sigma_{xy})dA$$

$$(2)\quad 0=\iint_S \sigma_{xy}dA \qquad (5)\quad M_y=\iint_S z\sigma_{xx}dA$$

$$(3)\quad 0=\iint_S \sigma_{xz}dA \qquad (6)\quad M_z=-\iint_S y\sigma_{xx}dA$$

Des constats précédents nous amènent à conclure que les fibres s'allongeant ou se raccourcissant, ne sont donc soumises qu'à des contraintes normales dont la variation doit être linéaire $\sigma_{xx}=ay+bz+c$ et que les contraintes tangentielles sont nulles :

$$\boxed{\vec{\Phi}^{P}_{x/xyz}\begin{cases}\sigma^{P}_{xx}\neq 0=ay+bz+c\\ \sigma^{P}_{xy}=0\\ \sigma^{P}_{xz}=0\end{cases}}$$

Les équations (2) (3) et (4) sont identiquement vérifiées car les composantes tangentielles $\sigma_{xy}=\sigma_{xz}=0$

L' équation

$$(1)\quad 0=\iint_S \sigma_{xx}dA=\iint_S (ay+bz+c)dA=a\iint_S ydA+b\iint_S zdA+c\iint_S dA=aQ^S_z+bQ^S_y+cA$$

implique que c=0 car les moments statiques par rapport à des axes centraux sont nuls.

Les équations (5) et (6)nous permetent de calculer les constantes a et b :

$$\begin{cases}(5)\quad M_y=\iint_S z\sigma_{xx}dA=\iint_S (ayz+bz^2)dA=a\iint_S yzdA+b\iint_S z^2dA=aI_{yz}+bI_{yy}\\ (6)\quad -M_z=\iint_S y\sigma_{xx}dA=\iint_S (ay^2+byz)dA=a\iint_S y^2dA+b\iint_S yzdA=aI_{zz}+bI_{yz}\end{cases}$$

D' ou le système à résoudre en a et b:

$$\begin{cases}M_y=aI_{yz}+bI_{yy}\\ -M_z=aI_{zz}+bI_{yz}\end{cases}$$

$$a=\frac{\begin{vmatrix}M_y & I_{yy}\\ -M_z & I_{yz}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}I_{yz} & I_{yy}\\ I_{zz} & I_{yz}\end{vmatrix}}=-\frac{M_yI_{yz}+M_zI_{yy}}{-I^2_{yz}+I_{yy}I_{zz}}\qquad b=\frac{\begin{vmatrix}I_{yz} & M_y\\ I_{zz} & -M_z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}I_{yz} & I_{yy}\\ I_{zz} & I_{yz}\end{vmatrix}}=\frac{M_zI_{yz}+M_yI_{zz}}{-I^2_{yz}+I_{yy}I_{zz}}$$

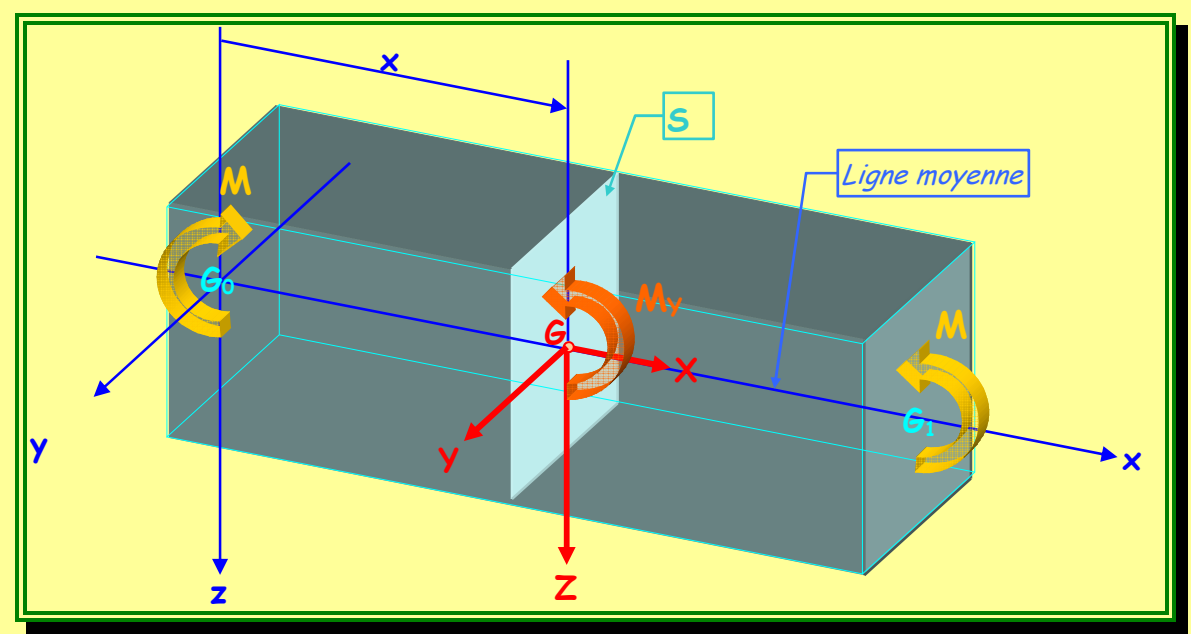
$$\boxed{\sigma^{P}_{xx}=-\frac{M_yI_{yz}+M_zI_{yy}}{I_{yy}I_{zz}-I^2_{yz}}y^P+\frac{M_zI_{yz}+M_yI_{zz}}{I_{yy}I_{zz}-I^2_{yz}}z^P}$$

Si le système d'axes yz est principal d'inertie YZ, le produit d'inertie étant nul, l'expression devient :

$$\boxed{\sigma^{P}_{xx}=-\frac{M_Z}{I_Z}Y^P+\frac{+M_Y}{I_Y}Z^P}$$

2. Flexion plane:

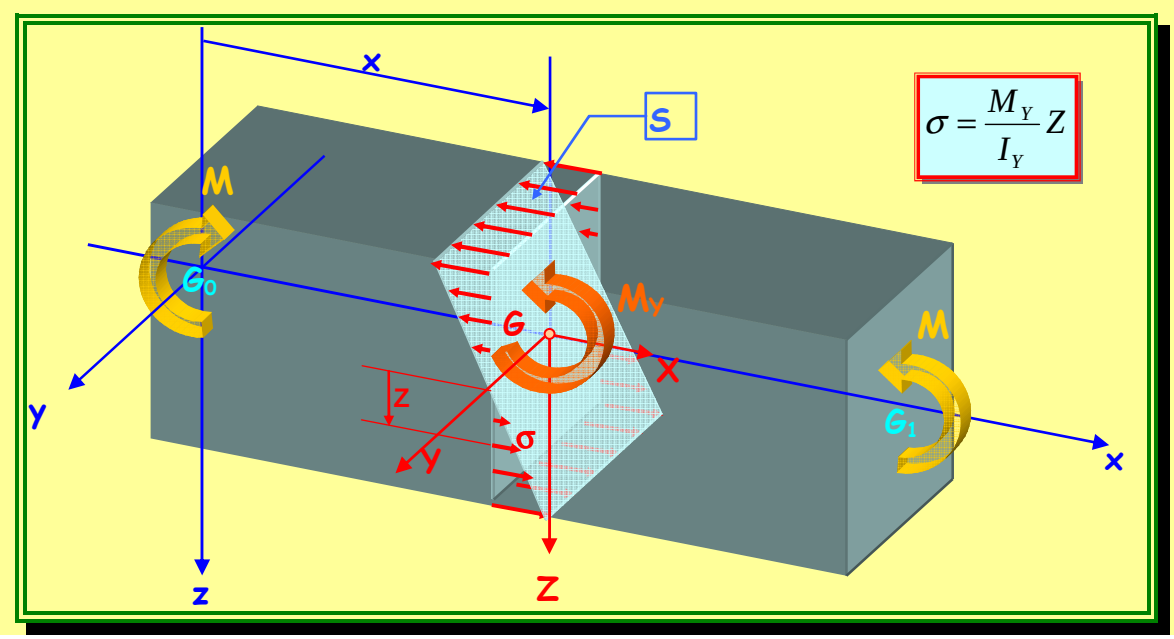
Considérons la poutre ci-dessous soumise à un moment fléchissant M_Y.



Après application des couples $\vec{M}$ aux extrémités on constate que:

❑ Toutes les sections droites subissent une rotation θ_Y autour de l'axe y parallèle à l'axe principal d'inertie Y portant le moment fléchissant et une flèche verticale w.

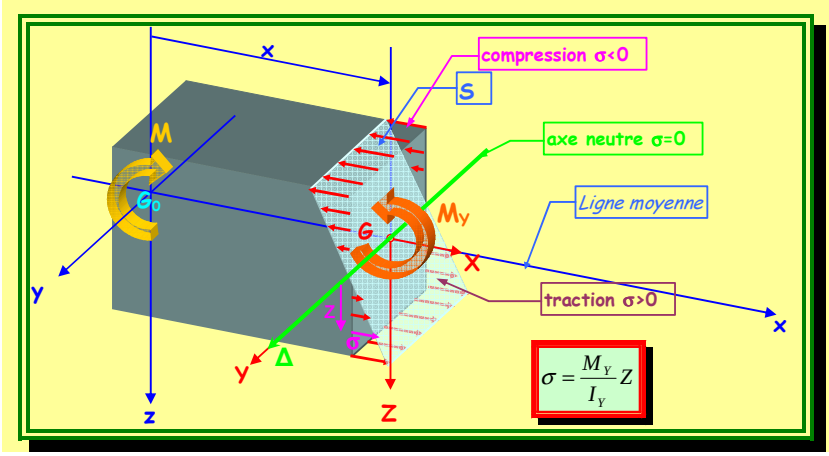
❑ Toutes les fibres contenues dans le plan xy (contenant la ligne moyenne) ne subissent aucune déformation, tandis que les fibres situées au-dessus du plan xy subissent un raccourcissement proportionnel à la distance par rapport à ce plan. De même les fibres situées au-dessous du plan xy subissent un allongement.proportionnel à la distance par rapport à ce plan.

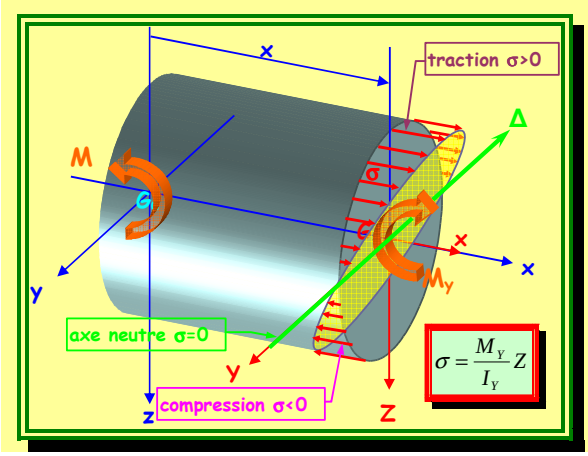


2.2. Axe neutre :

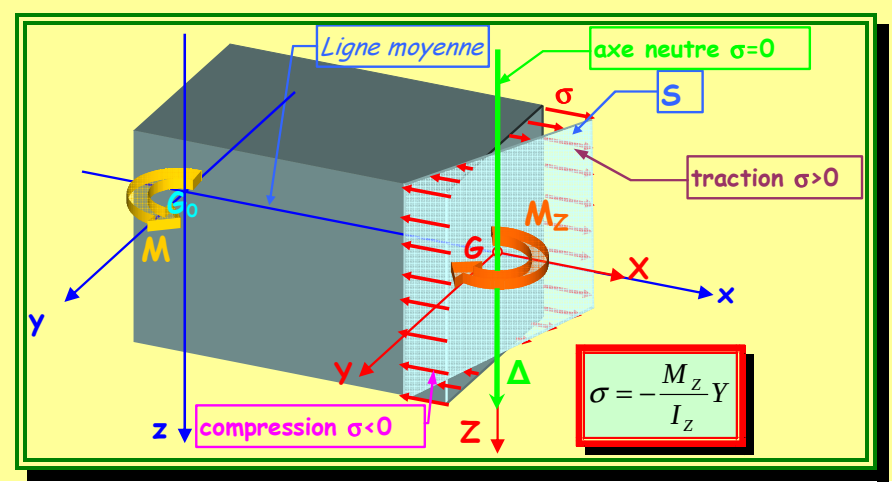
Le lieu des points où σ=0 dans la section droite, est l'axe neutre Δ. Il est confondu avec l'axe qui porte le moment fléchissant dans le cas de la flexion plane. C'est l'axe de rotation autour duquel tournent les sections droites.

1°) Le moment est porté par l'axe principal Y:

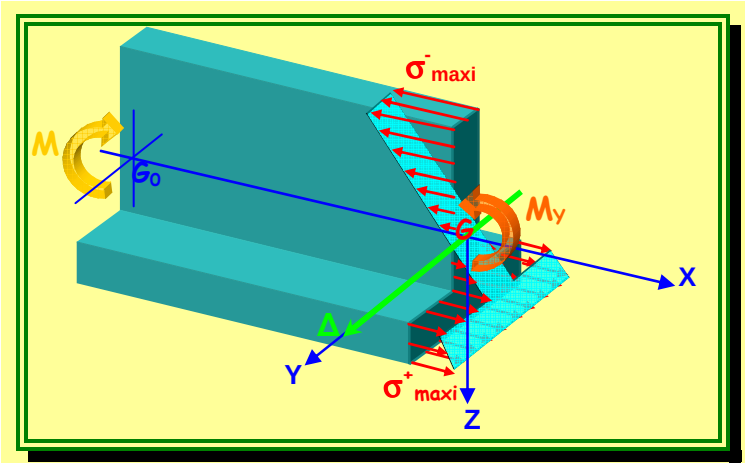




2°) Le moment est porté par l'axe principal Z:



2.3. Coefficient de sécurité:



1°) Matériaux symétriques ou ductiles ($\sigma_e = \sigma_e^{'}$):

On calcule la plus grande contrainte normale en valeur absolue puis le coefficient de sécurité par la relation:

$$\alpha = \frac{\sigma_e \left(ou\ \sigma_e^{'}\right)}{\left|\sigma_{\max i}\right|}$$

2°) Matériaux dissymétriques ou fragiles ($\sigma_e^{'} > \sigma_e$):

On calcule les deux contraintes extrêmes $\sigma^{+}_{\max i}$ et $\sigma^{-}_{\max i}$, puis les deux coefficients:

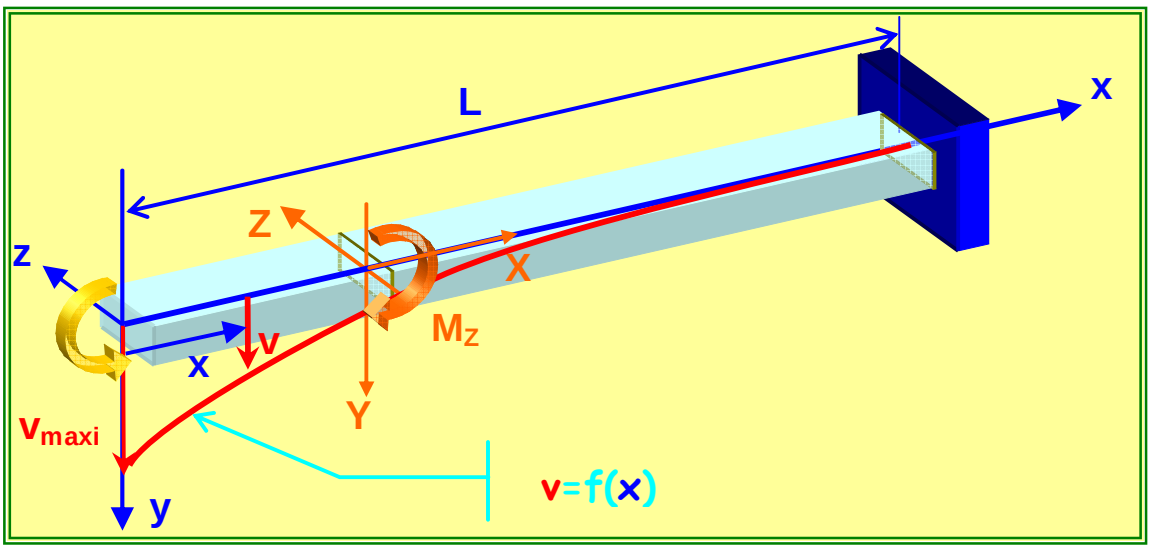
$$\alpha = \frac{\sigma_e}{\sigma^{+}_{\max i}}$$

$$\alpha^{'} = \frac{\sigma_e^{'}}{\left|\sigma^{-}_{\max i}\right|}$$

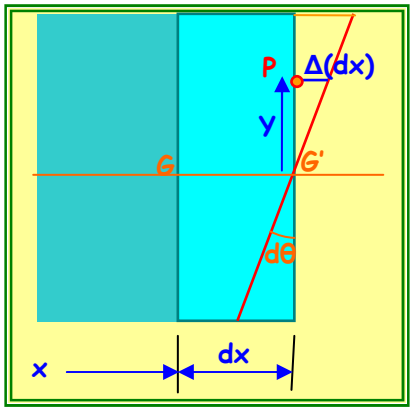
Le coefficient de sécurité est le plus petit des deux.

