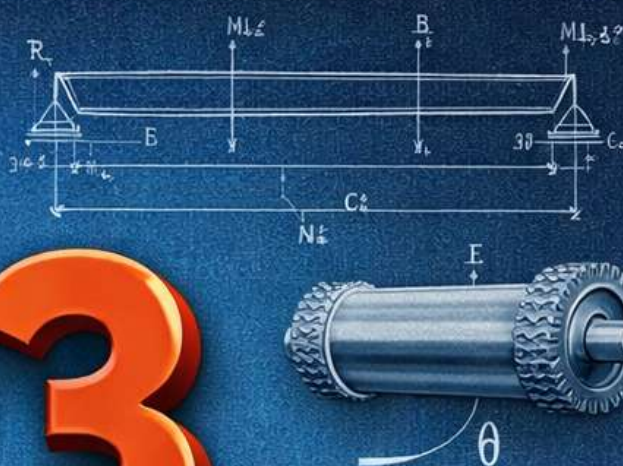
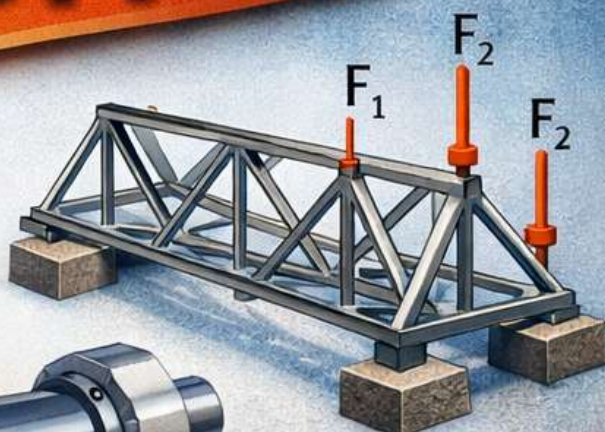
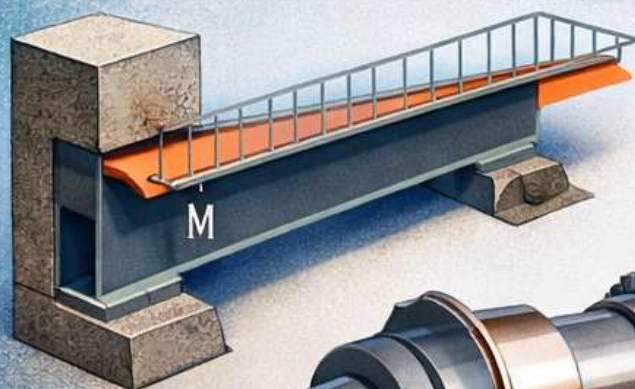




# 23

## Exercices Corrigés de RDM



[www.cours-genie-civil.com](http://www.cours-genie-civil.com)  
Résistance des Matériaux • Analyse et Résolution

Centre de formation Cnam – INPHB

Chaire des travaux publics

2015-2016

Résistance des matériaux pour l'ingénieur constructeur CCV 107

Professeur : TRA Bi et ZAGBAI

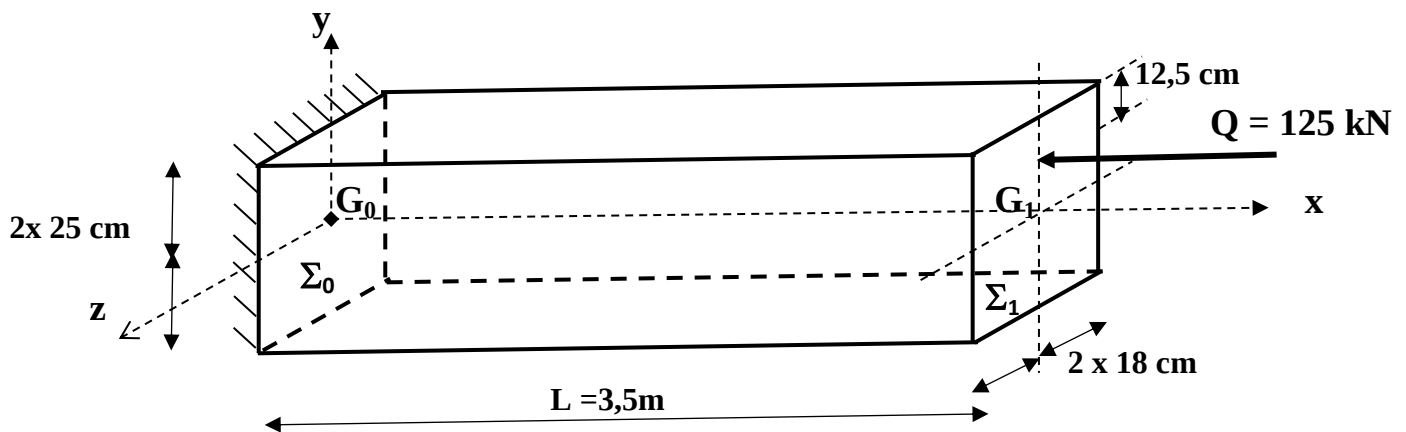
Examen de la deuxième session

*Pycopies et TD autorisés*

Durée : 3 heures

*Calculatrices autorisée*

**Exercice 1 : Etude d'une poutre console en béton armé**



Poids propre de la poutre : Densité du béton 2,5

I.1 Indiquer la nature des sollicitations dans la poutre

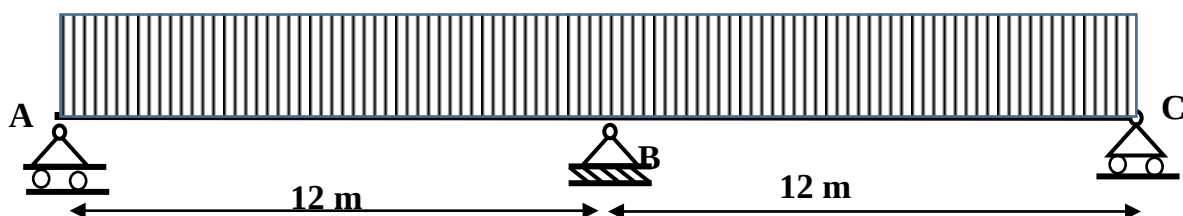
I.2 Déterminer et représenter les efforts internes dans la poutre

I.3 Déterminer la contrainte normale dans les sections  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$

I.4 Déterminer et schématiser les contraintes tangentiels dans les sections  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$

**Exercice 2 : Etude d'une poutre continue à inertie constante**

$Q = 1,5 \text{ t/m}$

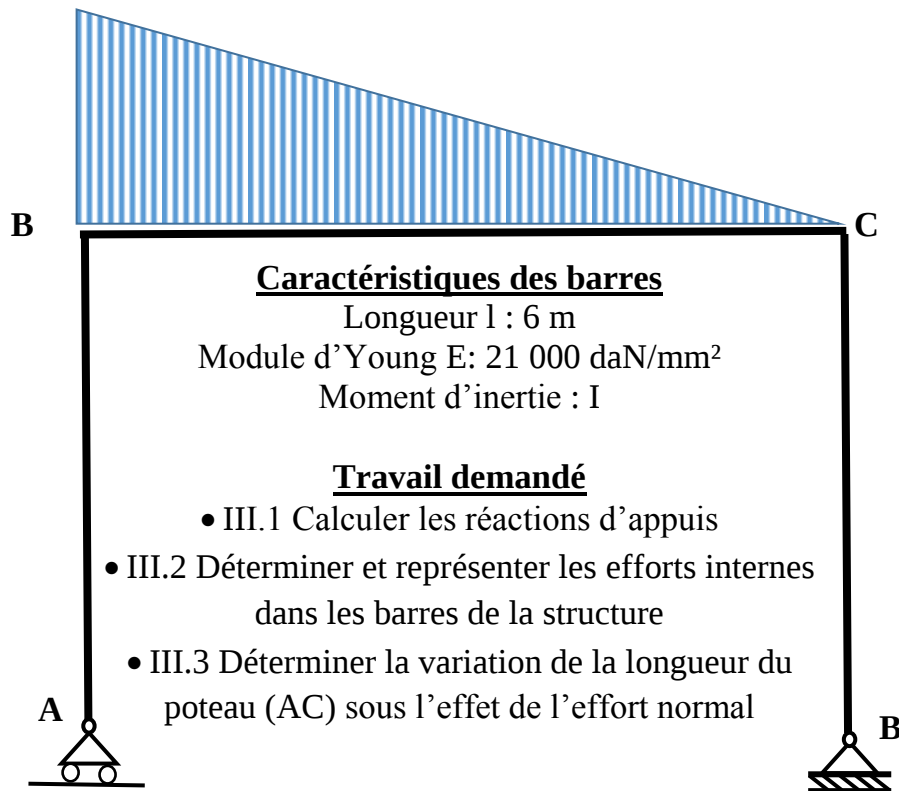


1/ Déterminer et représenter les efforts internes dans la poutre continue ci-dessus d'inertie I et de Module d'élasticité longitudinale E

2/ Calculer les réactions d'appuis (moments sur appuis, réactions verticales, réactions horizontales)

**Exercice 3 : Etude d'un portique isostatique dont la traverse est soumise à une charge répartie triangulaire variant de  $q_B$  à 0**

$q_B = 15 \text{ kN/m}$



Consignes Générales

- La compréhension des questions fait partie de l'évaluation.
- Toute donnée manquante est laissée à votre initiative.
- S'il vous manque un résultat intermédiaire, faites des hypothèses cohérentes avec les données de l'examen.
- Seules les réponses faisant référence au numéro de la question seront évaluées.



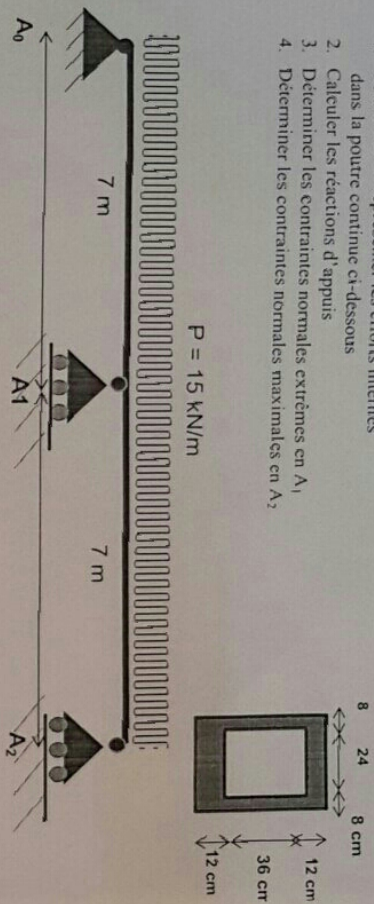
- 2) Déterminer la section  $S_2$  qui permet de garder la poutre en position horizontale.
- 3) Calculer  $\alpha$  et déterminer les sections  $S_1$  et  $S_2$  pour que les deux barres restent dans le domaine élastique.

Consignes Générales

- La compréhension des questions fait partie de l'évaluation.
- Toute donnée manquante est laissée à votre initiative.
- Si vous manquez un résultat intermédiaire, faites des hypothèses cohérentes avec les données de l'examen.
- Seules les réponses faisant référence au numéro de la question seront évaluées.

**Exercice 2 :**  
**Étude d'une poutre continue à section creuse sur trois appuis**

1. Déterminer et représenter les efforts internes dans la poutre continue ci-dessous
2. Calculer les réactions d'appuis
3. Déterminer les contraintes normales extrêmes en  $A_1$
4. Déterminer les contraintes normales maximales en  $A_2$



**Exercice 2 :**

Une poutre horizontale rigide AB (voir figure ci-dessous), de longueur  $l$ , est fixée à deux barres cylindriques élastiques verticales  $AA'$  et  $BB'$  aux points A et B : On applique une force au point C de la barre AB.