2.4. Equation de la déformée:

1°) Le moment est porté par l'axe principal Z:



Sous l'effet du moment M_Z la ligne moyenne de la poutre se déforme. Son équation après déformation v=f(x) est aussi appelée déformée et la valeur de la déformée en un point d'abscisse x est appelée la flèche v.
L'expression du rayon de courbure R d'une équation d'une courbe en coordonnées cartésiennes est donnée par : $\frac{1}{R} = \frac{v''}{(1+v')^{\frac{3}{2}}} \approx v''$ compte tenu de nos hypothèses petites déformations et du développement du binôme de Newton $(1+v')^{\frac{3}{2}} \approx 1$.

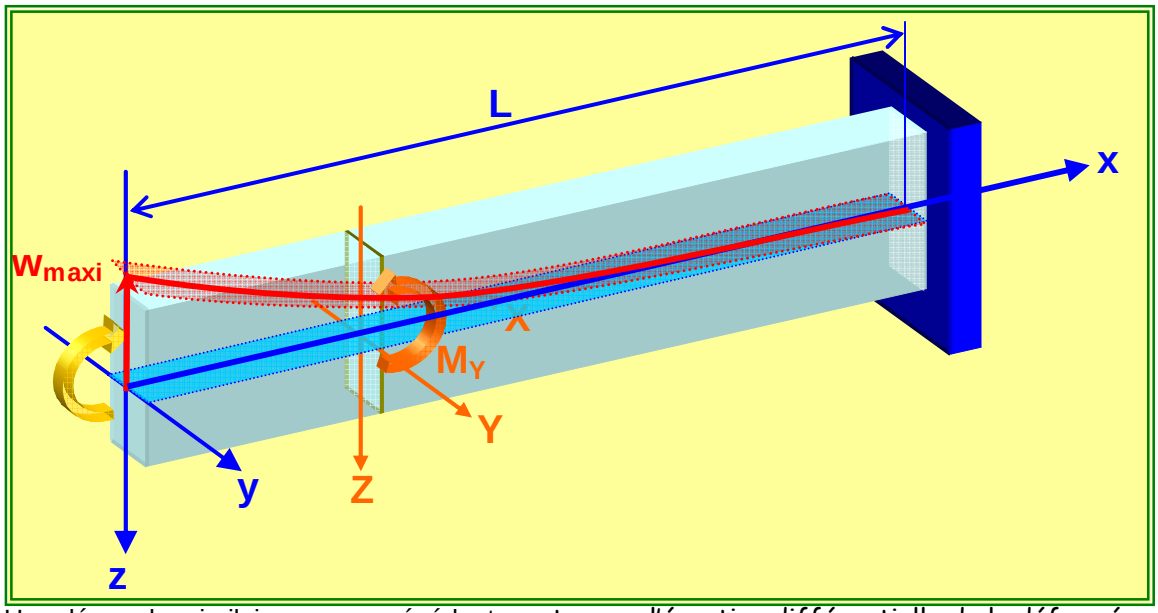


En considérant un tronçon de poutre GG' de longueur dx la contrainte normale en un point P d'ordonnée y est donnée par $\sigma_{xx}^{P} = -\frac{M_Z}{I_Z} Y$ et vaut d'après la loi de Hooke en traction $\sigma_{xx}^{P} = E\varepsilon_{xx}^{P} = E\frac{\Delta(dx)}{dx} = E\frac{(Yd\theta)}{dx} = -\frac{EY}{R}$.
En identifiant les deux expressions l'équation différentielle de la déformée est donnée par :

$$\boxed{v'' = \frac{M_Z}{EI_Z}}$$

Après deux intégrations on obtient l'équation de la déformée en fonction de x, puis la flèche maximum.

2°) Le moment est porté par l'axe principal Y:



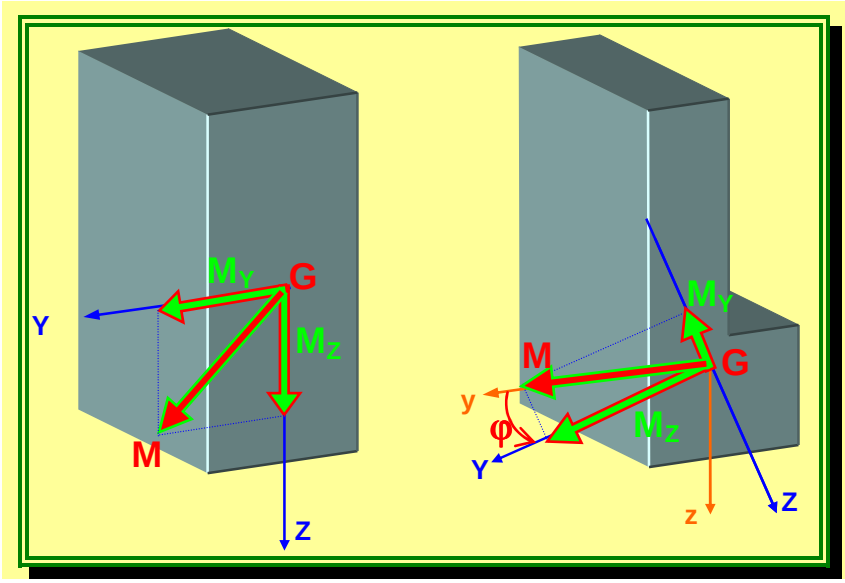
Une démarche similaire au cas précédent montre que l'équation différentielle de la déformée est donnée par :

$$\boxed{w'' = -\frac{M_Y}{EI_Y}}$$

Après deux intégrations on obtient l'équation de la déformée en fonction de x, puis la flèche maximum.

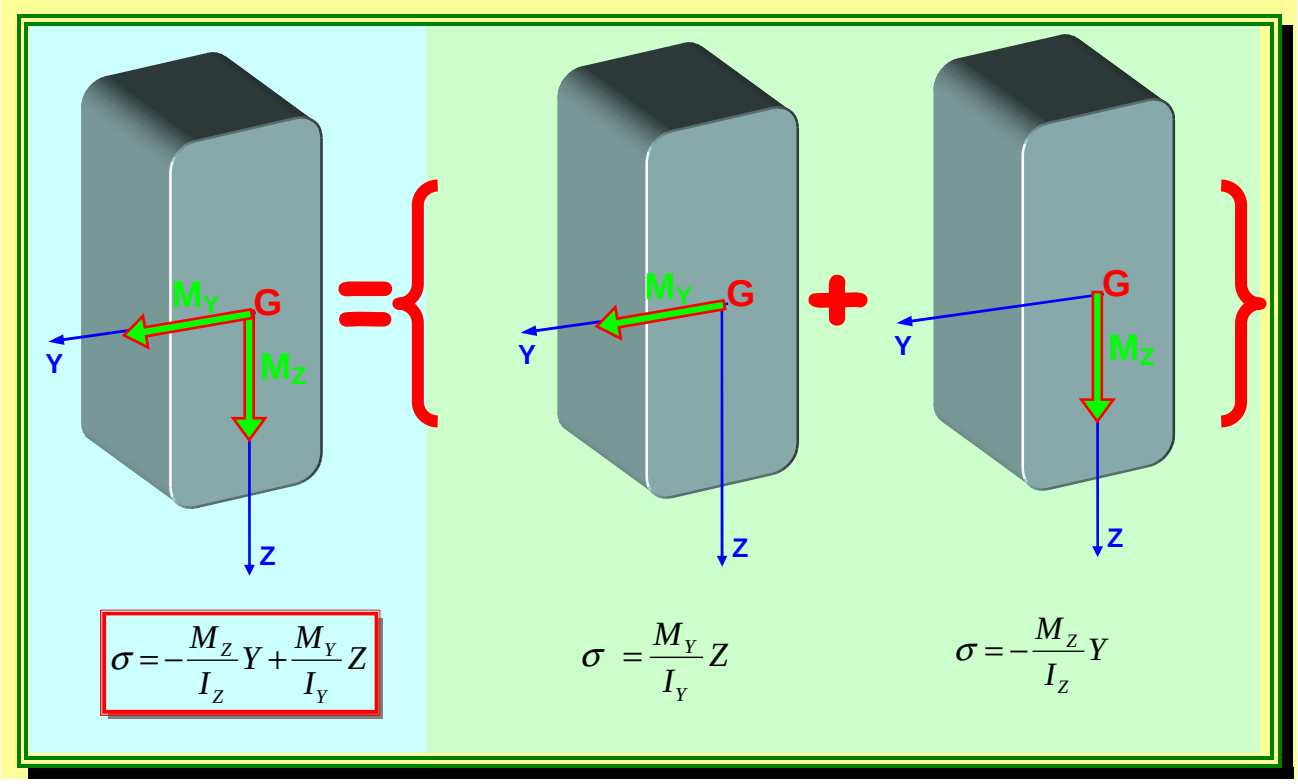
3. Flexion déviée:

Le moment de flexion n'est plus porté par l'un des deux axes principaux d'inertie de la section droite.



3.1. Contraintes en un point P de la section droite:

On applique le principe de superposition.



3.2. Axe neutre:

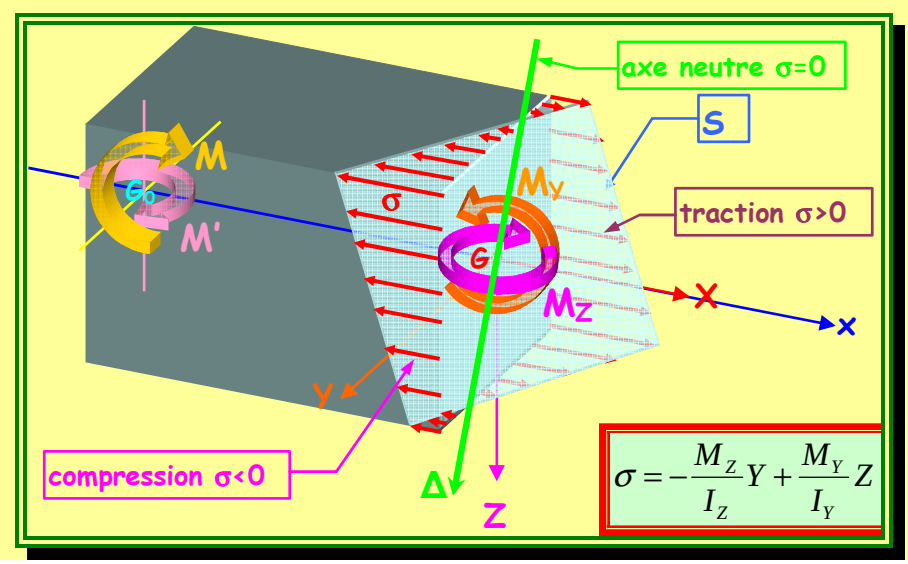
Le lieu des points où σ = 0 dans la section droite, est l'axe neutre Δ. Il est confondu avec l'axe qui porte le moment fléchissant dans le cas de la flexion plane. C'est l'axe de rotation autour duquel tournent les sections droites.

De la relation donnant l'expression de la contrainte, on en déduit l'équation de l'axe neutre dans des axes quelconques :

$$0 = -\frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y^P + \frac{M_z I_{yz} + M_y I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z^P \quad \Rightarrow \quad z = \frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{M_z I_{yz} + M_y I_{zz}} y$$

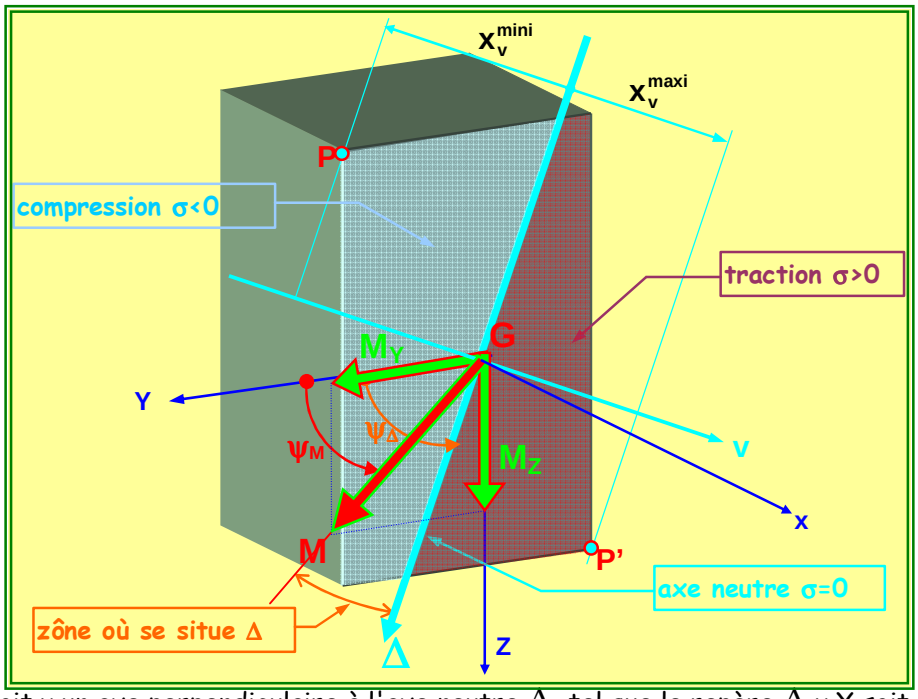
Qui devient dans des axes principaux d'inerties :

$$\boxed{Z = \frac{M_Z}{M_Y}\frac{I_Y}{I_Z}Y}$$



Comme l'axe neutre est dévié par rapport au moment de flexion résultant (contrairement à la flexion plane où l'axe neutre et le moment de flexion sont confondus), la flexion est dite déviée.

3.3. Expression de la contrainte de flexion dans un repère qui contient l'axe neutre:



Soit v un axe perpendiculaire à l'axe neutre Δ, tel que le repère Δ,v,X soit direct.
On montre que dans ce repère la contrainte de flexion se calcule par:

$$\sigma = \frac{M_\Delta}{I_{\Delta\Delta}} x_v$$

avec: $I_{\Delta\Delta} = \frac{I_Y + I_Z}{2} + \frac{I_Y - I_Z}{2}\cos 2\psi_\Delta$

Les points les plus sollicités sont ceux qui sont les plus éloignés de l'axe neutre Δ.

3.4. Equation de la déformée :

On applique le principe de superposition. Compte tenu des expressions de v et w obtenu au paragraphe 10.2.4. La flèche résultante à l'abscisse x s'obtient par :

$$f = \sqrt{v^2 + w^2}$$

3.5. Coefficient de sécurité:

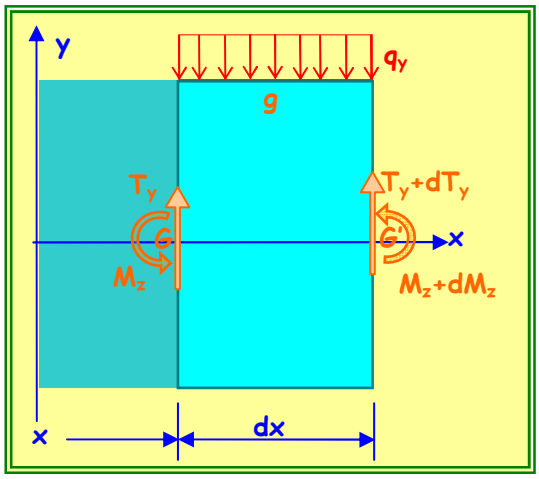
Il faut tout d'abord rechercher l'axe neutre Δ, afin de déterminer la position des points soumis aux contraintes maximum de traction et de compression. La démarche est ensuite la même que pour la flexion plane.

FLEXION SIMPLE (CISAILLEMENT-FLEXION)

1. Définition:

Si, pour une poutre droite à section constante, le torseur de section se réduit à T_Y, ou T_Z et M_Y, ou M_Z, (ou les deux) quel que soit la section droite, la poutre est soumise à de la flexion simple.

1.1. Relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant:



Considérons le tronçon de poutre GG', et supposons que les seules actions extérieures qui s'exercent sur ce tronçon sont une charge linéique uniforme q (Pour simplifier la démonstration considérons uniquement la composante suivant y : q_y).

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_{G'}} = \overrightarrow{R_G} - \vec{q}dx \\ \overrightarrow{M_{G'}} = \overrightarrow{M_G} + \overrightarrow{G'G} \wedge \overrightarrow{R_G} - \overrightarrow{G'g} \wedge \overrightarrow{qdx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_y + dT_y = T_y + q_y dx \\ M_z + dM_z = M_z - T_y dx - q_y \dfrac{dx^2}{2} \end{cases}$$

En négligeant les termes du second ordre :

$$\boxed{q_y = \frac{dT_y}{dx} \qquad T_y = -\frac{dM_z}{dx}}$$

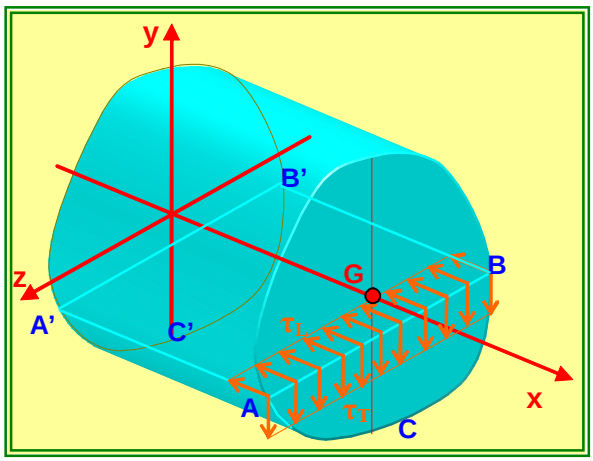
En considérant la composante z : q_z :

$$\boxed{q_z = \frac{dT_z}{dx} \qquad T_z = \frac{dM_y}{dx}}$$

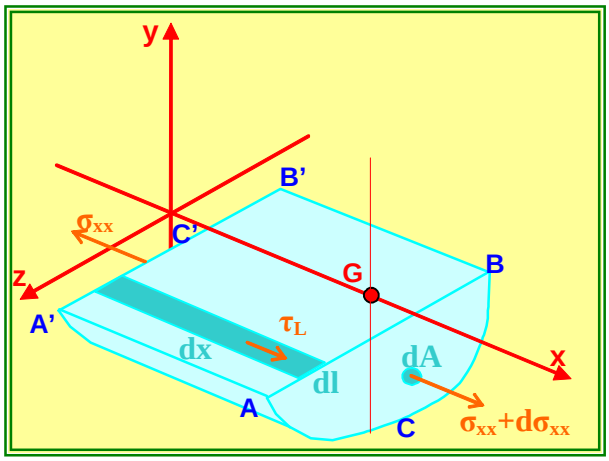
Contraintes en un point P appartenant à une section droite:

On constate expérimentalement comme dans la flexion pure que les fibres situées au dessus de la fibre moyenne s'allongent, alors que les fibres situées sous la fibre moyenne se raccourcissent

La relation $\sigma_{xx}^P = -\dfrac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y^P + \dfrac{M_z I_{yz} + M_y I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z^P$ reste valable car l'effort tranchant pertube peu les contraintes normales, de même pour la courbure.



Entre chaque fibre, on enregistre des variations de longueur qui impliquent l'existence de contraintes tangentielles longitudinales τ_L dans le plan zx, et compte tenu de la réciprocité des contraintes tangentielles transversales τ_T dans le plan xy.



Isolons le bout de poutre délimité par A'B'C'ABC :

Ecrivons l'équilibre statique de ce tronçon, en considérant la composante suivant l'axe x :

$$-\iint_{A'B'C'} \sigma_{xx} dA + \iint_{ABC} (\sigma_{xx} + d\sigma_{xx}) dA + \iint_{A'B'AB} \tau_L dl dx = 0$$

$$\iint_{ABC} \frac{d\sigma_{xx}}{dx} dA + \iint_{AB} \tau_L dl = 0$$

La contrainte normale vaut :

$$\sigma_{xx}^P = -\frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y^P + \frac{M_z I_{yz} + M_y I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z^P$$

Donc : $\dfrac{d\sigma_{xx}^P}{dx} = -\dfrac{T_z I_{yz} - T_y I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y^P + \dfrac{-T_y I_{yz} + T_z I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z^P$ compte tenu que $T_y = -\dfrac{dM_z}{dx}$ et

$$T_z = \frac{dM_y}{dx}$$

$$\iint_{AB} \tau_L dl = \iint_{ABC} \left(-\frac{T_z I_{yz} - T_y I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y^P + \frac{-T_y I_{yz} + T_z I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z^P \right) dA = -\frac{T_z I_{yz} - T_y I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \iint_{ABC} y^P dA + \frac{-T_y I_{yz} + T_z I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \iint_{ABC} z^P dA$$

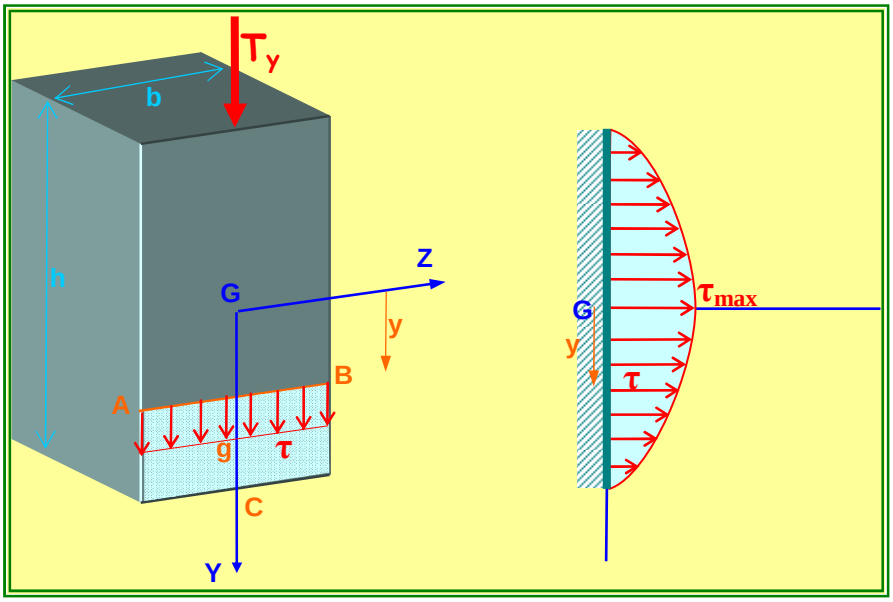
Avec les définitions des moments statiques : $\iint_{ABC} y^P dA = Q_z^{ABC}$ et $\iint_{ABC} z^P dA = Q_y^{ABC}$

$$\tau_L = \frac{1}{L_{AB}} \left(-\frac{T_z I_{yz} - T_y I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} Q_z^{ABC} + \frac{-T_y I_{yz} + T_z I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} Q_y^{ABC} \right)$$

Si le système d'axe yz est principal d'inertie (le produit d'inertie étant nul) :

$$\boxed{|\tau_L| = \frac{1}{L_{AB}} \left(\frac{T_Y}{I_Z} Q_Z^{ABC} + \frac{T_Z}{I_Y} Q_Y^{ABC} \right)}$$

Contraintes tangentielles pour des sections épaisses rectangulaires:



$$|\tau_L| = \frac{1}{L_{AB}} \frac{T_Y}{I_Z} Q_Z^{ABC}$$

$$L_{AB} = b$$

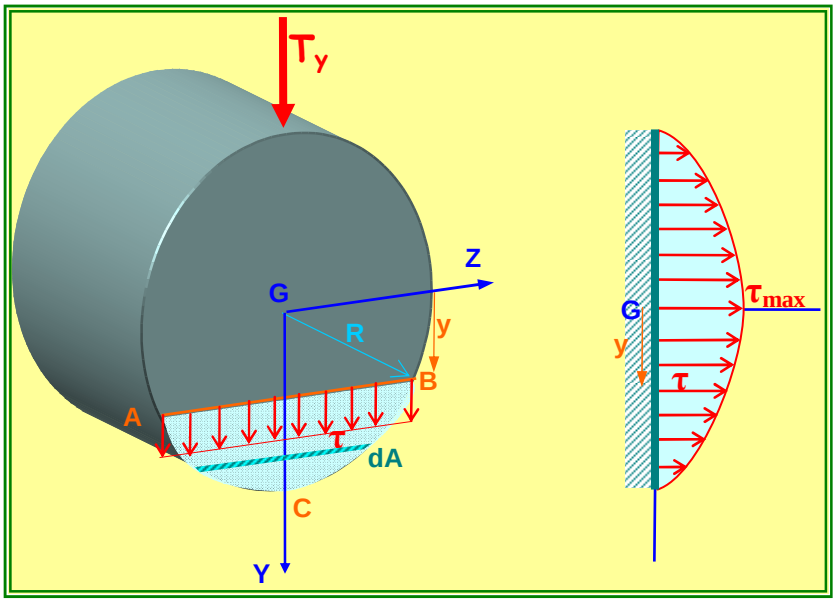
$$I_Z = \frac{bh^3}{12}$$

$$Q_Z^{ABC} = Y_g \times A_{ABC} = \frac{b}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{h}{2} + y\right)$$

$$\tau = \frac{3T_Y}{2A}\left(1 - \frac{y^2}{\frac{h^2}{4}}\right)$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{3T_Y}{2A}}$$

Contraintes tangentielles pour des sections épaisses circulaires:



$$|\tau_L| = \frac{1}{L_{AB}} \frac{T_Y}{I_Z} Q_Z^{ABC}$$

$$L_{AB} = 2\sqrt{R^2 - y^2}$$

$$I_Z = \frac{\pi R^4}{4}$$

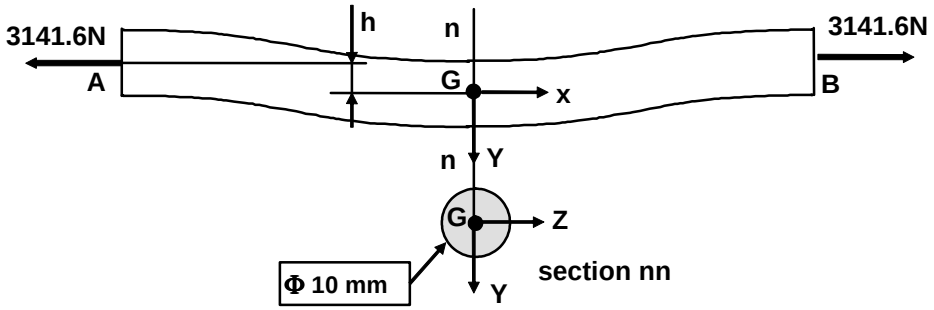
$$Q_Z^{ABC} = \iint_{ABC} Y dA = \int_y^R y 2\sqrt{R^2 - y^2}\, dy = \frac{2}{3}\left(R^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\tau = \frac{4T_Y}{3A}\left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{4T_Y}{3A}}$$

SOLLICITATIONS COMPOSEES

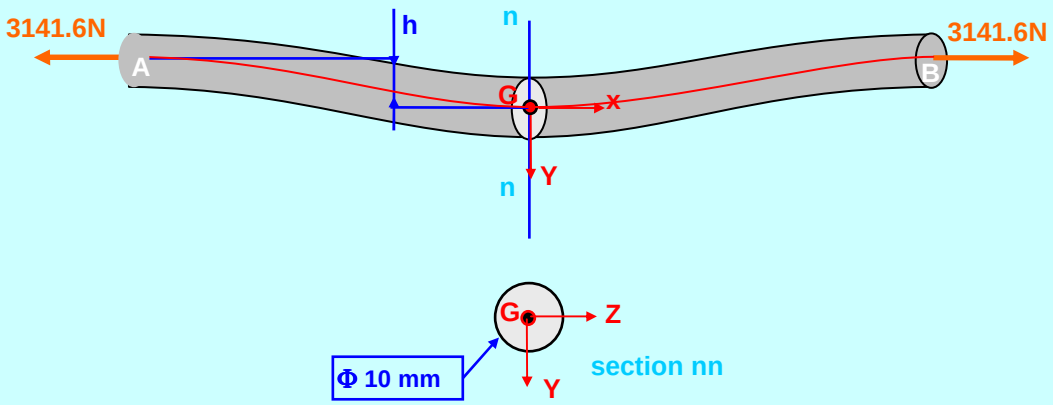
PROBLÈME N°25



Considérons la barre de la figure ci-dessus. Elle est soumise à deux forces égales et opposées de 3141,6 N. La section droite est circulaire de diamètre 10 mm.