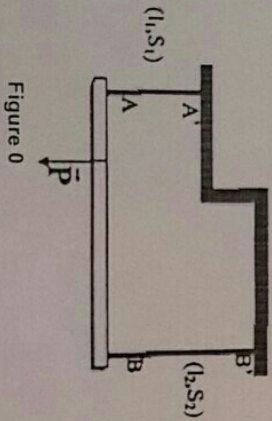


Figure 0

On néglige les poids propres de AB,  $AA'$  et  $BB'$ .  
On donne  $P = 3000 \text{ N}$  ;  $l_1 = 500 \text{ mm}$  ;  $l_2 = 700 \text{ mm}$ ,  $E = 20 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ ,  $S_1 = S_2 = 40 \text{ mm}^2$ .

- 1) Calculer les allongements  $\Delta l_1$  et  $\Delta l_2$  des deux barres  $AA'$  et  $BB'$ , représenter l'allure de la poutre AB après chargement.

Centre de formation Cnam – INPHB

Chaire des travaux publics

2015-2016

Résistance des matériaux pour l'ingénieur constructeur CCV 107

Professeur : TRA BI et ZAGBAI

Examen de la première session

Durée : 3 heures

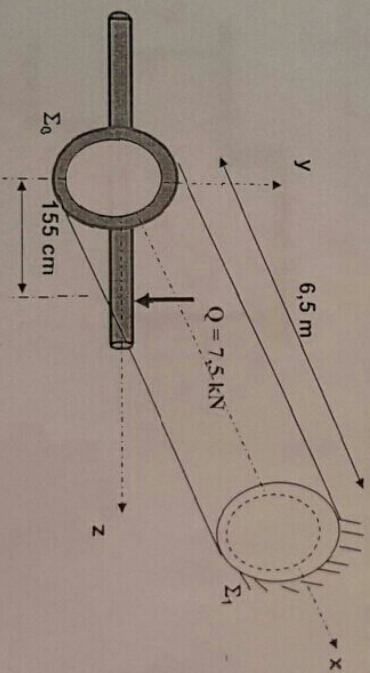
*Polycopies et TD autorisés*

*Calculatrices autorisées*

Exercice 1 :

Étude d'un tronçon de poutre cylindrique

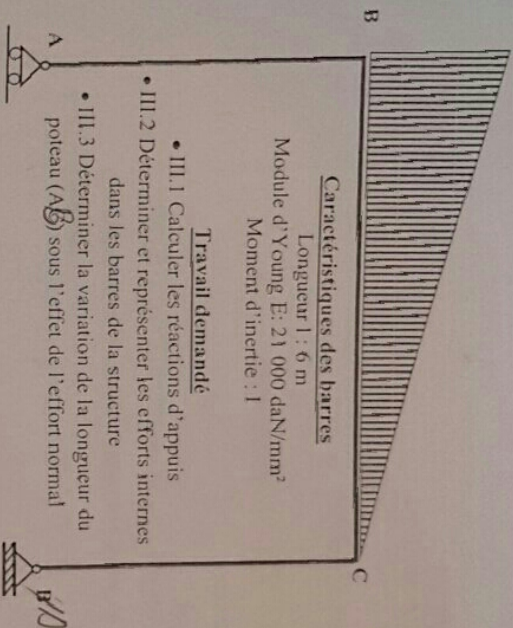
1. Indiquer la nature des efforts auxquels est soumise une section courant de la poutre
2. Donner les expressions des différents moments dans une section courante de la poutre et leurs valeurs dans les sections  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$
3. Calculer les contraintes tangentielles dans les sections  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$
4. Calculer les contraintes normales dans les sections  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$



Rayon extérieur du cylindre : 40 cm ; épaisseur : 3 cm

**Exercice 3 :** Etude d'un portique isostatique dont la traverse est soumise à une charge répartie triangulaire variant de  $q_0$  à 0

$$q_0 = 15 \text{ kN/m}$$



Consignes Générales

- La compréhension des questions fait partie de l'évaluation.
- Toute donnée manquante est laissée à votre initiative.
- S'il vous manque un résultat intermédiaire, faites des hypothèses cohérentes avec les données de l'examen.
- Seules les réponses faisant référence au numéro de la question seront évaluées.

Centre de formation Cnam – INPHB

Chaire des travaux publics

2015-2016

Résistance des matériaux pour l'ingénieur constructeur CCV 107

Professeur : TRA BI et ZAGBAI

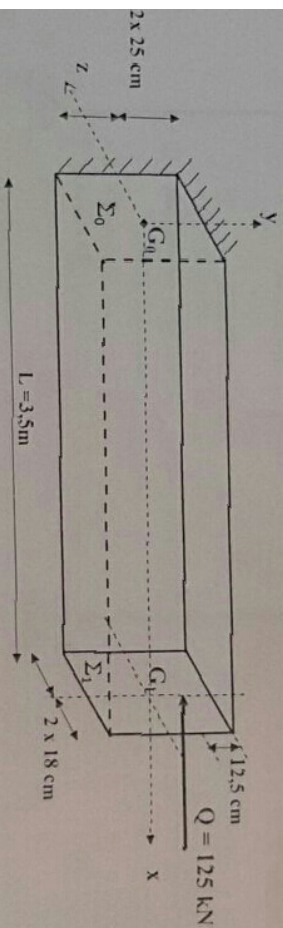
Examen de la deuxième session

Polyscopies et TD autorisés

Durée : 3 heures

Calculatrices autorisées

Exercice 1 : Etude d'une poutre console en béton armé

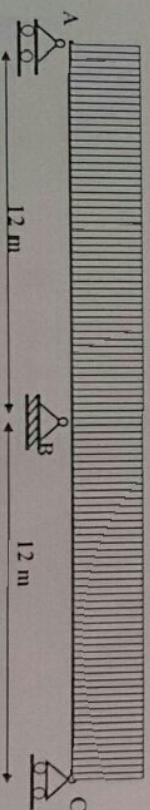


Poids propre de la poutre : Densité du béton 2,5

- 1.1 Indiquer la nature des sollicitations dans la poutre
- 1.2 Déterminer et représenter les efforts internes dans la poutre
- 1.3 Déterminer la contrainte normale dans les sections  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$
- 1.4 Déterminer et schématiser les contraintes tangentielles dans les sections  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$

Exercice 2 : Etude d'une poutre continue à inertie constante

$$Q = 1,5 \text{ t/m}$$



- 1/ Déterminer et représenter les efforts internes dans la poutre continue ci-dessus d'inertie I et de Module d'élasticité longitudinale E

- 2/ Calculer les réactions d'appuis (moments sur appuis, réactions verticales, réactions horizontales)

Centre de formation Cnam – INPHB

Chaire des travaux publics

2016-2017

Résistance des matériaux pour l'ingénieur constructeur CCV 107

Professeurs : TRA Bi et ZAGBAI Arnaud

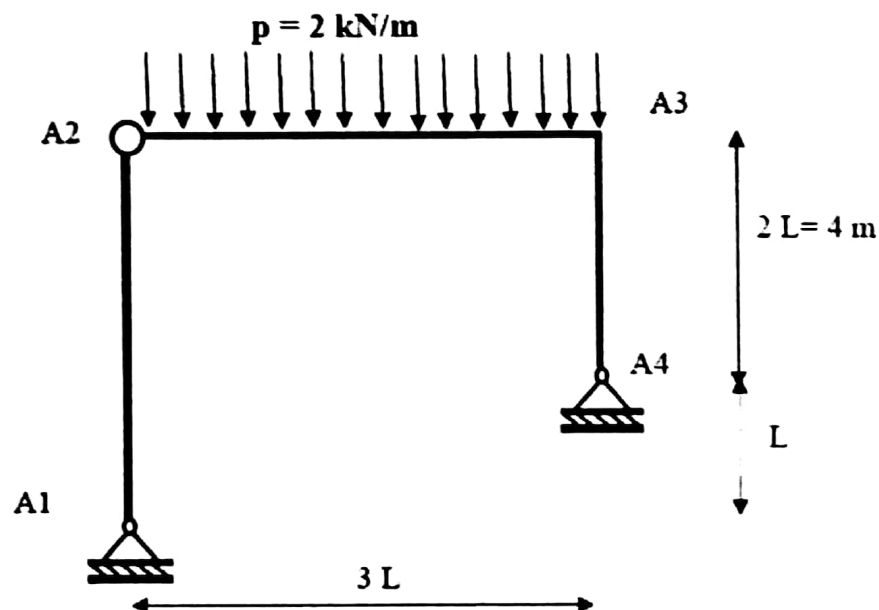
Examen de la première session

*Polycopies et TD autorisés*

Durée : 3 heures

*Calculatrices autorisées*

Exercice 1 : (6 points)



1/ Calculez les réactions d'appuis

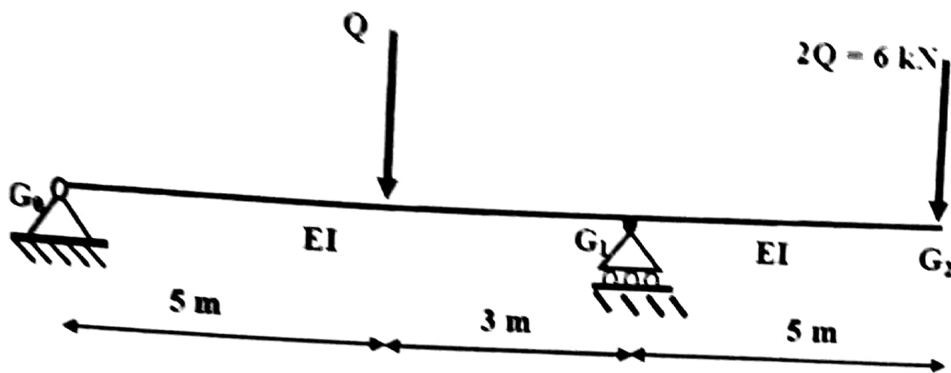
2/ Déterminez et représentez les efforts internes (M, N, T)

3/ Déterminez la variation de la longueur du poteau (A1, A2)

Module d'Young  $E$ : 21 000 daN/mm<sup>2</sup> Moment d'inertie :  $I$ . Section  $S = 40 \text{ cm}^2$



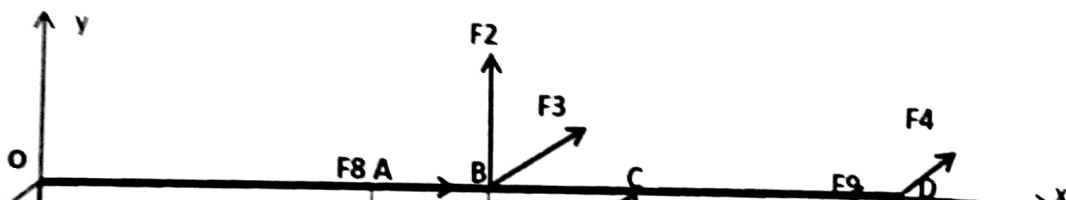
**Exercice 2 : (4 points)**



- 1/ Représenter les diagrammes des efforts internes dans la poutre ci-dessus
- 2/ Calculer les contraintes normales extrêmes dues au moment fléchissant dans les sections d'appui

**Exercice 3 : (6 points)**

On considère un arbre de transmission donné par la figure ci-dessous et les actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées. On se propose de calculer la résistance de l'arbre.