1°) Déterminer les éléments de réduction du torseur de section au centre de gravité G de la section droite nn.
2°) Déterminer l'expression de la contrainte normale maximum (>0) dans la section droite nn (la mettre sous la forme a + b*h où a et b sont des constantes réelles).
3°) La contrainte maximum ne pouvant excéder 232 MPa, en déduire la valeur de h.
4°) Déterminer alors la position de l'axe neutre.

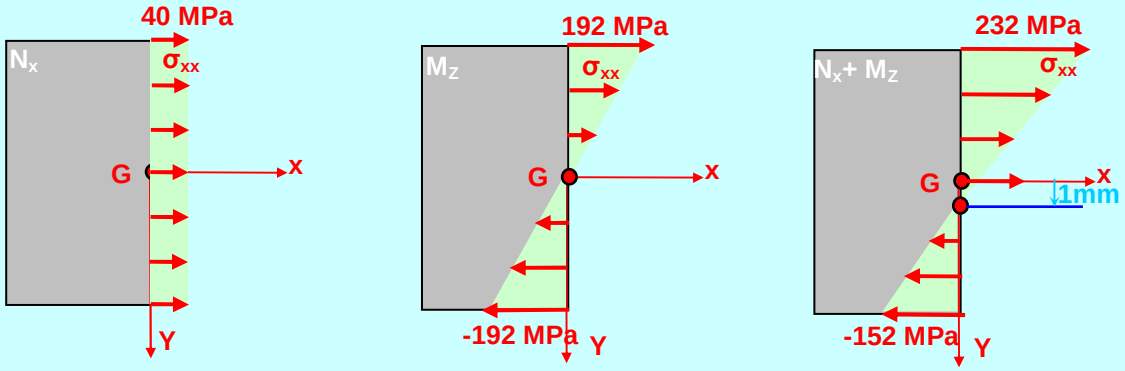
RÈPONSES N°25



Torseur de section en G : $\begin{cases} \overrightarrow{R_G} = \overrightarrow{F_B} \Rightarrow \begin{vmatrix} N_x = 3141{,}6N \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \overrightarrow{M_G} = \overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{F_B} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z = 3141{,}6h \end{vmatrix} \end{cases}$ Sollicitation : Traction-Flexion

Contrainte de traction : $\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} = \frac{3141{,}6}{\pi \times 5^2} = 40MPa$

Contrainte de flexion : $\sigma_{xx}^P = -\frac{M_Z}{I_Z} Y^P = \frac{3141{,}6h}{\pi.10^4} 64.5 = 32h$

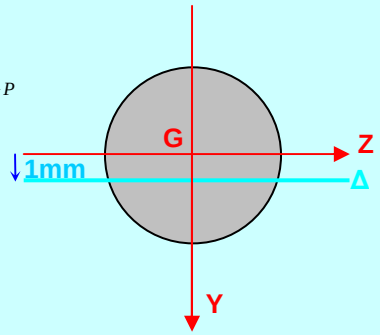


Contrainte de traction -flexion: $\sigma_{xx} = 40 + 32h$

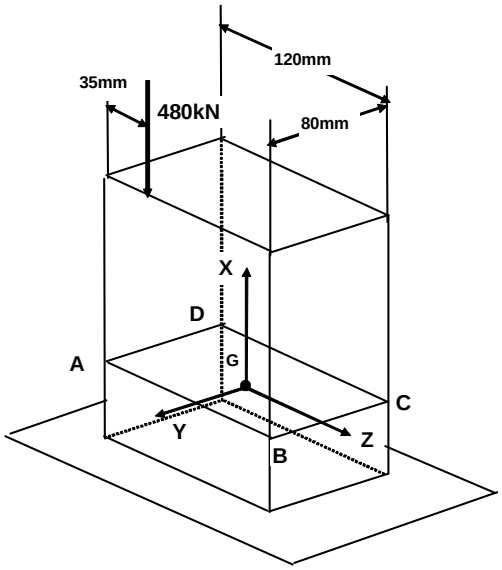
La contrainte maximum admissible étant de 232 MPa : $232 \geq 40 + 32h$ d'ou **h=6mm**

$\forall P \in \Delta \quad \sigma_{xx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 40 - \frac{3141{,}6 \times 6}{\pi.10^4} \times 64 \times Y^P = 40 - 38{,}4Y^P$

Y^P=1,04mm

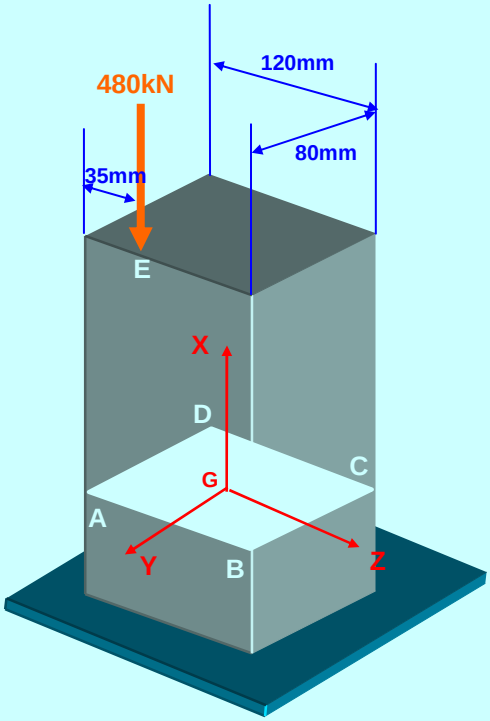


PROBLÈME N°26



Calculer les contraintes normales aux points A, B, C et D et localiser l'axe neutre.

RÈPONSES N°26



Torseur de section en G :

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_G} = \overrightarrow{F_E} \Rightarrow \begin{vmatrix} N_x = -480kN \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \overrightarrow{M_G} = \overrightarrow{GE} \wedge \overrightarrow{F_E} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ M_Y = 12000kNmm \\ M_Z = 19200kNmm \end{vmatrix} \end{cases}$$

Sollicitation : Traction-Flexion

La contrainte normale en un point P quelconque :

$$\sigma_{xx}^{P} = \frac{N_x}{A} - \frac{M_Z}{I_Z} Y^P + \frac{+M_Y}{I_Y} Z^P$$

$$\sigma_{xx}^{P} = -\frac{480.10^3}{120\times 80} - \frac{19200.10^3\times 12}{120\times 80^3} Y^P + \frac{12000.10^3\times 12}{80\times 120^3} Z^P$$

$$\sigma_{xx}^{P} = -50 - 3{,}75\times Y^P + 1{,}0417\times Z^P$$

Contrainte en A :

$\sigma_{xx}^{A} = -50 - 3{,}75\times 40 + 1{,}0417\times(-60)$ **σ_{xx}^{A} = -262,5 MPa**

Les calculs sont identiques pour les points B, C, D :

σ_{xx}^{B} = -137,5 MPa **σ_{xx}^{C} = 162,5 MPa** **σ_{xx}^{D} = 37,5 MPa**

Equation de l'axe neutre : $\sigma_{xx}^{P} = \frac{N_x}{A} - \frac{M_Z}{I_Z} Y^P + \frac{+M_Y}{I_Y} Z^P = 0$

$$\sigma_{xx}^{P} = -50 - 3{,}75\times Y^P + 1{,}0417\times Z^P = 0$$

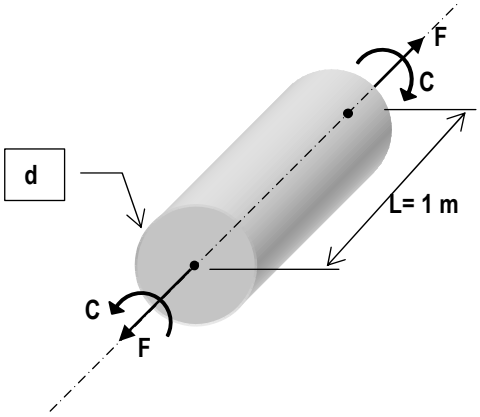
$$-50 - 3{,}75\times Y^P + 1{,}0417\times Z^P = \frac{500 + 3{,}75Y^P}{1{,}0417}$$ **Z = 3,6Y+48**

PROBLÈME N°27

Un arbre cylindrique de diamètre d, de longueur L=1m, est sollicité par un effort F= 19635 N, et un couple C longitudinaux comme indiqué sur la figure ci-contre.

Il est constitué d'un matériau ayant comme

- Module de Young : 200 GPa.
- Coefficient de Poisson : 1/3.

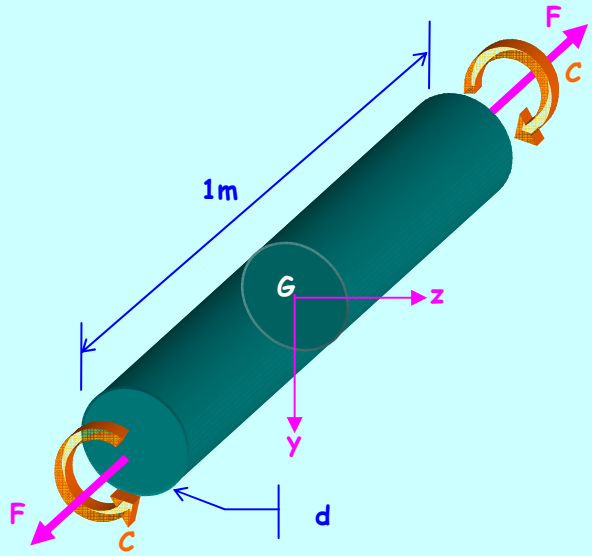


Des mesures expérimentales ont permis d'enregistrer l'allongement longitudinal du cylindre 0,2 mm, ainsi que la rotation des sections extrêmes 1,25° .

Calculer :

1) Le diamètre d du cylindre en mm.
2) Le rétrécissement du diamètre d en mm
3) La contrainte normale maximale en MPa.
4) Le module de Coulomb du matériau.
5) Le couple C appliqué en mN.
6) La contrainte tangentielle maximum en MPa.

RÈPONSES N°27



1°) $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$.

$$d = \sqrt{\frac{4FL}{\pi E \Delta L}} = 25mm$$

2°) $\varepsilon_{YY} = -\upsilon\varepsilon_{xx}$

$$\Delta d = -\frac{\upsilon d \Delta L}{L} = -1{,}6.10^{-3} mm$$

3°) $\sigma = 40MPa$

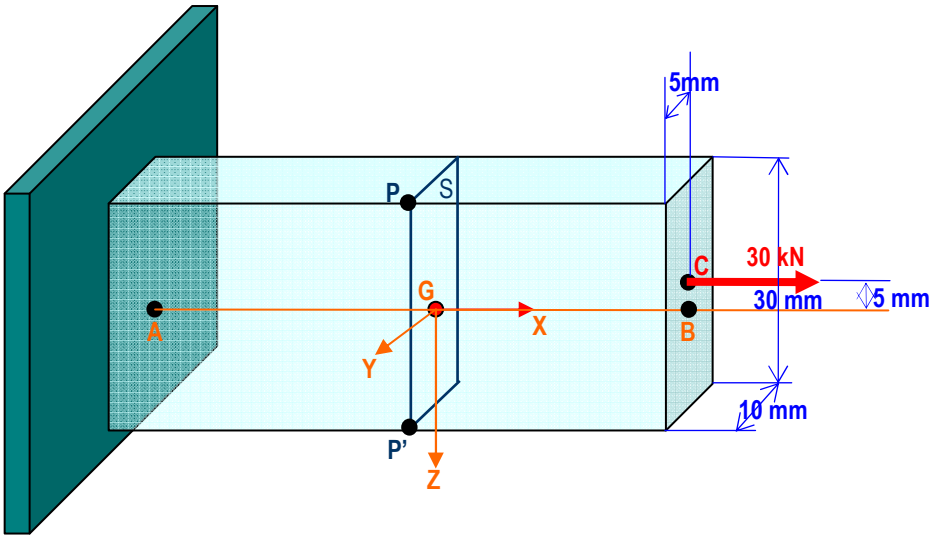
4°) $G = \dfrac{E}{2(1+\upsilon)}$ $\quad G = \dfrac{3E}{8} = 75000MPa$

5°) $\varphi = \dfrac{CL}{GI_G}$ $\quad I_G = \dfrac{\pi d^4}{32}$ $\quad C = 62{,}75mN$

6°) $\tau = G\gamma$ $\quad \tau = 20{,}45MPa$

PROBLÈME N°28

Une poutre à section rectangulaire (30*10) , est encastrée à son extrémité A, et soumise à l'autre extrémité B à une force de 30 kN appliquée en C comme indiqué sur la figure ci-contre.

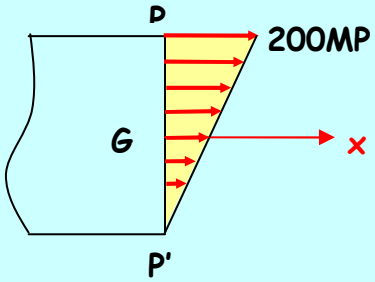


1) Déterminer les composantes du torseur de section au centre de gravité G de la section droite S.
2) Calculer les contraintes normales aux points P et P' de la section droite S.
3) Tracer le diagramme représentant les variations de la contrainte normale dans la section droite S.
4) Désirant un coefficient de sécurité de 2, quelle est la limite élastique du matériau qu'il faut choisir.