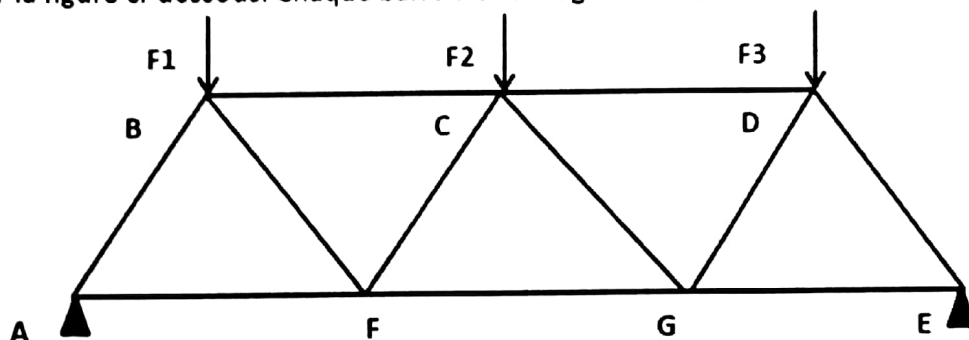


- 3) Calculer le diamètre minimal ( $d$ ) de l'arbre à partir de la condition de rigidité suivante :  $\theta \leq \theta_{lim}$  avec  $\theta = |M_t| / G \cdot I \cdot S$  ( $\theta$  trouvé à partir de la valeur absolue de  $M_t$ ) ; où  $I$  = module d'inertie de la section circulaire  $S$ .
- 4) Pour ce diamètre, calculer la contrainte tangentielle maximale en torsion et conclure ;
- 5) Pour le diamètre trouvé, vérifier la résistance de la section la plus sollicitée vis-à-vis du cisaillement  $T_{moyen}$

On se propose de remplacer l'arbre plein de diamètre  $d = 30$  mm par un arbre creux de diamètre intérieur  $d_1 = 22$  mm. Calculer le diamètre  $d_2$  de façon à ce que la contrainte tangentielle maximale en torsion garde la même valeur que celle de l'arbre plein.

#### Exercice 4 : (4 points)

On considère un système triangulé reposant sur deux appuis simples A et E comme indiqué sur la figure ci-dessous. Chaque barre a une longueur de 3 m.



Le système reçoit aux nœuds B, C et D respectivement les charges  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$ .

On demande de :

- 1) Déterminer la nature du système (isostatique ou hyperstatique ?) ;
- 2) Calculer les réactions d'appui ;
- 3) Déterminer les efforts dans les barres par la méthode graphique de CREMONA.

On donne  $F_1 = F_2 = F_3 = 20$  kN

NB : utiliser les feuilles millimétrées.

#### Consignes Générales

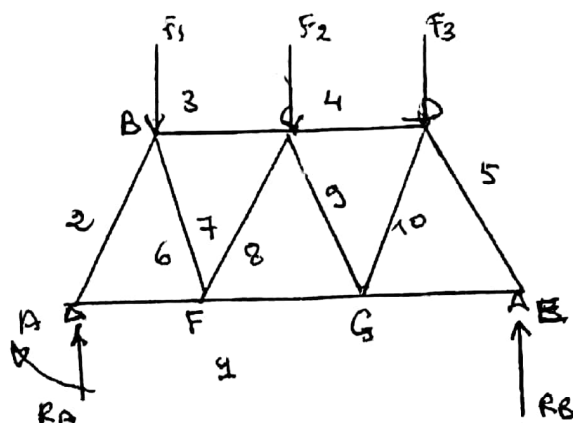
- La compréhension des questions fait partie de l'évaluation.
- Toute donnée manquante est laissée à votre initiative.
- S'il vous manque un résultat intermédiaire, faites des hypothèses cohérentes avec les données de l'examen.
- Seules les réponses faisant référence au numéro de la question seront évaluées.

1

# Examens 1<sup>re</sup> Session JNPHB. CNAM

## RESOLUTIONS DES EXERCICES DE RDM

### EXERCICE N° 4



$$\begin{aligned} F_1 &= 20 \text{ kN} \\ F_2 &= 20 \text{ kN} \\ F_3 &= 20 \text{ kN} \end{aligned}$$

1°) Nombre de barres  $b = 11$

Nombre de nœuds  $n = 7$

Nombre de réactions d'appuis  $= 2$

Si les équations de la statique suffisent à déterminer les réactions d'appuis le système est isostatique. extérieur + AUC. si il est possible de déterminer tous les efforts dans les barres le système est dit intérieurement isostatique. On peut retenir la relation  $b = 2n - 3$  alors  $11 = 2 \times 7 - 3$  vérifié. d'où le système est isostatique. (0,5 point)

2°) Calcul des réactions d'appuis

$$R_A + R_B = F_1 + F_2 + F_3 = 60 \text{ kN}$$

$$\sum M/B = 0 \Rightarrow R_A \times 9 - 20 \times 7,5 + 20 \times 4,5 + 20 \times 1,5 = 0 \Rightarrow$$

$$R_A = \frac{270}{9} = 30 \text{ kN}$$

$$R_B = 30 \text{ kN}$$

(0,5 point)

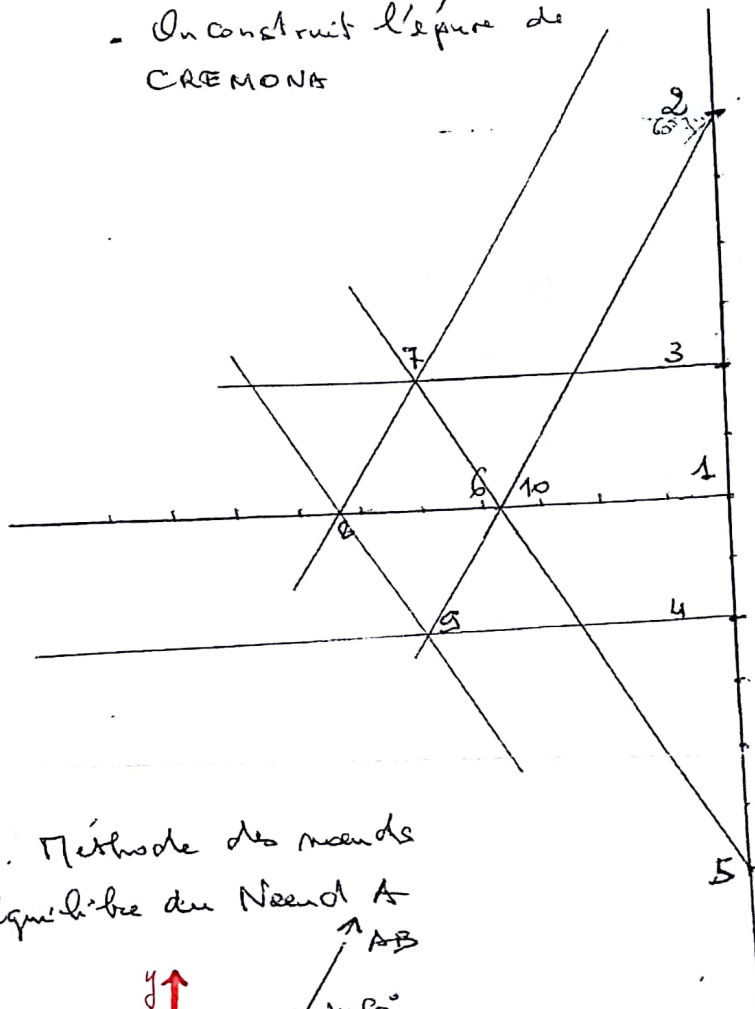
(0,5 point)

3°) Efforts dans les barres.

• On utilise du papier millimétré

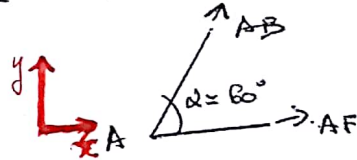
• On numérote les intervalles entre les lignes de forces et les barres.

- On prend une échelle :  $1\text{cm} = 5\text{KN}$
- On construit l'épure de CREMONA



0,5 point

- a. Méthode des nœuds  
Équilibre du Nœud A



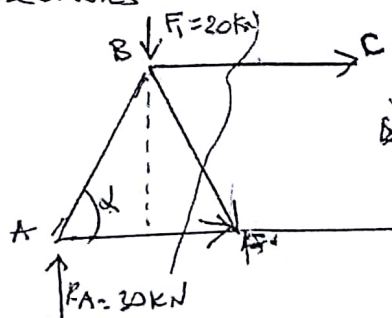
$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow AF + AB \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow AB \sin \alpha + RA = 0 \Rightarrow AB = -\frac{RA}{\sin \alpha} = -\frac{30}{0,866} =$$

d'où  $AB = -34,64\text{ KN}$

$$AF = -AB \cos \alpha = 17,32\text{ KN}$$

- b Méthode des sections



$$\sum \mathcal{M}_F = 0 \quad BC \times AB \sin \alpha +$$

$$RA \times 3 - F \times 1,5 = 0$$

d'où  $BC = \frac{-90 + 30}{-0,866 \times 0,866}$

$$BC = +28,094\text{ KN}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow R_A - F_1 + BF \sin \alpha = 0$$

$$\alpha = 60^\circ \Rightarrow BF \sin \alpha = -30 + 20 = -10 \text{ KN}$$

$$\text{d'où } BF = \frac{-10}{\sin \alpha} = -11,547 \text{ KN}$$

On peut vérifier les valeurs des efforts dans les barres par la méthode des sections et la méthode des nœuds. En résumé :

On admet ici :

- Traction
- + Compression

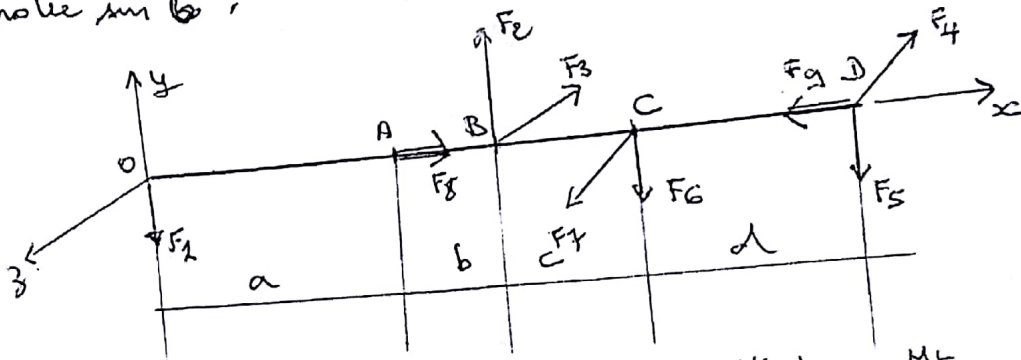
| Zone | Barres             | Efforts (KN)        | Signe ou Nature |
|------|--------------------|---------------------|-----------------|
| 1    | -                  | 30 = R <sub>A</sub> | Réaction        |
| 2    | AB <sub>2-6</sub>  | -34,64              | Traction        |
|      | -                  | 20 = F <sub>1</sub> | Force           |
| 3    | BC <sub>3-7</sub>  | +23,094             | Compression     |
|      | -                  | 20 = F <sub>2</sub> | Force           |
| 4    | CD <sub>4-9</sub>  | +23,094             | Compression     |
|      | -                  | 20 = F <sub>3</sub> | Force           |
| 5    | DE <sub>5-10</sub> | -34,64              | Traction        |
|      | -                  | 30 = R <sub>B</sub> | Réaction        |
| 6    | AF <sub>6-1</sub>  | +17,32              | Compression     |
|      | FB <sub>6-7</sub>  | -11,547             | Traction        |
| 7    | FC <sub>7-8</sub>  | +11,547             | Compression     |
| 8    | FG <sub>1-8</sub>  | -32,5               | Traction        |
| 9    | GH <sub>8-9</sub>  | +11,547             | Compression     |
|      | GD <sub>9-10</sub> | -11,547             | Traction        |
| 10   | GE <sub>10-1</sub> | +17,32              | Compression     |

(2 points)

# EXERCICE N° 3

(4)

N.B.: Une erreur s'est glissée sur les efforts. Les forces  $F_2$  et  $F_5$  sont des moments de torsion  $M_t$ . Au lieu de 50 N.m, il est écrit 50 N. Par conséquent la première question sera notée sur 6.



1°) Composantes du Tenseur  $\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \vec{H} \\ \vec{T} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} N(x) & M_t \\ T_y(x) & M_{t_y}(x) \\ T_z(x) & M_{t_z}(x) \end{vmatrix}$

a)  $x \in [0, A]$

$N(x) = 0$

$T_y(x) + F_1 = 0 \Rightarrow T_y(x) = -F_1 = -300 \text{ N}$

$M_{t_y}(x) + F_1 x = 0$

$M_{t_y}(x) = -F_1 x = -300x$

$\{\sigma\} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -300 & 0 \\ 0 & -300x \end{vmatrix}$

(1 point)

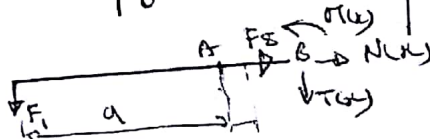
b)  $x \in [A, B]$

$N(x) = -50 \text{ N}$

$T_y(x) + F_1 = 0 \Rightarrow T_y(x) = -300$

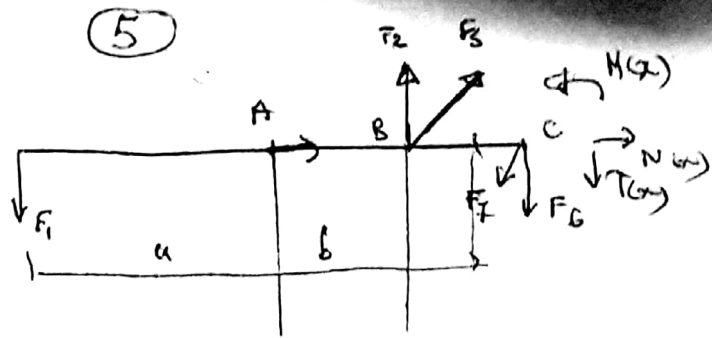
$M_{t_y}(x) + F_1(a+x) = 0 \Rightarrow M_{t_y}(x) = -F_1(a+x) = -300x$

$\{\sigma\} = \begin{vmatrix} 50 & 0 \\ -300 & 0 \\ 0 & -300x \end{vmatrix}$



(1 point)

c)  $x \in [B, C]$



$N(x) = 50 \text{ N}$

$T(x) + F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow T(x) = 1300 - 300 = 1000$

$M_f(x) + F_1 x - F_2 [(a+b)+x] = 0 \Rightarrow M_f(x) = -300x + F_2 (x - 0.4)$   
 $= -300x + 1300x - 1300 \times 0.4$   
 $= 1000x - 520$

$M_f(x) = -300 + 1300 (x - 0.4)$

$M_f(x) = +600x - 240$

$T_g(x) = -600 \text{ N}$

$\{G\} = \begin{vmatrix} 50 & 0 \\ 1000 & 600x - 240 \\ -600 & 1000x - 520 \end{vmatrix}$

(1 point)

d)  $x \in [C, D]$

$N(x) = 0$

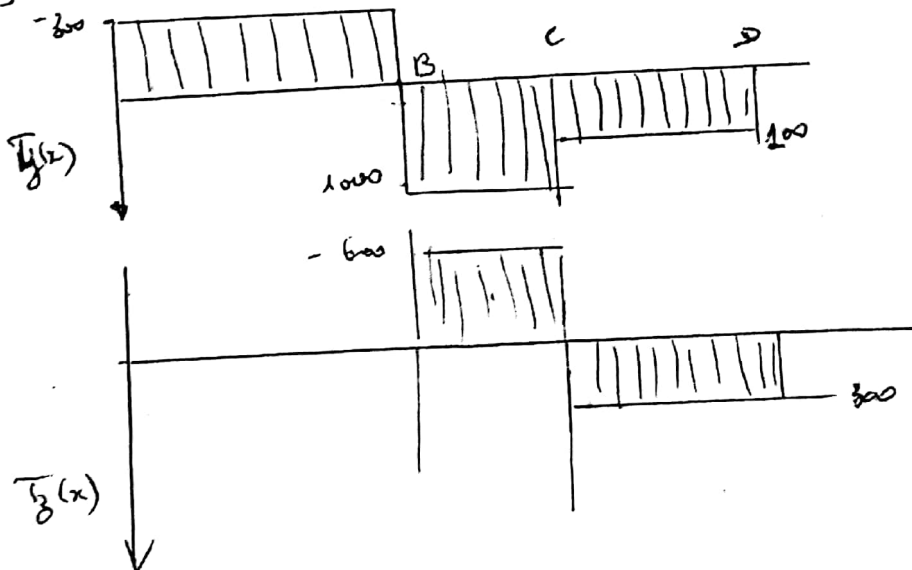
$T(x) + F_1 - F_2 + F_4 = 0 \Rightarrow T(x) = -300 + 1300 - 900 = 100 \text{ N}$   
 $T_g(x) = 900 - 600 = 300 \text{ N}$

$T_g(x) + F_3 - F_4 = 0 \Rightarrow T_g(x) = 900 - 600$   
 (1 point)

$M_b = 0$

$M_f(x) = -300x + 210$

$M_f(x) = 100x - 70$



(1 point)

(1 point)

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE FELIX  
HOUPHOUET BOIGNY  
ECOLE DE FORMATION CONTINUE ET DE  
PERFECTIONNEMENT DES CADRES