RÈPONSES N°28

1°) $[T_G]_{/Y,Z,3}\begin{cases}\overrightarrow{R_G}=\overrightarrow{F_C}\\ \overrightarrow{M_G}=\overrightarrow{GC}\wedge\overrightarrow{F_C}\end{cases}$ $\begin{cases}N_x=30kN\\ M_Y=-150mN\end{cases}$

2°) $\sigma_{xx}^P=\dfrac{N_x}{A}+\dfrac{M_Y}{I_Y}Z^P$ $I_Y=\dfrac{bh^3}{12}$ $\begin{cases}\sigma_{xx}^P=200MPa\\ \sigma_{xx}^{P'}=0\end{cases}$

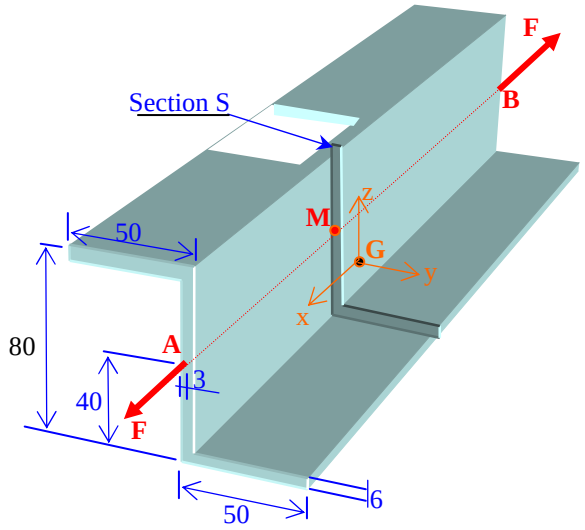


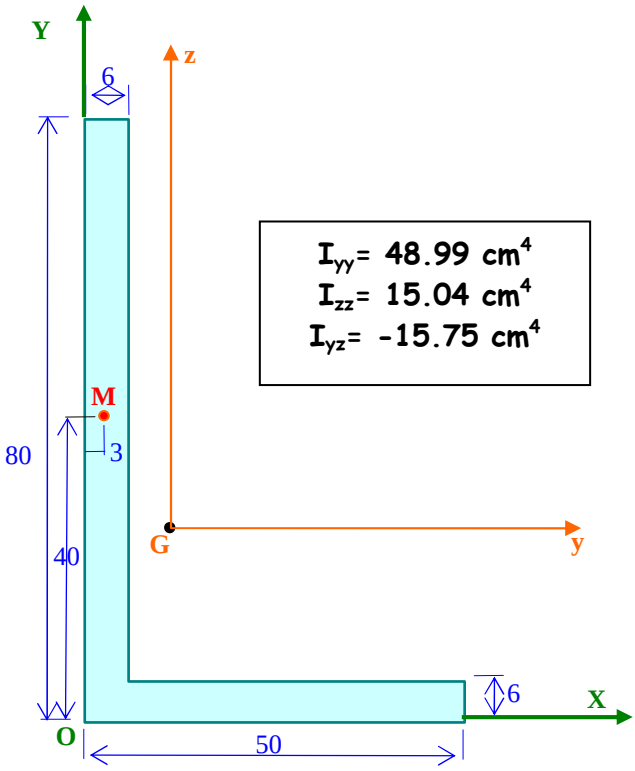
3°)

4°) $\sigma_e=400MPa$

PROBLÈME N°29

Une poutre de section en forme de Z (50*80*50) d'épaisseur 6 mm, a été entaillé comme l'indique la figure ci-dessous. Elle est soumise à deux efforts de traction F = 10 kN à ses extrémités A et B. La ligne d'action des forces F est AMB





I_{yy}= 48.99 cm^4
I_{zz}= 15.04 cm^4
I_{yz}= -15.75 cm^4

La section droite S de la poutre est représentée sur la figure ci-contre à **l'échelle 1**. Les cotes sont en mm.
Le centre de gravité est noté G et les axes centraux y et z sont donnés sur la figure ainsi que les. moments d'inerties et produit d'inertie par rapport à ces axes

1°) Déterminez les coordonnées de G dans le repère **(O;X,Y)**.

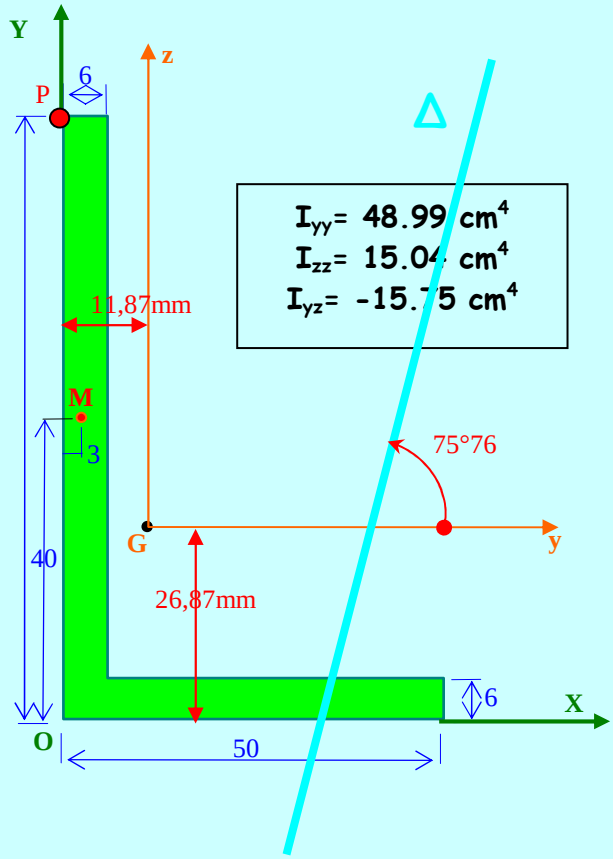
2°) Déterminez, dans le repère **(G,x,y,z)**, les composantes du torseur de section au centre de gravité G de la section droite S (les forces en N, les moments en mmN).

3°) Déterminez l'équation de l'axe neutre global de la section S dans le repère **(G,y,z)** en la mettant sous la forme z=ay+b et représentez cet axe sur la figure.

4°) Mettez en place sur la figure le point P le plus tendu.

5°) Calculez la valeur de la contrainte normale globale au point P en MPa.

RÈPONSES N°29



1°) X_G=11,87mm ;Y_G=26,87mm

2°)

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_G} = \overrightarrow{F_A} \Rightarrow \left| \begin{matrix} N_x = 10^4 N \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right. \\ \overrightarrow{M_G} = \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{F_A} \Rightarrow \left| \begin{matrix} 0 \\ M_Y = 1{,}313.10^5 Nmm \\ M_Z = 0{,}887.10^5 Nmm \end{matrix} \right. \end{cases}$$

3°)

$$\sigma_{xx}^P = \frac{N_x}{A} - \frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y^P + \frac{M_z I_{yz} + M_y I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z^P = 0$$

z = 3.942y-113.07

4°) point P le + contraint $P_{/yz} \begin{cases} -11{,}87mm \\ 53{,}13mm \end{cases}$

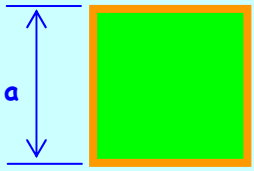
5°) $\sigma_{xx}^{P.traction} = 13{,}44MPa$ $\sigma_{xx}^{P.flexion} = 11{,}81MPa$ $\sigma_{xx}^{P} = 25{,}25MPa$

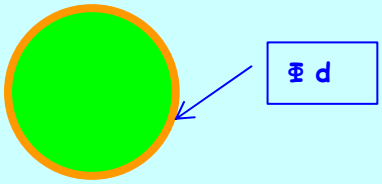
FLAMBEMENT

PROBLÈME N°30

A aires égales, quelle est la section, carrée ou circulaire, qui résiste le mieux au flambement? (Calculer les élancements des deux barres).

RÈPONSES N°30





$$A = a^2 \qquad\qquad A = \frac{\pi d^2}{4}$$

Même aire $\quad d = \dfrac{2a}{\sqrt{\pi}}$

$$I_{vv} = \frac{a^4}{12} \qquad\qquad I_{vv} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$\rho_v = \sqrt{\frac{I_{vv}}{A_0}} = \sqrt{\frac{a^4}{12a^2}} \qquad\qquad \rho_v = \sqrt{\frac{I_{vv}}{A_0}} = \sqrt{\frac{a^4}{4\pi a^2}}$$

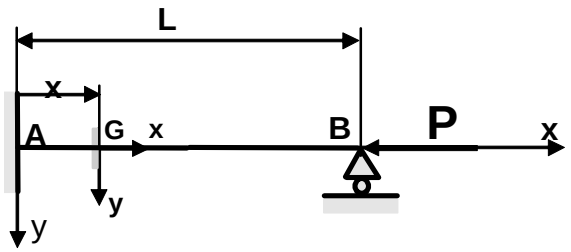
$$\lambda = \frac{L_F}{\rho_v} = \frac{L_F\sqrt{12}}{a} \qquad\qquad \lambda = \frac{L_F}{\rho_v} = \frac{L_F\sqrt{4\pi}}{a}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 E I_{vv}}{L_F^2} \qquad\qquad (\sigma_c)_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$\frac{P_c^{carré}}{P_c^{cercle}} = \frac{\pi}{3}$$

Conclusion : La section carré résiste mieux.

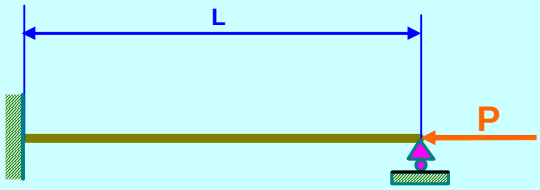
PROBLÈME N°31



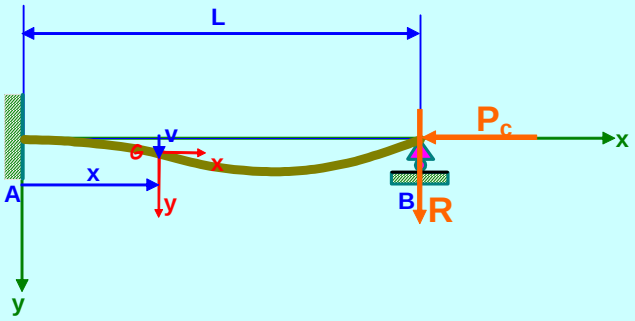
Calculer la charge critique d'EULER de la poutre ci-contre. En déduire la valeur du coefficient μ.

RÈPONSES N°31

Avant déformation



Après déformation



$$M_Z = -P_c v + R(L-x)$$

$$v'' = \frac{M_Z}{EI_Z}$$

$$EI_Z v'' + P_c v = R(L-x)$$

Posons : $\omega^2 = \dfrac{P_c}{EI_Z}$

$$v'' + \omega^2 v = \frac{R}{EI_Z}(L-x)$$

Equation différentielle du second ordre avec second membre.

$$v = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x) + \frac{R}{EI_Z\omega^2}(L-x)$$

Ecrivons les conditions limites en A et B :

$$C.L.\left|\begin{array}{lll} Encastrement \quad A: & v(0)=0 & \Rightarrow \quad 0=B+\dfrac{RL}{EI_Z\omega^2} \\ Encastrement \quad A: & v'(0)=0 & \Rightarrow \quad 0=A\omega-\dfrac{R}{EI_Z\omega^2} \\ Appui \quad B: & v(L)=0 & \Rightarrow \quad 0=A\sin\omega L+B\cos\omega L \end{array}\right.$$

D'où le système à résoudre :

$$\left|\begin{array}{c} 0=B+\dfrac{RL}{EI_Z\omega^2} \\ 0=A\omega-\dfrac{R}{EI_Z\omega^2} \\ 0=A\sin\omega L+B\cos\omega L \end{array}\right.$$

Pour que ce système admette des solutions autres que la solution banale tout égal à zéro, écrivons que le déterminant des coefficients des inconnues est nul.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dfrac{L}{EI_Z\omega^2} \\ \omega & 0 & -\dfrac{1}{EI_Z\omega^2} \\ \sin\omega L & \cos\omega L & 0 \end{vmatrix}=0$$

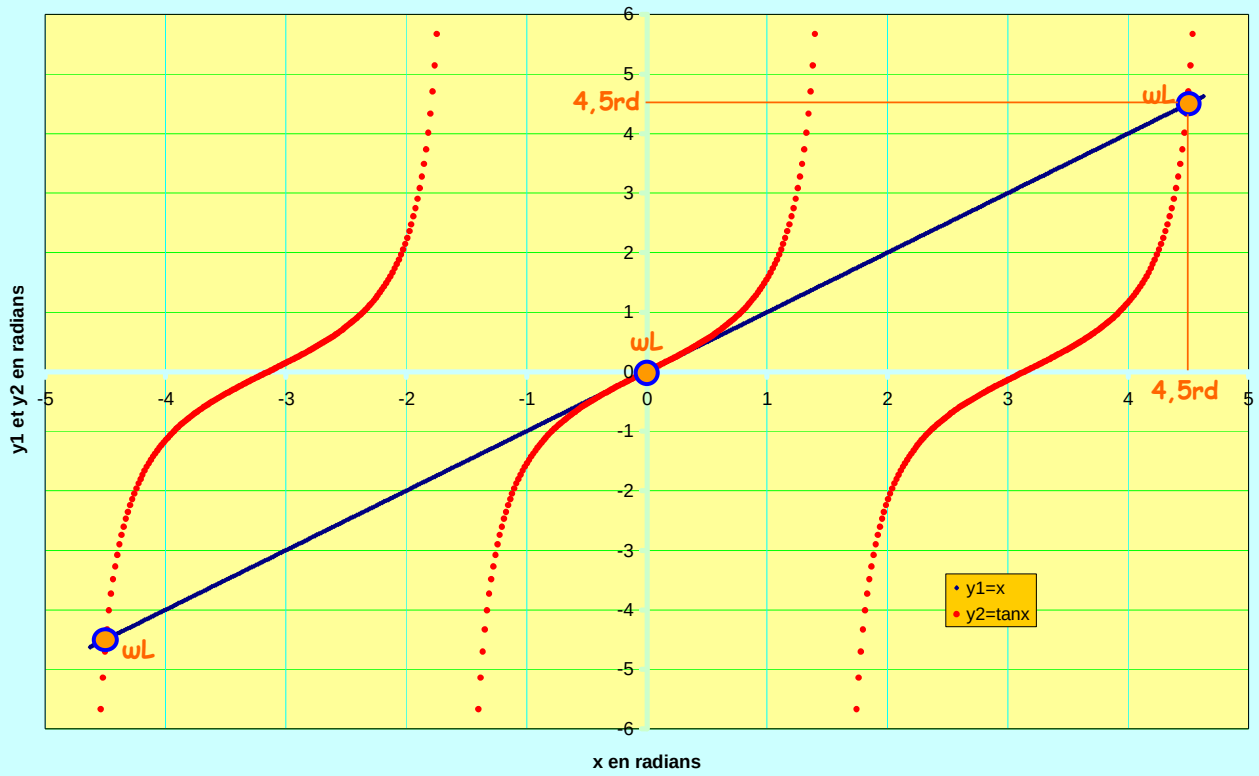
En développant le déterminant, nous obtenons :

$$\tan\omega L=\omega L$$

Equation transcendante dont la résolution ne peut être que graphique ou numérique.

Approchons la solution graphiquement. Traçons la fonction $y_1=\omega L$ et $y_2=\tan \omega L$. Les points d'intersection nous donnent les solutions. Nous retenons la plus petite racine non nulle :

$$\omega L=4{,}5$$



En utilisant une calculatrice, il est possible d'affiner la solution en utilisant un processus d'encadrement par dichotomie.

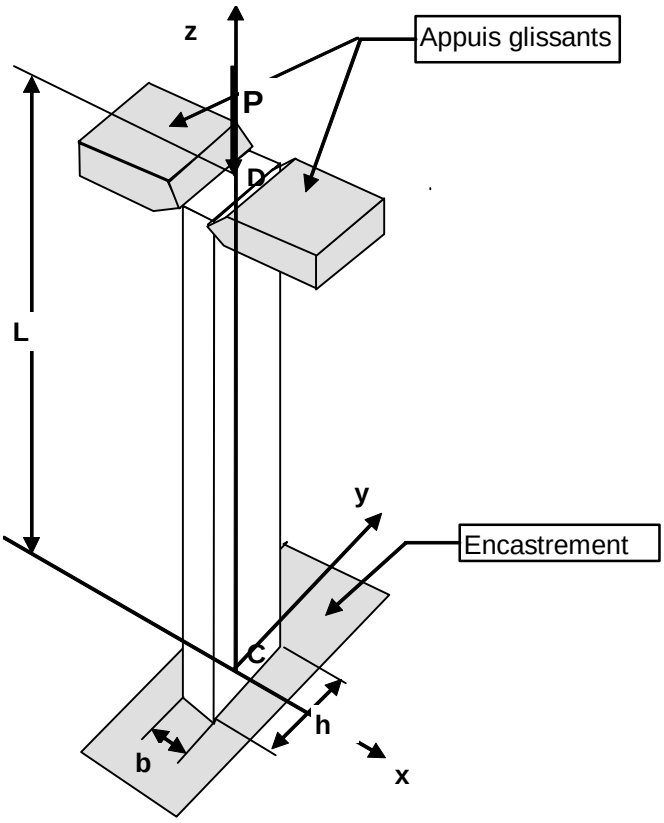
$$\omega L = 4{,}4934 rd$$

$$\omega^2 = \left(\frac{4{,}4934}{L}\right)^2 = \frac{P_c}{EI_Z}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI_{vv}}{L_F^2} \qquad P_c = \frac{4{,}4934^2 EI_Z}{L^2}$$

$$L_F = \mu L \qquad \mu = \frac{\pi}{4{,}4934} = 0{,}7$$

PROBLÈME N°32



Une barre en acier de longueur L et de section droite rectangulaire est encastrée à l'extrémité C et supporte une force centrée de compression P à l'autre extrémité D. Deux plaques en vé sont fixées à l'extrémité D permettant à la barre de flamber dans le plan zx **et aussi** dans le plan zy.