RESISTANCE DES MATERIAUX

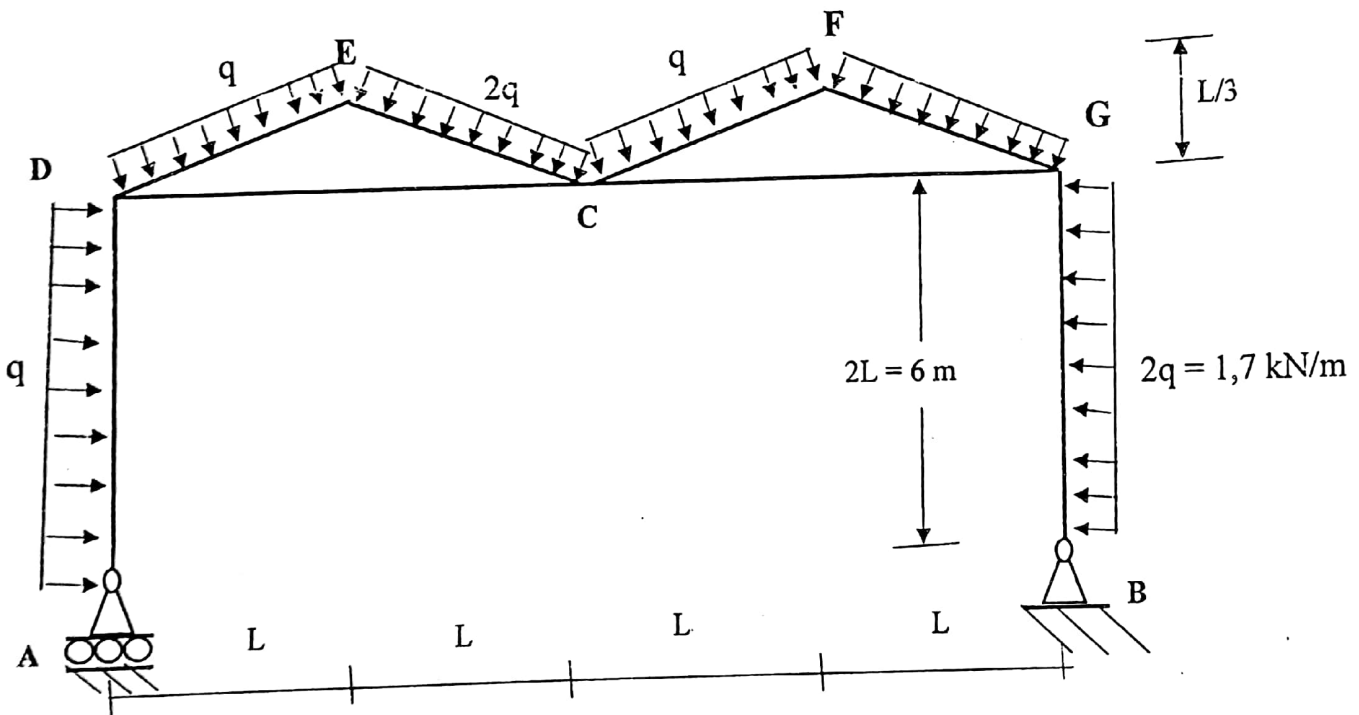
DEVOIR N°1

GRPOUPE 3

Durée : 3 heures

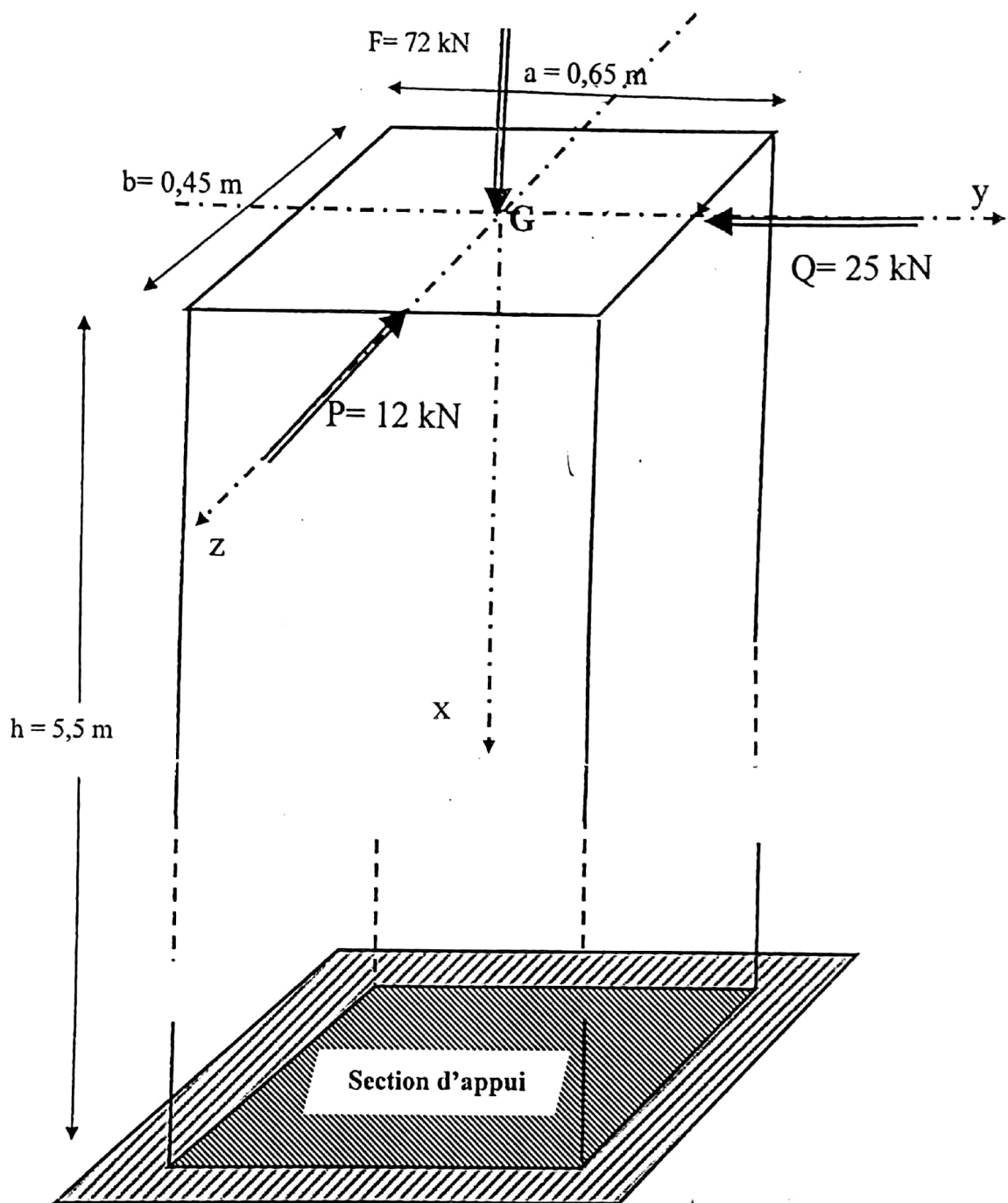
DOCUMENTS AUTORISES

I. ETUDE DU PORTIQUE REPRESENTE CI-DESSOUS



- 1) Déterminer les réactions d'appuis de cette structure
- 2) Indiquer la nature des efforts internes dans les barres (A,D), (C,F),

## II. ETUDE D'UN POTEAU



- 1) Déterminer les efforts internes dans une section courante du poteau représenté ci-dessus
- 2) Calculer les valeurs des efforts internes dans la section d'appui du poteau
- 3) Donner l'expression de la flèche et de la rotation dues à la charge  $P$
- 4) Donner l'expression de la flèche et de la rotation dues à la charge  $Q$

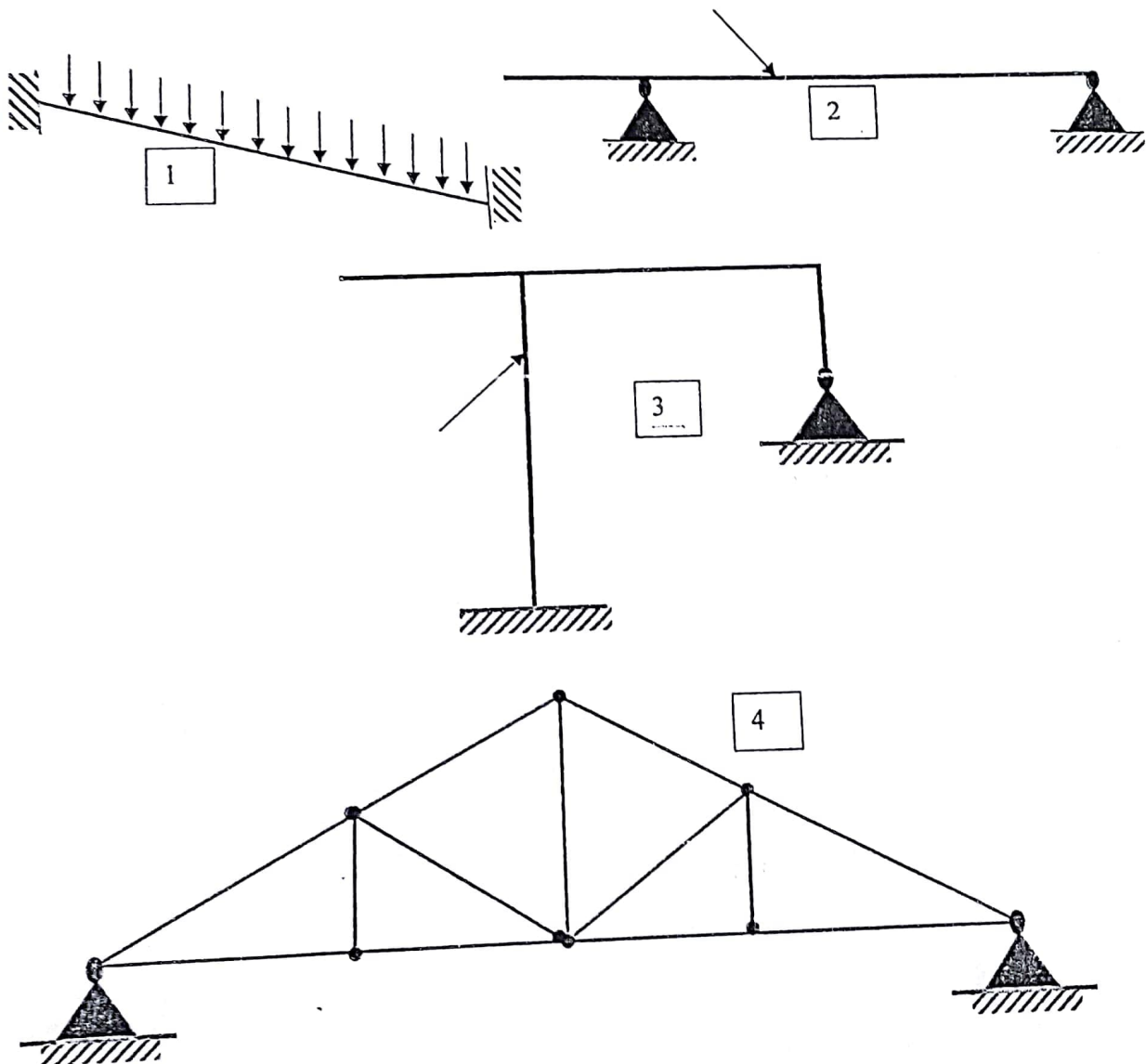
- 5) Donner l'expression de la déformation due à la charge  $F$
- 6) Calculer les contraintes normales aux points G, I ( $y=22,5, z=0$ ), J ( $y=0, z=32,5$ ), K ( $y=-22,5, -32,5$ ), L ( $y=22,5, z=32,5$ ) de la section d'appui

Module d'élasticité longitudinale  $E = 8\,000 \text{ daN/mm}^2$

### III. HYPERSTATICITE ET ISOSTATICITE EXTERIEURES

Rendre extérieurement isostatique les structures ci-après.

*Attention ne pas les transformer en mécanismes (systèmes instables)*



**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE FELIX  
HOUPHOUET BOIGNY**  
**ECOLE DE FORMATION CONTINUE ET DE  
PERFECTIONNEMENT DES CADRES**

**RESISTANCE DES MATERIAUX**

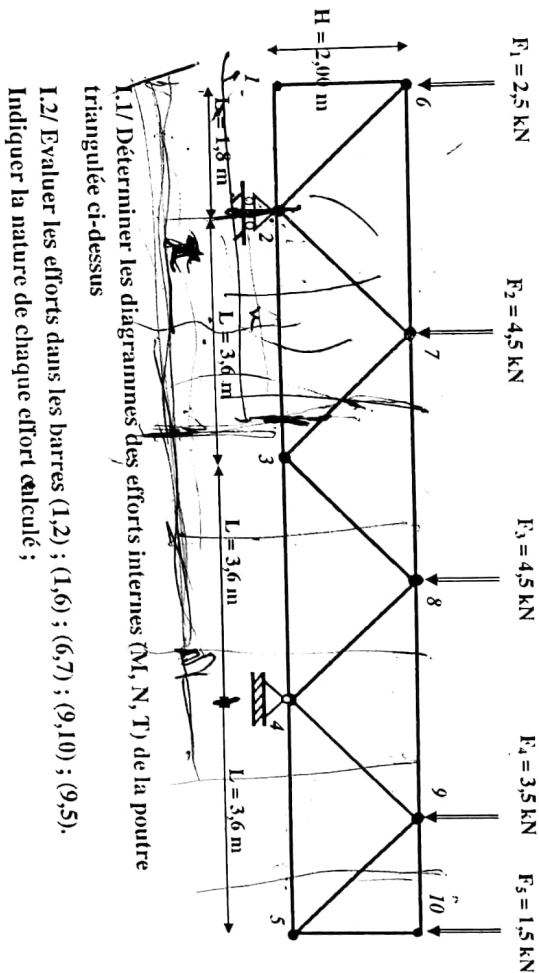
**DEVOIR N°2**

Durée : 3 heures

**GROUPE 2**

**DOCUMENTS AUTORISES**

**I/ ETUDE D'UNE POUTRE TRIANGULEE**

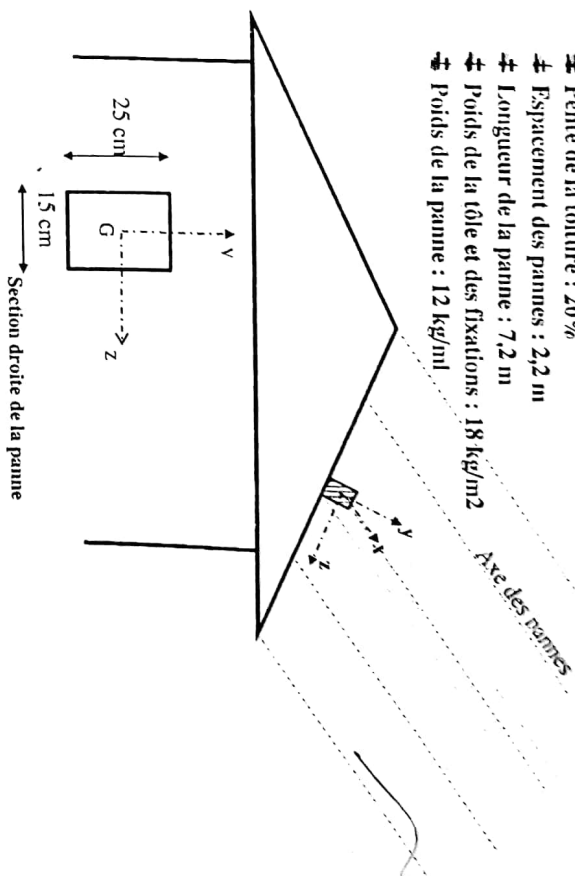


I.1/ Déterminer les diagrammes des efforts internes (M, N, T) de la poutre triangulée ci-dessus

I.2/ Evaluer les efforts dans les barres (1,2) ; (1,6) ; (6,7) ; (9,10) ; (9,5). Indiquer la nature de chaque effort calculé ;

**II/ ETUDE D'UNE PANNE COURANTE SIMPLEMENT APPUYEE**

- ⚡ Pente de la toiture : 20%
- ⚡ Espacement des pannes : 2,2 m
- ⚡ Longueur de la panne : 7,2 m
- ⚡ Poids de la tôle et des fixations : 18 kg/m<sup>2</sup>
- ⚡ Poids de la panne : 12 kg/ml



II.1/ Calculer les moments d'inertie  $I_z$  et  $I_y$  de la section droite de la panne par rapport respectivement à l'axe  $Gz$  et à l'axe  $Gy$

II.2/ Déterminer les répartitions de charges linéaires dans les plans  $Gxy$  et  $Gxz$

II.2/ Déterminer les expressions des moments fléchissants par rapport aux axes  $Gy$  et  $Gz$

II.3/ Evaluer les moments par rapport aux axes  $Gy$  et  $Gz$  à mi-travée

II.4/ Déterminer l'expression de la contrainte normale dans une section courante de la panne

II.5/ Evaluer la contrainte normale à mi-travée

II.6/ Déterminer l'expression de la flèche dans la plan  $Gxy$

II.7/ Evaluer la flèche à mi-travée dans le plan  $Gxy$

**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE FELIX HOUPHOUET  
BOIGNY  
ECOLE DE FORMATION CONTINUE ET DE PERFECTIONNEMENT  
DES CADRES**

**RESISTANCE DES MATERIAUX**

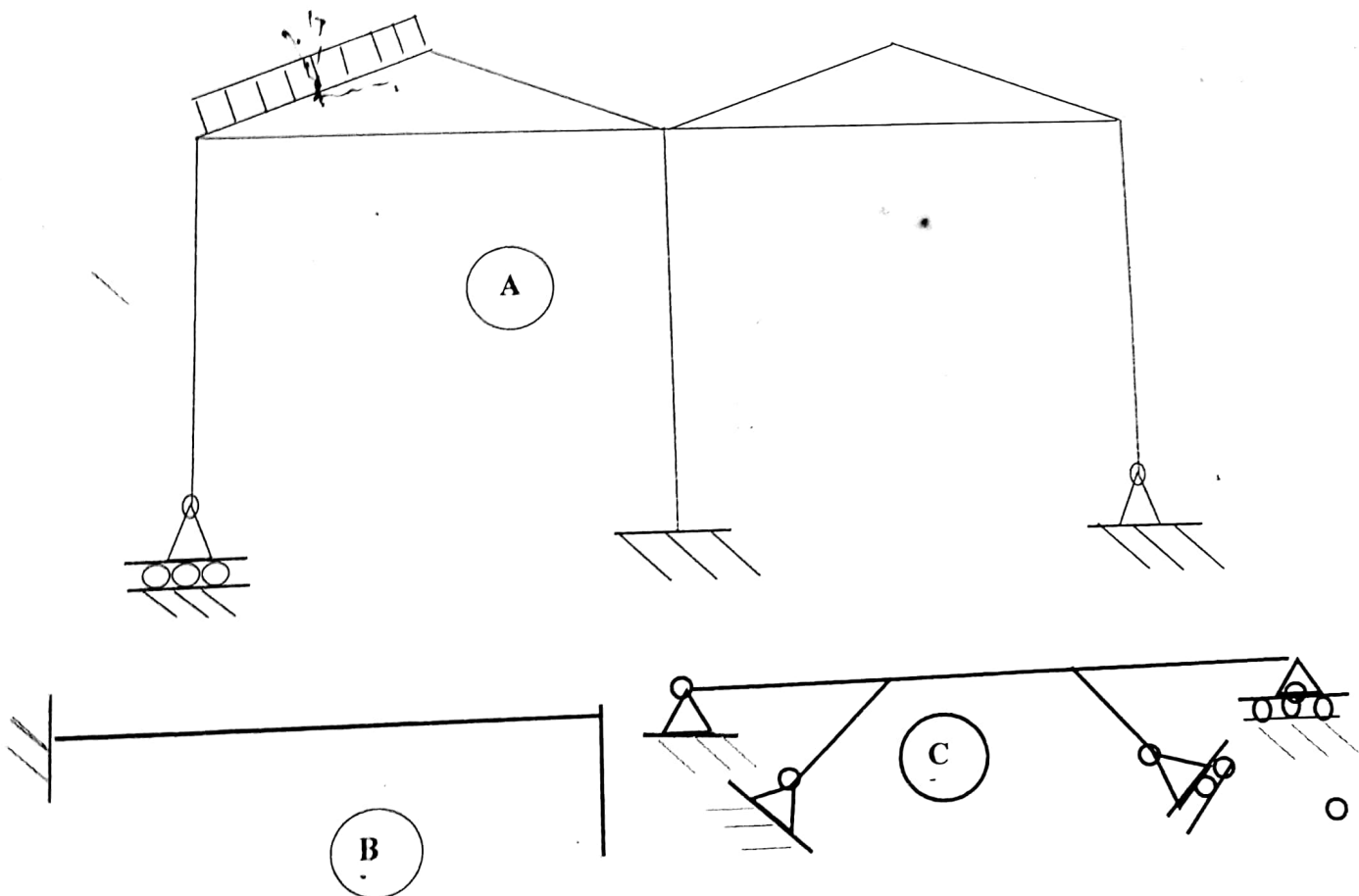
**DEVOIR N°1**

**Durée : 3 heures**

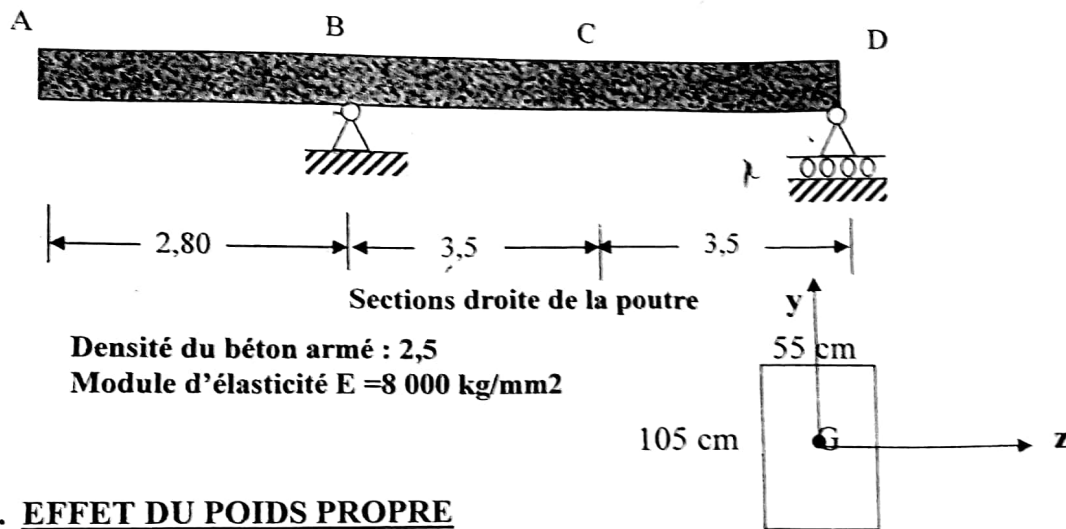
**GROUPE 2**

**DOCUMENTS AUTORISES**

**I. DETERMINER LES DEGRES D'HYPERSTATICITE EXTERIEURE DES  
STRUCTURES CI-DESSOUS**



## II. ETUDE D'UNE TRAVERSE DE PONT EN BETON ARME



### A. EFFET DU POIDS PROPRE

- Déterminer les réactions d'appuis
- Représenter les diagrammes des efforts internes
- Evaluer les contraintes normales aux points J ( $y=0 ; z=0$ ), K ( $y=37,5 ; z=27,5$ ) et P ( $y=-37,5 ; z=27,5$ ) de la section A
- Evaluer les contraintes normales aux points J' ( $y=0 ; z=0$ ), K' ( $y=37,5 ; z=27,5$ ) et P' ( $y=-37,5 ; z=27,5$ ) de la section B
- Evaluer les contraintes extrêmes dans les sections B et indiquer leurs positions
- Expressions de la flèche et de la rotation ;
- Valeurs de la flèche et de la rotation aux points A, B, C, D
- Donner l'allure de la déformée

### B. EFFET D'UNE CHARGE PONCTUELLE À MI-TRAVÉE

Mêmes questions qu'au A pour une charge ponctuelle verticale descendante de 12 kN appliquée en C (milieu de la travée BD).

### C. EFFET D'UNE CHARGE PONCTUELLE HORIZONTALE DE 18 kN A L'EXTREMITÉ A, ORIENTÉE DE LA GAUCHE VERS LA DROITE

(La charge est dans l'axe de la poutre)

- Mêmes questions qu'au A
- Expression des déformations axiales; Valeurs aux points A, B, C, D et E

**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE FELIX  
HOUPHOUET BOIGNY**

**ECOLE DE FORMATION CONTINUE ET DE  
PERFECTIONNEMENT DES CADRES**

**RESISTANCE DES MATERIAUX**

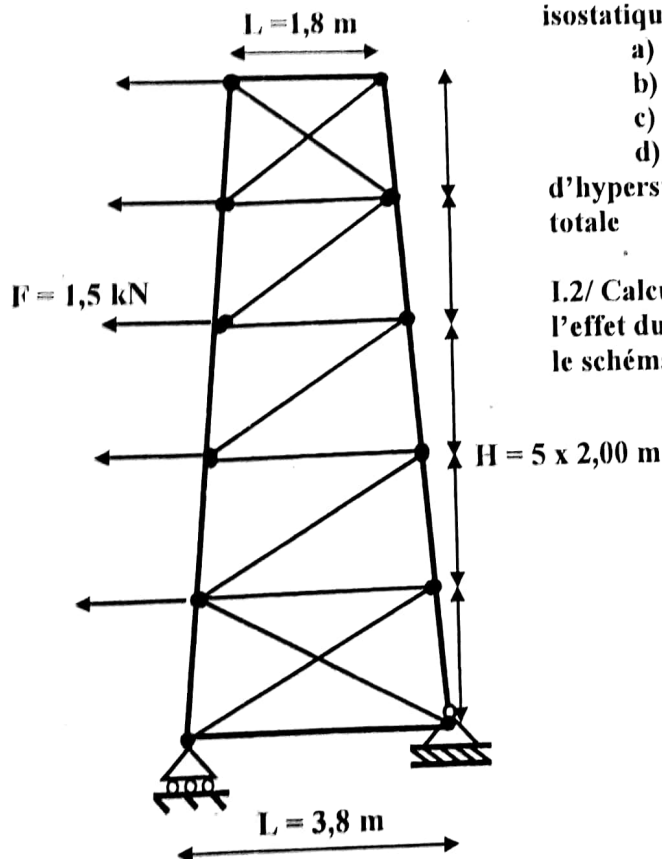
**DEVOIR N°2**

**Durée : 3 heures**

**GROUPE 2**

**DOCUMENTS AUTORISES**

**I/ ETUDE D'UN PYLONE METALLIQUE**



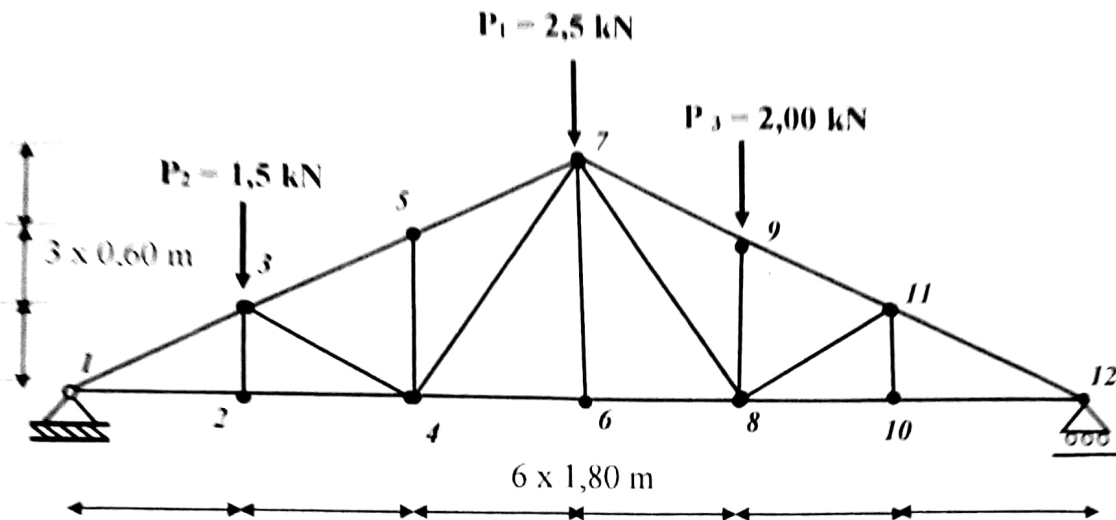
**1.1/ Le pylône représenté ci-contre est-il  
isostatique ou hyperstatique**