1°) Déterminer le rapport b/h pour que les contraintes critiques d'EULER soient égales dans les deux cas.

2°) Sachant que:

L = 600 mm
E = 210 GPa
P = 60 kN

déterminer les dimensions b et h de la section droite pour avoir un coefficient de sécurité de 2.5 en appliquant la théorie d'EULER. Vérifier que pour ces dimensions on peut effectivement appliquer la théorie d'EULER sachant que la limite élastique en compression du matériau vaut 240 MPa.

3°) Calculer le coefficient de sécurité en appliquant la théorie de DUTHEIL.

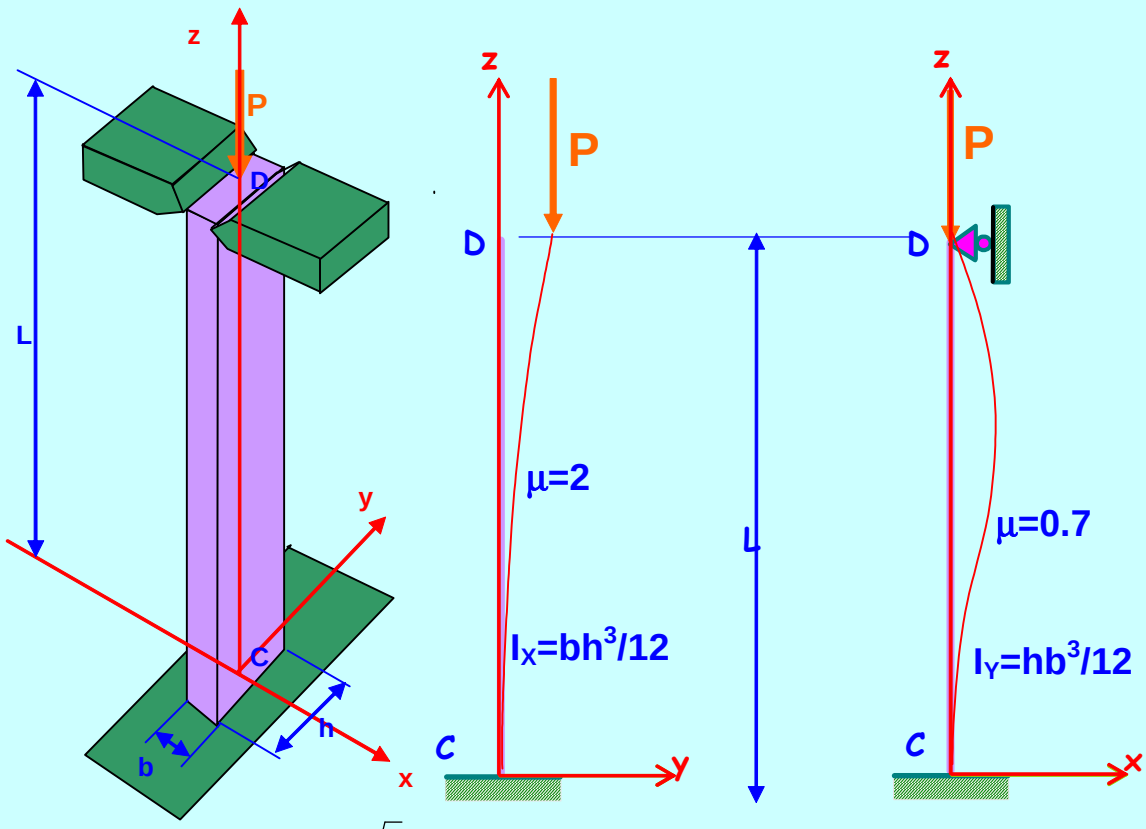
RÈPONSES N°32

1)

Même contrainte critique d'Euler σ_c implique même élancement λ .

$$\lambda_x = \frac{\mu L}{\rho_x} = \frac{\mu L}{\sqrt{\frac{I_x}{A}}} = \frac{2L}{\sqrt{\frac{bh^3}{12bh}}} = \frac{4L\sqrt{3}}{h}$$

$$\lambda_y = \frac{\mu L}{\rho_y} = \frac{\mu L}{\sqrt{\frac{I_y}{A}}} = \frac{0{,}7L\sqrt{12}}{b} = \frac{1{,}4L\sqrt{3}}{b}$$



$$\lambda_x = \frac{\mu L}{\rho_x} = \frac{\mu L}{\sqrt{\frac{I_x}{A}}} = \frac{2L}{\sqrt{\frac{bh^3}{12bh}}} = \frac{4L\sqrt{3}}{h}$$

$$\lambda_x = \lambda_y = \frac{4L\sqrt{3}}{h} = \frac{1{,}4L\sqrt{3}}{b} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{b}{h} = 0{,}35$$

2)

$$(\sigma_c)_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad \sigma = \frac{P}{A} \qquad \alpha = \frac{(\sigma_c)_E}{\sigma} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda_x P} = \frac{\pi^2 E \times 0{,}35h^4}{48L^2 P}$$

$$h^4 = \frac{48PL^2\alpha}{0{,}35\pi^2 E} \qquad \Rightarrow \qquad h = \sqrt[4]{\frac{48\times 60.10^3 \times 600^2 \times 2{,}5}{0{,}35\pi^2 \times 210.10^3}}$$

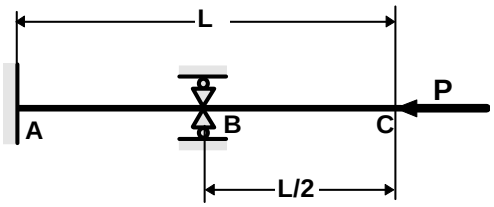
h=43,48mm b=0,35h=15,22mm

Euler est applicable si $\lambda \rangle \lambda_{\lim}$

$$\lambda_{\lim} = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{e'}}} = \pi\sqrt{\frac{210.10^3}{240}} = 92{,}9$$

$$\lambda_x = \lambda_y = \frac{4L\sqrt{3}}{h} = \frac{4\times 600\sqrt{3}}{43{,}48} = 95{,}6$$

PROBLÈME N°33



On veut vérifier au flambement la barre ABC ci-contre (de diamètre d et de longueur L). La liaison en A est un encastrement, la liaison en B un contact ponctuel sans frottement.

P = 110 kN d= 30 mm L = 0.6 m.

On utilise un acier de limite élastique σ_e = 240 MPa et de module de YOUNG E = 210 GPa.

La charge critique d'EULER vaut: $P_{CE} = \dfrac{5.415EI}{L^2}$. *On utilise la théorie de DUTHEIL.*

1°) Calculez:

a) μ (on rappelle que, quelles que soient les liaisons, la charge critique d'Euler peut se mettre sous la forme: $P_{CE} = \dfrac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2}$).

b) le rayon de giration ρ de la section (en mm).

c) l'élancement λ de la barre.

2°) La barre flambe-t-elle? (Justifiez votre réponse).

a) Si non, calculez le coefficient de sécurité.

b) Si oui, calculez le diamètre d (en mm) à donner à la barre (les diamètres varient de 2mm en 2mm).

RÈPONSES N°33

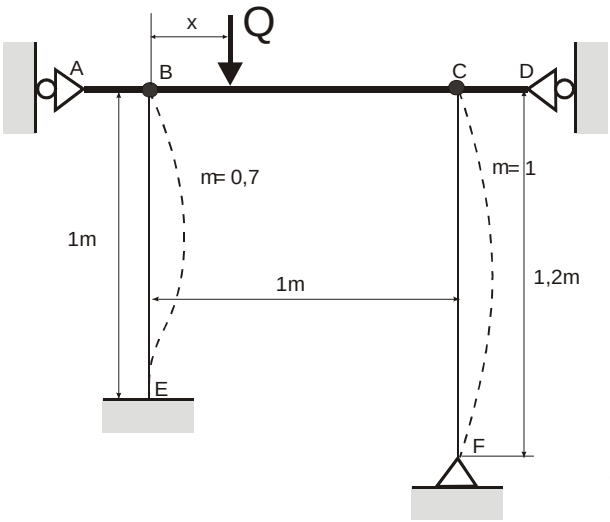
$$P_c = \frac{\pi^2 EI_{vv}}{L_F^2} \qquad P_c = \frac{5{,}415EI_Z}{L^2} \qquad L_F = \mu L \qquad \mu = \frac{\pi}{\sqrt{5{,}415}} = 1{,}35$$

$$\rho_v = \sqrt{\frac{I_{vv}}{A_0}} = \frac{d}{4} = 7{,}5mm$$

$$\lambda = \frac{L_F}{\rho_v} = \frac{\mu L}{\rho_v} = 108$$

$$\lambda_{\lim} = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{e'}}} = \pi\sqrt{\frac{210.10^3}{240}} = 92{,}93$$

PROBLÈME N°34



La barre rigide ABCD est supportée par deux colonnes BE et CF susceptibles de flamber (voir figure ci-contre). Les liaisons ponctuelles en A et D empêchent les déplacements latéraux des points B et C. Les liaisons en B, C et F sont des verrous, la liaison en E est un encastrement. Les deux colonnes BE et CF ont une section droite carrée de 16 mm de côté. Le module de YOUNG du matériau vaut 210 GPa, ses limites élastiques en traction et compression sont identiques et valent 240 MPa.

1°) Montrer que l'on peut appliquer la théorie d'EULER pour calculer les charges critiques qui font flamber les colonnes BE et CF. Calculer alors ces charges critiques (en kN), en appliquant la théorie d'EULER.

2°) Une force verticale Q agit sur la barre rigide ABCD à une distance x de la colonne BE.

a) <u>La distance x vaut 0.4 m</u>.

Calculer (en kN) la valeur critique de la charge Q qui fait flamber l'une des deux colonnes, en précisant la colonne concernée.

b) <u>La distance x peut varier de 0 à 1 m</u>.

Pour quelle valeur de x (en mm) la valeur critique de Q est-elle maximum? En déduire (en kN) la valeur critique maximum de Q.

RÈPONSES N°34

1)

$$\lambda_{\lim} = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{e'}}} = \pi\sqrt{\frac{210.10^3}{240}} = 92{,}93$$

$$\rho_v = \sqrt{\frac{I_{vv}}{A_0}} = \sqrt{\frac{a^4}{12a^2}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

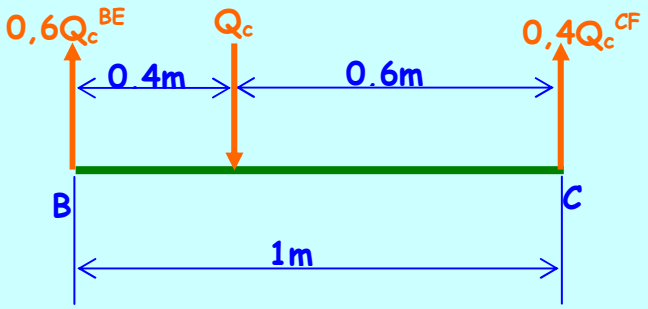
$$\lambda = \frac{L_F}{\rho_v}\begin{cases} \lambda_{BE} = \dfrac{0{,}7\times 1000}{\dfrac{16}{2\sqrt{3}}} = 151{,}55 \\ \lambda_{CF} = \dfrac{1200}{\dfrac{16}{2\sqrt{3}}} = 259{,}8 \end{cases}$$

$\lambda_{CF} \rangle \lambda_{BE} \rangle \lambda_{\lim}$ Euler est applicable

$$P_c = \frac{\pi^2 EI_{vv}}{L_F^2} = \frac{\pi^2 EI_{vv}}{(\mu L)^2} \begin{cases} P_c^{BE} = \dfrac{\pi^2 \times 210.10^3 \times 16^4}{(0{,}7 \times 1000)^2 \times 12} = 23{,}1kN \\ P_c^{CF} = \dfrac{\pi^2 \times 210.10^3 \times 16^4}{1200^2 \times 12} = 7{,}86kN \end{cases}$$

2)

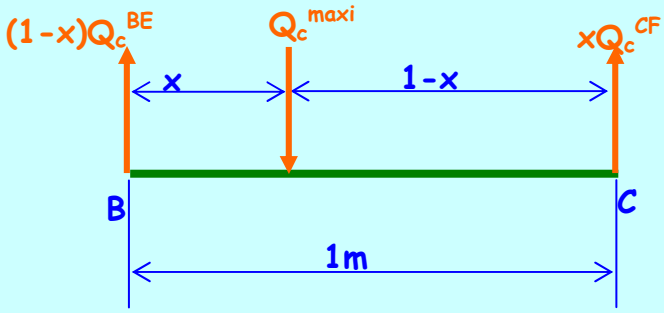
a)



$$P_c^{BE} = 23{,}1kN = 0{,}6Q_c^{BE} \quad \Rightarrow \quad Q_c^{BE} = 38{,}5kN$$
$$P_c^{CF} = 7{,}86kN = 0{,}4Q_c^{CF} \quad \Rightarrow \quad Q_c^{CF} = 19{,}65kN$$

Donc Q_c=18,7kN et c'est la colonne CF qui flambe

b)



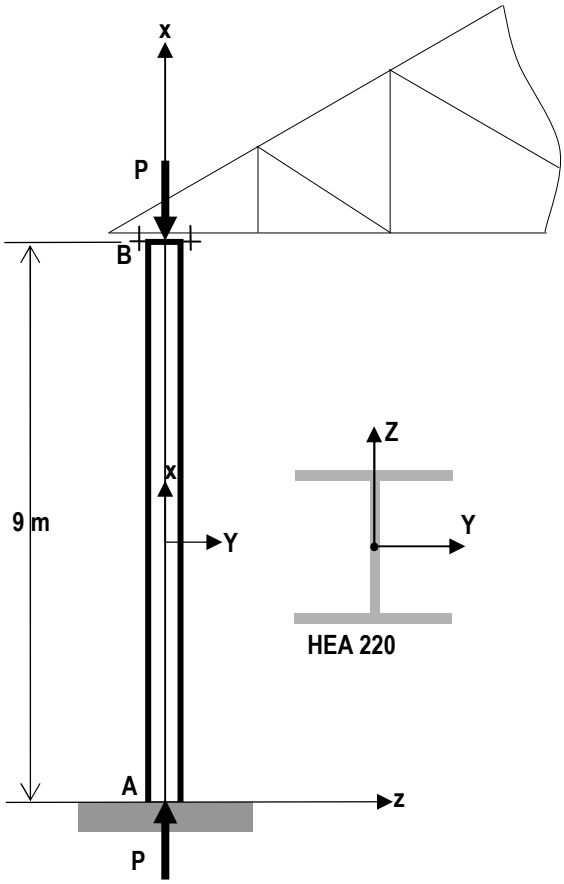
Lorsque les deux barres flambent en même temps Qc est alors maxi.