- a) intérieurement
- b) extérieurement
- c) totalement
- d) indiquer, le cas échéant, les degrés

**d'hyperstaticité intérieure, extérieure ou  
totale**

**1.2/ Calcul des réactions d'appuis sous  
l'effet du système de charges représenté sur  
le schéma**

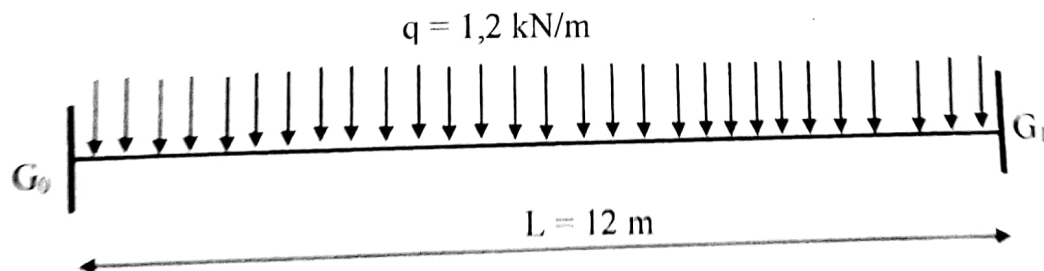
## II/ ETUDE D'UNE FERME METALLIQUE SIMPLEMENT APPUYEE.



II.1/ Déterminer les efforts dans les barres (1,3) ; (2,3) ; (3,5)

II.2/ Indiquer la nature des efforts (traction ou compression)

## III/ ETUDE D'UNE POUTRE BI-ENCASTREE UNIFORMEMENT CHARGEE



III.1/ Déterminer le degré d'hyperstaticité de la poutre ci-dessus

III.2/ Déterminer les moments sur appuis

III.3/ Donner les expressions du moment fléchissant, de l'effort tranchant dans une section courante G d'abscisse x

# EXAMEN DE RESISTANCE DES MATERIAUX

SUJET N°3

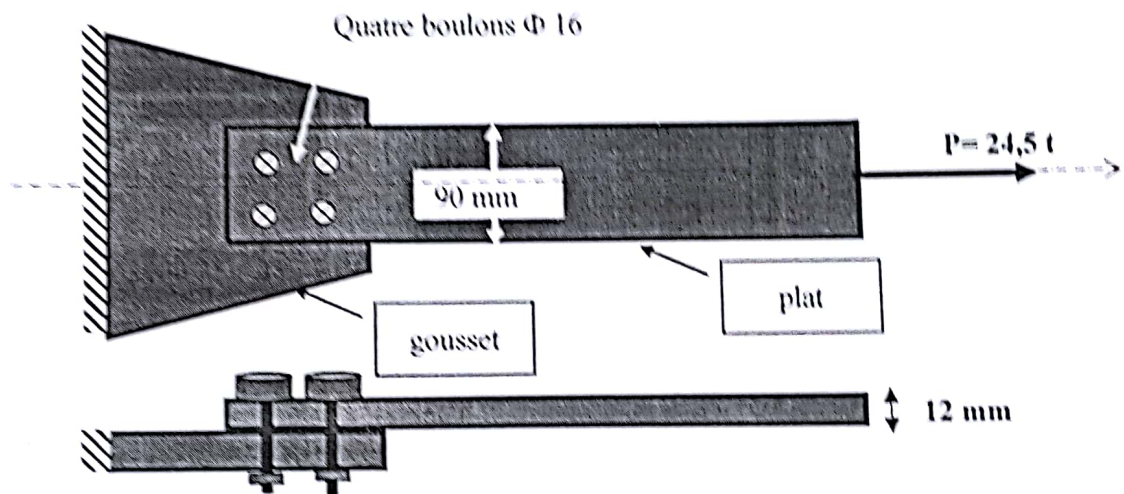
Proposé le 20 Juin 2016

Durée : 3 heures

DOCUMENTS AUTORISES

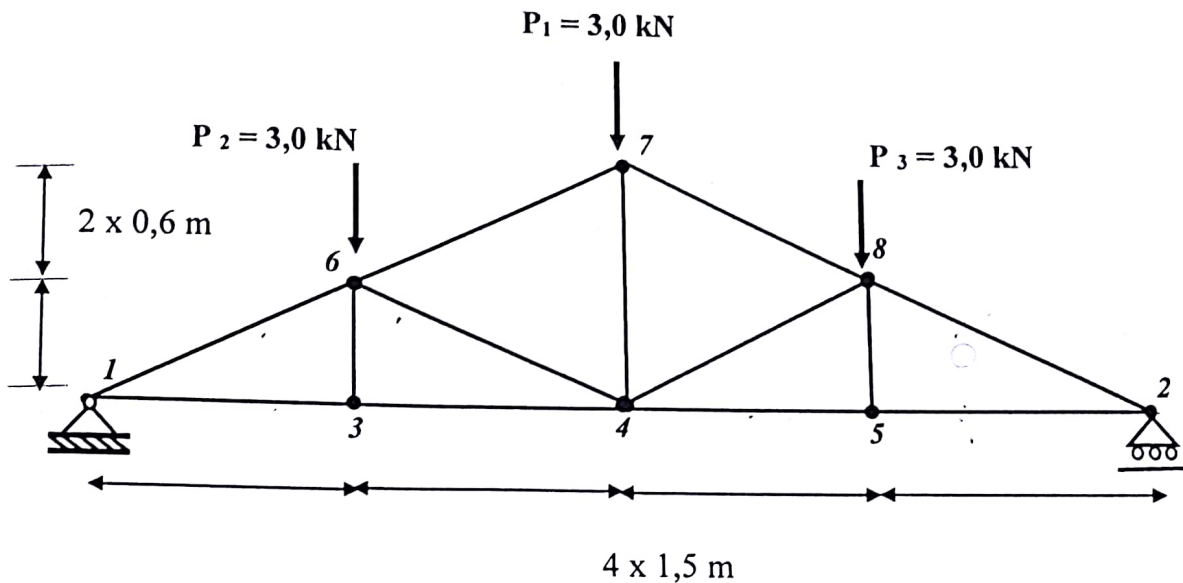
CCV107

## I/ ETUDE D'UN ASSEMBLAGE BOULONNE ( 1 pat boulonné sur 1 gousset)



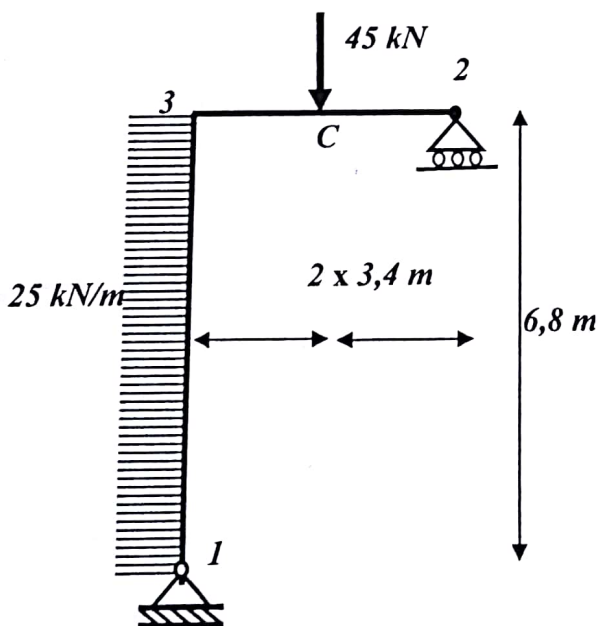
- 1) Indiquer la nature des efforts dans les 4 boulons d'assemblage représentés par leurs axes sur le schéma ci-dessus
- 2) Indiquer la nature des efforts dans le plat
- 3) Calculer l'effort interne dans les boulons (répartition arithmétique des efforts dans les boulons)
- 4) Calculer la contrainte dans le plat
- 5) Calculer la contrainte dans un boulon

## II/ ETUDE D'UNE FERME EN TREILLIS SIMPLEMENT APPUYEE



- 1) Déterminer le degré d'hyperstaticité de la structure ci-dessus
- 2) Calculer les efforts dans les barres (1,3) ; (4,3), (4,6), (4,8) , (8,5)
- 3) Déterminer la variation de longueur des barres (1, 3), (3,6)
  - barre cornière L 120 x 120 x 10 ; Section : 23 cm<sup>2</sup>
  - module d'élasticité linéaire : 21 000 daN/mm<sup>2</sup>

## III/ ETUDE D'UN DEMI-PORTIQUE PLAN

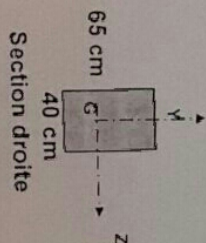


Déterminer :

- 1) les efforts internes dans les différentes barres
- 2) les contraintes normales extrêmes aux points 1, 2, 3 et C
- 3) les expressions des contraintes tangentielles en 1 et 2

Module d'Young du matériau

$$E = 15\,000 \text{ daN/m}^2$$



### Exercice 5 :

Etude de la section d'appui d'un poteau de lampadaire

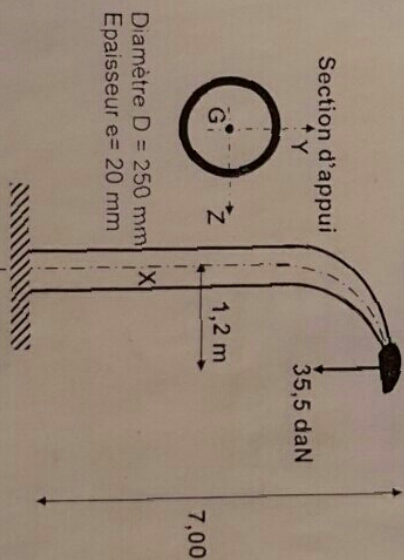
1/ Indiquer la nature des sollicitations dans la section d'appui A.

2/ Calculer le moment fléchissant autour de l'axe Gy dans la section A.

3/ Calculer la contrainte due à l'effort normal dans la section d'appui A.

4/ Déterminer l'expression de la contrainte due au moment fléchissant autour de l'axe Gy dans la section d'appui A.

5/ Déterminer l'expression de la contrainte normale due au moment fléchissant autour de l'axe Gy et à l'effort normale dans la section d'appui A.

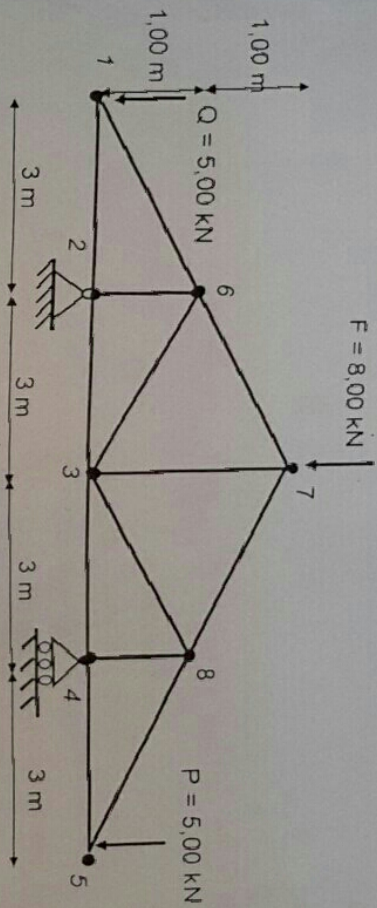


### Consignes Généralités

- La compréhension des questions fait partie de l'évaluation.
- Toute donnée manquante est laissée à votre initiative.
- Si/ vous manquez un résultat intermédiaire, faites des hypothèses cohérentes avec les données de l'examen.
- Seules les réponses faisant référence au numéro de la question seront évaluées.