$$P_c^{BE} = (1-x) \times Q_c^{BE} \qquad P_c^{CF} = x \times Q_c^{CF}$$

$$Q_c^{\max i} = Q_c^{BE} = Q_c^{CF} \qquad \frac{P_c^{BE}}{1-x} = \frac{P_c^{CF}}{x} \qquad \frac{23{,}1}{1-x} = \frac{7{,}86}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}254m$$

$$Q_c^{\max i} = \frac{P_c^{CF}}{x} = \frac{7{,}86}{0{,}254} = 31kN$$

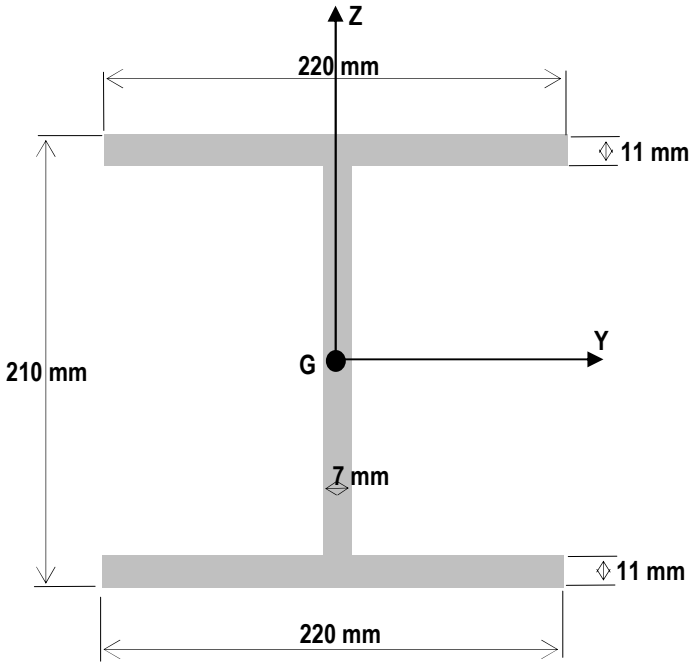
PROBLÈME N°35



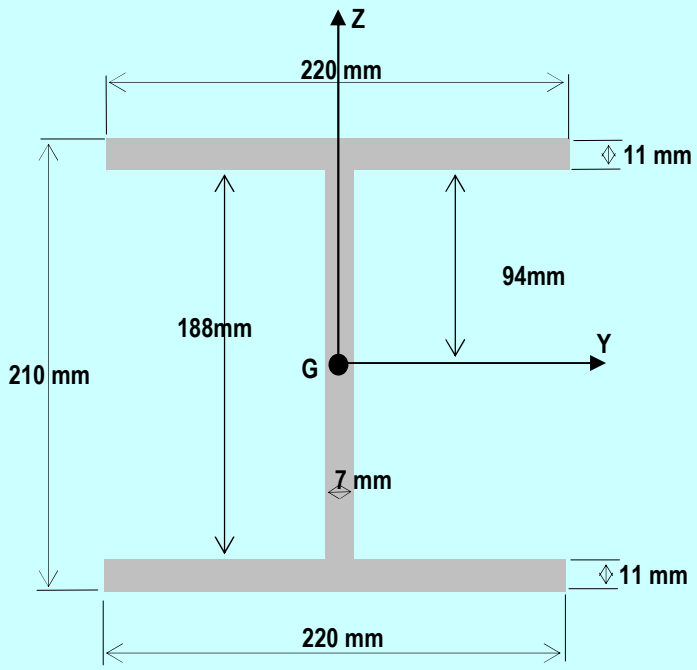
Considérons la structure représentée sur la figure ci-dessous. Le poteau AB de longueur 9m, dont la section droite est un profilé HEA 220 est soumis à un effort de compression P. Il est encastré à son extrémité A, la liaison en B est considérée comme une articulation dans le plan xz (rotation possible autour de y soit μ=0,7) et comme un encastrement dans le plan yz (rotation empêchée autour de x soit μ=0,5).

Le matériau est un acier E240 dont les caractéristiques élastiques sont : $\sigma_e=\sigma_{e'}=240$MPa et E=210GPa.

1) Calculer les moments d'inertie principaux I_Y et I_Z de la section droite de la poutrelle (en cm^4).
2) Déterminer le plan dans lequel le poteau risque de flamber, en calculant les élancements dans les deux plans.
3) En appliquant la théorie d'Euler, calculer la charge maximale (en kN) de compression admissible pour avoir un coefficient de sécurité de 2.
4) *En prenant la charge calculée en 3), calculer le coefficient de sécurité d'après la théorie de Dutheil.*



RÈPONSES N°35



1°) $I_Y = \frac{188^3.7}{12} + 2\left(\frac{11^3.220}{12} + 99{,}5^2.11.220\right) = 5184{,}21cm^4$ $I_Z = 2\left(\frac{220^3.11}{12}\right) + \frac{7^3.188}{12} = 1952{,}27cm^4$

$A = 220.11.2 + 188.7 = 6156mm^2$

2°) $\begin{cases} \rho_Z = \sqrt{\frac{I_Z}{A}} = 5.631cm \Rightarrow \lambda_{xz} = \frac{0{,}7l}{\rho_Z} = 111{,}88 \\ \rho_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = 9{,}177cm \Rightarrow \lambda_{yz} = \frac{0{,}5l}{\rho_Y} = 49{,}03 \end{cases}$

Flambage dans le plan xz

3°) $\alpha_E \sigma \leq \sigma_C$ $\sigma_C = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{xz}^2}$ $P = 509{,}66kN$

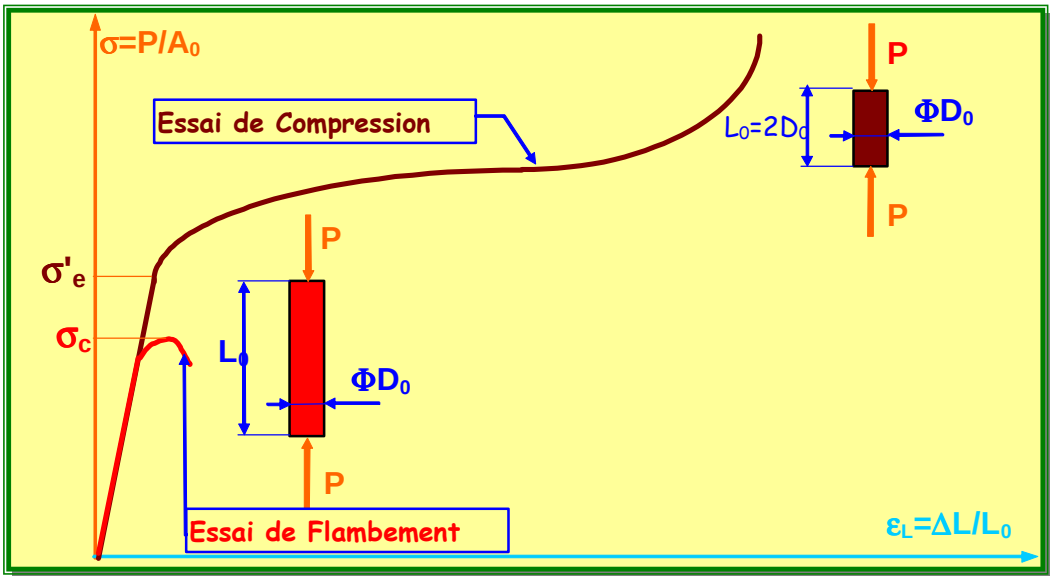
4°) $k\sigma \leq \sigma_e$ $k = 2{,}236$ $\alpha_D = 1{,}296$

FLAMBEMENT

1. Définition :

Effectuons un essai de compression sur une éprouvette longue, de même ordre de grandeur que celle utilisée en traction. Nous constatons qu'elle fléchit avant d'atteindre la limite d'élasticité en compression .La flèche augmente considérablement a la suite d'une instabilité, entrainant la ruine de la structure. Ce phénomène est le flambage. La valeur maximum de la contrainte de compression est la contrainte critique de flambage. C'est le seul cas où la contrainte de compression est prise positive par convention. Elle est donnée par :

$$\sigma_c = \frac{P_c}{A_0}$$



Ce phénomène de flambement est très difficile à prévoir car les imperfections géométriques de la poutre, de sa section, du matériau et des conditions d'applications des sollicitations et des liaisons rentrent pour une grande part dans le flambement.

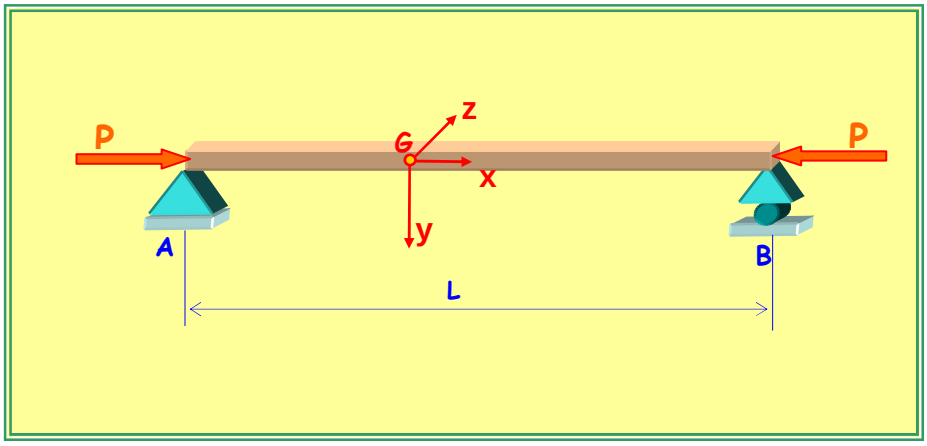
Pour étudier le flambement, il faut abandonner une des hypothèses fondamentales du cours sur la théorie des poutres. Lors du flambement les déplacements ne sont plus petits, nous ne pouvons plus les négliger et la théorie du premier ordre ne convient pas à expliquer le phénomène. Nous devons considerer une théorie au deuxième ordre, ou les configurations initiales et finales des poutres ne coïncident plus. Nous allons considérer la poutre dans son état déformée pour calculer le Torseur de Section.

2 Théorie d'EULER

2.1 Cas de base

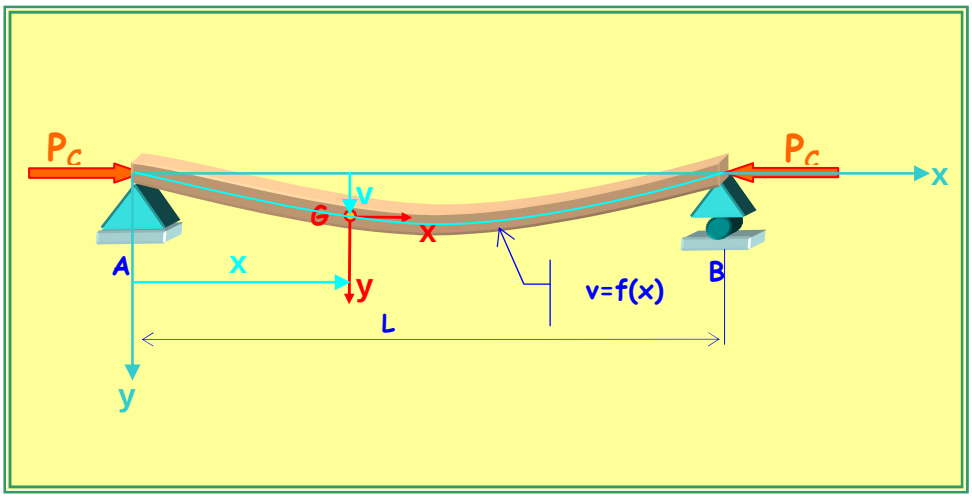
Considérons une barre de longueur L, articulée à ses deux extrémités, soumise à un effort de compression. Les articulations sont parfaites, c'est à dire dans toutes les directions. La poutre flambe, c'est à dire fléchit dans le plan perpendiculaire à l'inertie minimum (voir § sur les inerties).

Avant Déformation :



$$\begin{cases} \overrightarrow{R_G} = \overrightarrow{F_B} \Rightarrow \begin{vmatrix} N_x = -P \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \overrightarrow{M_G} = \overrightarrow{GB \wedge F_B} \Rightarrow \vec{0} \end{cases}$$

Après Déformation :



$$\begin{cases} \overrightarrow{R_G} = \overrightarrow{F_B} \Rightarrow \begin{vmatrix} N_x = -P \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \overrightarrow{M_G} = \overrightarrow{GB \wedge F_B} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ M_Z = -P_c v \end{vmatrix} \end{cases}$$

Appliquons l'équation de la déformée vue au chapitre flexion : $v'' = \dfrac{M_Z}{EI_Z}$.

Le moment fléchissant en G : $M_Z = -P_c v$ d'où : $EI_Z v'' + P_c v = 0$ Posons $\omega^2 = \dfrac{P_c}{EI_Z}$

$$v'' + \omega^2 v = 0$$

Equation différentielle du second ordre à coefficient constant et sans second membre. La solution générale s'écrit :

$$v = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$$

Les conditions aux limites aux appuis nous permettent de calculer les constantes d'intégration A et B.

$$C.L.\left|\begin{array}{l} Appui\ A:\quad v_{(0)} = 0 \quad\Rightarrow\quad A = 0 \\ Appui\ B:\ v_{(L)} = 0 \quad\Rightarrow\quad B\sin(\omega L) = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} B \neq 0 \\ \sin\omega L = 0 \quad\Rightarrow\quad \omega L = k\pi \end{array}$$

L'équation de la déformée s'écrit : $v_{(x)} = B\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ et compte-tenu de $\omega^2 = \frac{P_c}{EI_Z}$

$$\boxed{P_c = \frac{k^2\pi^2 EI_Z}{L^2}}$$

La première charge critique est donnée pour k=1 :

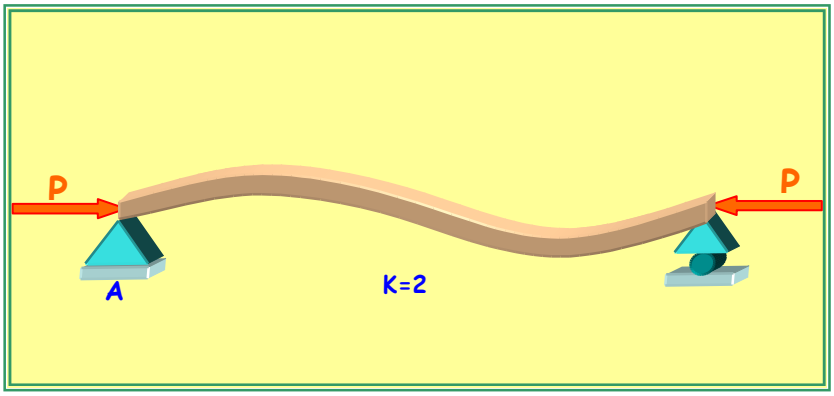
$$\boxed{P_c = \frac{\pi^2 EI_Z}{L^2}}$$

et la déformée s'écrit :

$$\boxed{v_{(x)} = B\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)}$$

La déformée est donc sinusïodale, mais cette théorie énoncée par Euler ne permet pas de résoudre totalement le problème. En effet la charge critique P_c est indépendante de la flèche, et la flèche ne fait pas intervenir le matériau ce qui parait surprenant. Cette théorie n'est qu'une première approche.

On peut de la même manière calculer les autres valeurs de charges critiques pour $k \in \{2,3,4...\}$. Les déformées associées à ces différentes charges critiques sont appelées modes de flambement.



Si k=2 $\quad P_c = \frac{4\pi^2 EI_Z}{L^2}$

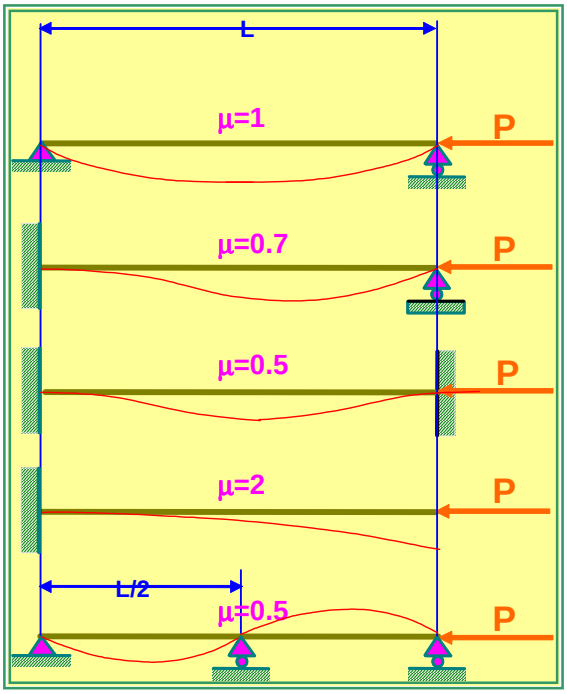
$$v_{(x)} = B\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

2.2 influence des liaisons.

En se rapportant au cas de base, dans tous les cas, la charge critique peut se mettre sous la forme :

$$P_c = \frac{\pi^2 E I_{vv}}{L_F^2}$$

Où I_{vv} est l'inertie minimum , L_F est la longueur fictive de flambage , avec $L_F = \mu L$ et μ un coefficient qui tient compte de l'influence des liaisons.



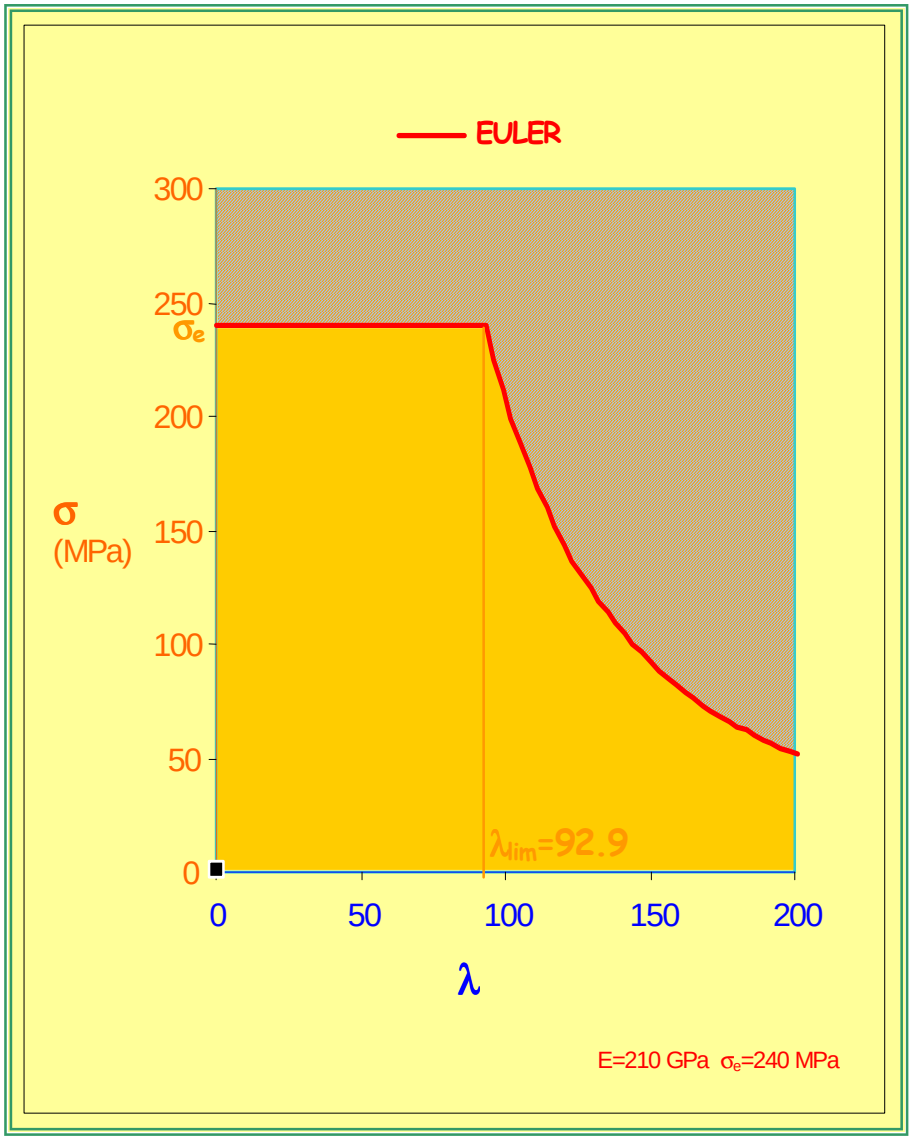
3 Contrainte critique d'EULER

La contrainte critique d'EULER est donnée par :

$$(\sigma_c)_E = \frac{P_{cr}}{A_0} = \frac{\pi^2 E I_{vv}}{L_F^2 A_0}$$

Sachant que : $\rho_v = \sqrt{\frac{I_{vv}}{A_0}}$ est le rayon de giration par rapport à l'axe v. et que $\lambda = \frac{L_F}{\rho_v}$ est l'élancement de la poutre, nous avons : $(\sigma_c)_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

Nous pouvons tracer la courbe de flambage d'EULER en fonction des élancements pour un matériau donné. La courbe d'EULER doit être limitée par la limite d'élasticité de compression, ce qui nous impose un élancement limite $\lambda_{\lim} = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{e'}}}$.



Si $\lambda \rangle \lambda_{\lim}$, nous faisons une vérification à la condition de non flambage par :

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \langle (\sigma_c)_E$$

Si $\lambda \langle \lambda_{\lim}$, nous faisons une vérification à la compression pure par : $\sigma = \frac{P}{S_0} \langle \sigma_{e'}$

La courbe d'EULER est composée de deux courbes d'équations différentes, ce qui n'est pas satisfaisant. De plus, pour de faibles élancements, les points expérimentaux sont situés au dessous de la courbe. La théorie d'Euler a ses limitations, et ne permet de décrire que le moment ou la poutre flambe.

UNITÉS DE MESURE

Les unités de mesure légales en France font l'objet du décret du 3 Mai 1961. Le système ainsi défini est le système métrique décimal, à six unités de base, appelé système international SI.

1. Les unités de base sont:

Grandeur	nom	symbole
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Intensité	ampère	A
Température	degré Kelvin	K
Intensité lumineuse	candela	cd
Quantité de matière	mole	mol

2. Les unités secondaires concernant le Dimensionnement des Structures sont:

Le newton (symbole N) : unité de force.

Le newton-mètre (symbole Nm) : unité de moment.

Le joule (symbole J) : unité d'énergie, de travail et de chaleur.

Le pascal (symbole Pa) unité de contrainte et de pression.

$$1Pa = 1N/m^2$$

Le watt (symbole W) : unité de puissance.
Le radian (symbole rd) : unité d'angle.

3. Parmi les multiples des unités secondaires, on utilise en Dimensionnement des Structures:

Le kilonewton (symbole kN) : unité de force.

$$1kN = 10^3 N$$

Le mégapascal (symbole MPa) : unité de contrainte.

$$1MPa = 10^6 Pa = 1N/mm^2$$

Le gigapascal (symbole GPa) : unité de contraintes.

$$1GPa = 10^9 Pa = 10^3 MPa = 1kN/mm^2$$

4. Les unités, hors système, autorisées sont:

Le degré d'angle (symbole °) : unité d'angle.
La calorie (symbole cal) : unité de chaleur (1cal = 4.18 J).
Le degré de température celcius (symbole C)
……

ANNEXES

ANNEXE N°1-COEFFICIENT DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE EN TORSION-FLEXION

TORSION

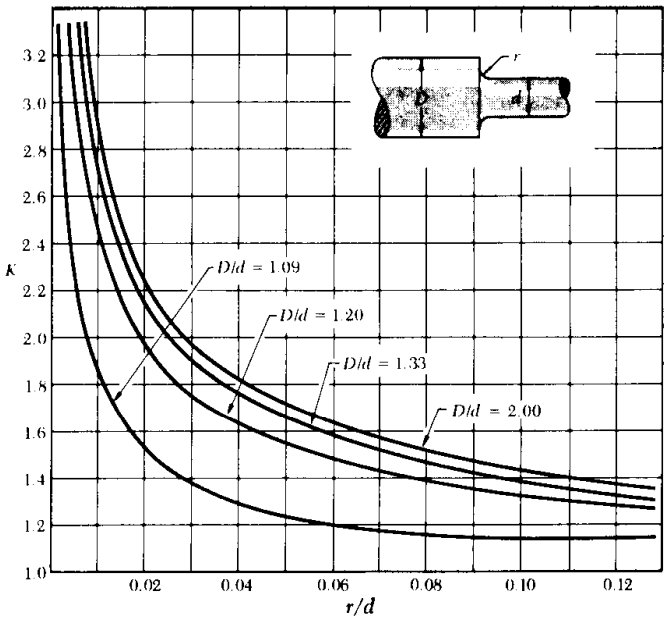


Fig. 3.31 Stress-concentration factors for fillets in circular shafts.

†L. S. Jacobsen, "Torsional-Stress Concentrations in Shafts of Circular Cross Section and Variable Diameter," *Trans. A.S.M.E.*, vol. 47 (1925), pp. 619-638.

TORSION

FLEXION

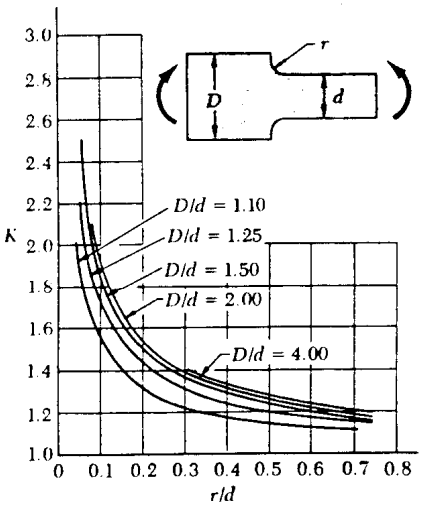


Fig. 4.27 Stress-concentration factors for *flat bars* with fillets under pure bending.†

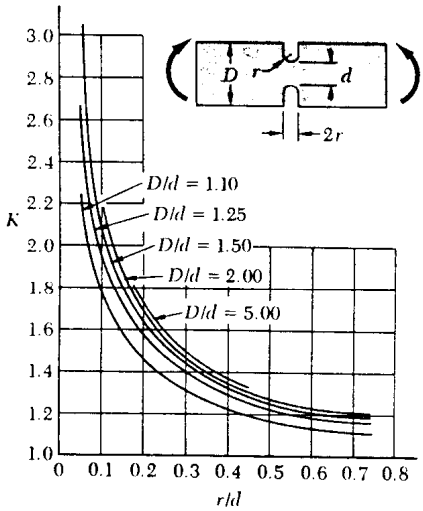
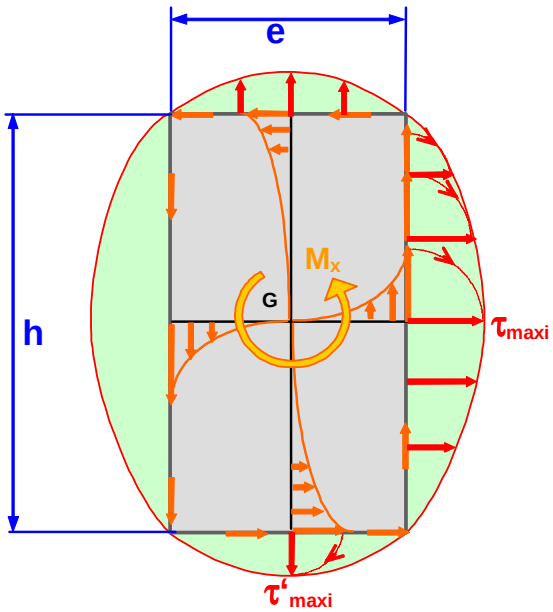


Fig. 4.28 Stress-concentration factors for *flat bars* with grooves under pure bending.†

ANNEXE N° 2 TORSION DES SECTIONS RECTANGULAIRES



La figure ci-contre permet de visualiser la répartition des contraintes tangentielles de torsion dans une barre à section rectangulaire.

On montre alors, en élasticité, que:

1°) La relation entre le moment de torsion et l'angle unitaire de torsion est:

$$\boxed{\theta_x' = \frac{M_x}{GJ}}$$

où J est le **moment d'inertie de torsion** de la section rectangulaire. Il se calcule par la relation suivante:

$$\boxed{J = k_1 e^3 h}$$

où k_1 est une fonction du rapport h/e donné dans le tableau suivant:

h/e	1	1.5	2	3	4	5	6	8	10	∞
k_1	0.141	0.196	0.229	0.263	0.281	0.291	0.299	0.307	0.313	1/3
k_2	0.208	0.231	0.246	0.267	0.282	0.291	0.299	0.307	0.313	1/3
k_3	1.000	0.859	0.795	0.753	0.745	0.744	0.743	0.742	0.742	0.742

N.B. Lorsque la section droite est circulaire la relation entre le moment de torsion et l'angle unitaire de torsion est:

$$\boxed{\theta_x' = \frac{M_x}{GI_G}}$$

Le moment d'inertie de torsion est alors le **moment d'inertie polaire** du cercle ($\frac{\pi D^4}{32}$).

2°) La contrainte maximum de torsion (au milieu des grands côtés du rectangle) vaut:

$$\boxed{\tau_{\max i} = \frac{|M_x|}{k_2 e^2 h}}$$

où k_2 est une fonction du rapport h/e donné dans le tableau précédent.

3°) La contrainte au milieu des petits côtés du rectangle vaut:

$$\boxed{\tau'_{\max i} = k_3 \tau_{\max i}}$$

où k_3 est une fonction du rapport h/e donné dans le tableau précédent.