### Exercice 3 :

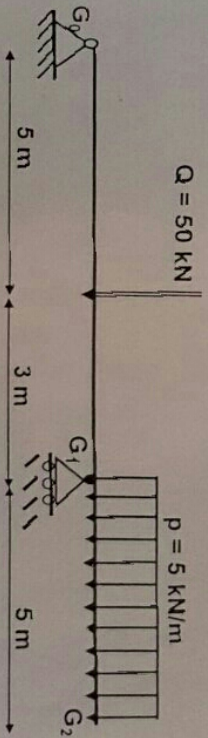
Etude d'une ferme métallique simplement appuyée



- 1/ Vérifier l'isostaticité de la ferme ci-dessus
- 2/ Déterminer les efforts dans les barres (1,2) ; (2,6) ; (3,6) ; (4,5), (5,8)
- 3/ Indiquer la nature des efforts (traction ou compression)
- 4/ Représenter le diagramme du moment fléchissant de la ferme globale

### Exercice 4 :

Etude d'une poutre console de section rectangulaire simplement appuyée



- 1/ Calculer les réactions d'appui
- 2/ Représenter les diagrammes des efforts internes
- 3/ Calculer les contraintes normales extrêmes dues au moment fléchissant dans les sections d'abscisses :  $x=5\text{m}$  et  $x=8\text{m}$



1/ Position de la charge ( $Y = -10$  ;  $Z = -20$ )

1.1/ Calculer les moments par rapport à  $G_y$  ( $M_y$ ) et à  $G_z$  ( $M_z$ )

1.2/ Calculer les valeurs de la contrainte normale dans une section du poteau aux points suivants

|   | Y     | Z     |
|---|-------|-------|
| A | 22,5  | 27,5  |
| B | 22,5  | -27,5 |
| C | -22,5 | 27,5  |
| D | -22,5 | -27,5 |

1.3/ Déterminer l'équation de l'axe neutre

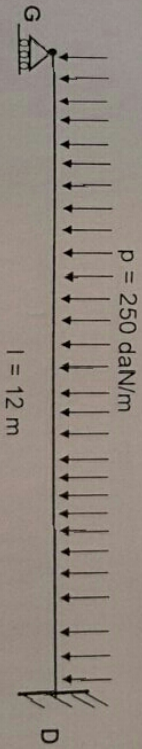
1.4/ Calculer les contraintes normales extrêmes

2 / Mêmes questions pour une position ( $Y = 10$  ;  $Z = 0$ )

3/ Calculer la variation de longueur du poteau due à l'effort normal et indiquer sa nature (allongement ou raccourcissement) module d'Young  $E = 10\,000\text{ kg/m}^2$

### Exercice 2 :

Etude d'une poutre hyperstatique à une travée uniformément chargée par le théorème des travaux virtuels



1/ Déterminer le degré d'hyperstaticité de la poutre ci-dessus

2/ En employant le Théorème des Travaux Virtuels,

2.1/ Déterminer les réactions d'appuis

2.2/ Déterminer les diagrammes des efforts internes

2.3/ Déterminer l'expression de la flèche d'une section courante de la poutre

Centre de formation Cnam – INP-HB

Chaire des travaux publics

2014-2015

RESISTANCE DES MATERIAUX CCV 107

Professeur : YRIE TRA BÉ DENIS

Examen de la première session

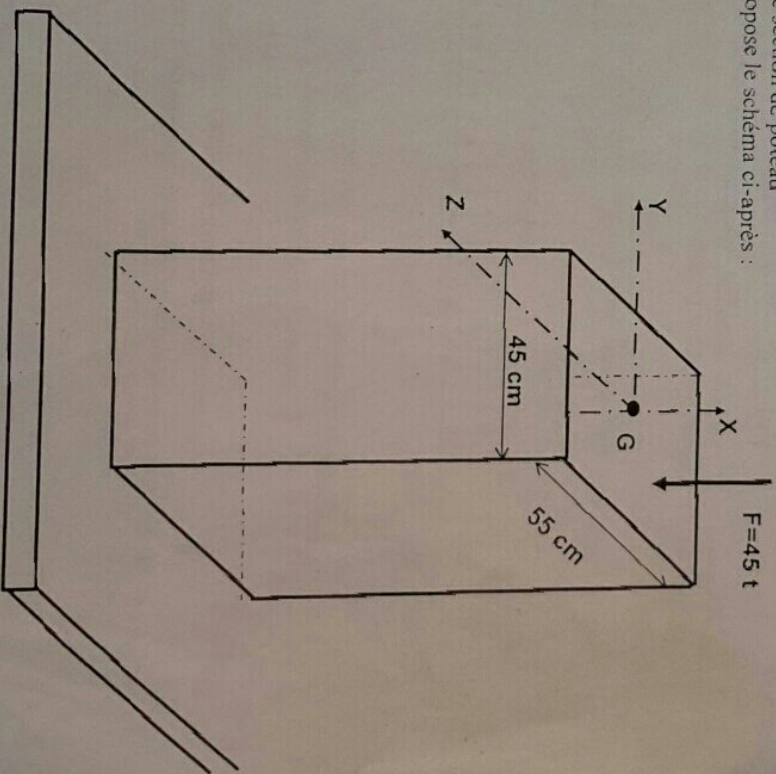
*Polycopies et TD autorisés*

Durée : 3 heures  
*Calculatrices scientifiques autorisées*

**Exercice 1 :**

Etude d'une section de poteau

On vous propose le schéma ci-après :



***1<sup>er</sup> SEMESTRE***

**MODULE M1102 :**

**SOLLICITATIONS SIMPLES**  
**Effort Normal & Effort Tranchant**

**PROBLEMES CORRIGES**

A.BENNANI - Y.LAFON-JALBY - M.MASSENZIO - S.RONEL



# SOMMAIRE

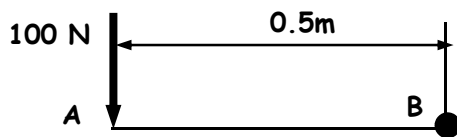
|                                                            |    |
|------------------------------------------------------------|----|
| STATIQUE APPLIQUÉE AU DIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES ..... | 5  |
| TORSEUR DE SECTION .....                                   | 9  |
| TRACTION-COMPRESSION .....                                 | 35 |
| CISAILLEMENT .....                                         | 54 |



# STATIQUE APPLIQUÉE AU

## DIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES

### PROBLÈME N°1

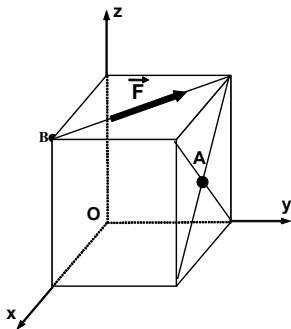


Calculez le moment de la force de 100N par rapport au point B.

### REPONSES N°1

$$\overrightarrow{M_{\vec{F}/B}} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_A \Rightarrow +50\vec{k}$$

### PROBLÈME N°2



Soit un cube de 1m de côté et une force  $\vec{F}$  de norme 100N. Calculer:

- 1°) Les composantes du moment de  $\vec{F}$  par rapport au point A.
- 2°) La norme du moment.
- 3°) Les angles entre le moment et les axes du repère.

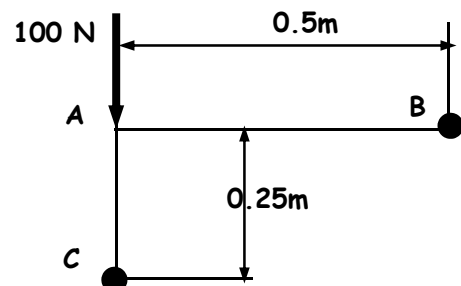
### REPONSES N°2

$$\overrightarrow{M_{\vec{F}/A}} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0.5 & -50\sqrt{2} \\ -1 & 50\sqrt{2} \\ 0.5 & 0 \end{vmatrix} = -25\sqrt{2}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \text{ d'où } \|\overrightarrow{M_{\vec{F}/A}}\| = 25\sqrt{2}\sqrt{3}mN$$

$$\cos \alpha_x = \cos \alpha_y = \cos \alpha_z = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

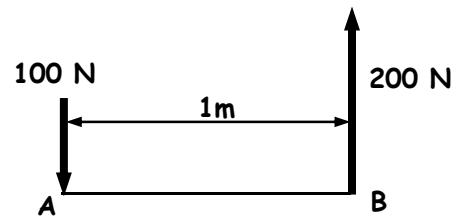
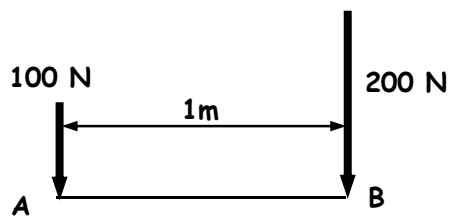
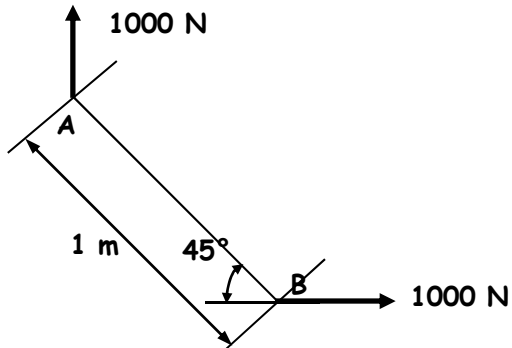
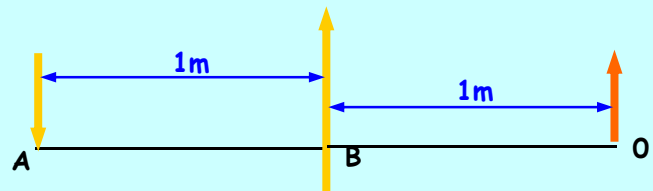
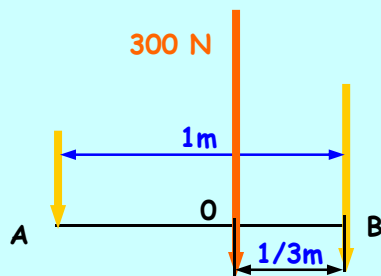
### PROBLÈME N°3

Réduisez la force de 100N au point B, puis au point C.

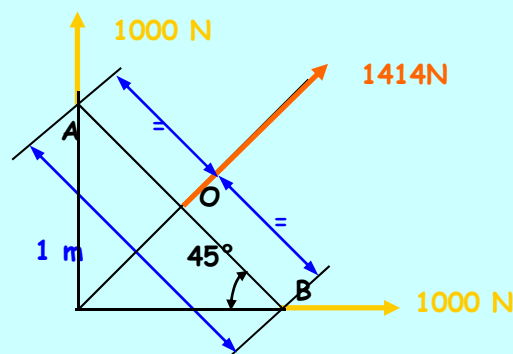


**PROBLÈME N°4**

Calculez la valeur et la position de la résultante des deux forces parallèles.

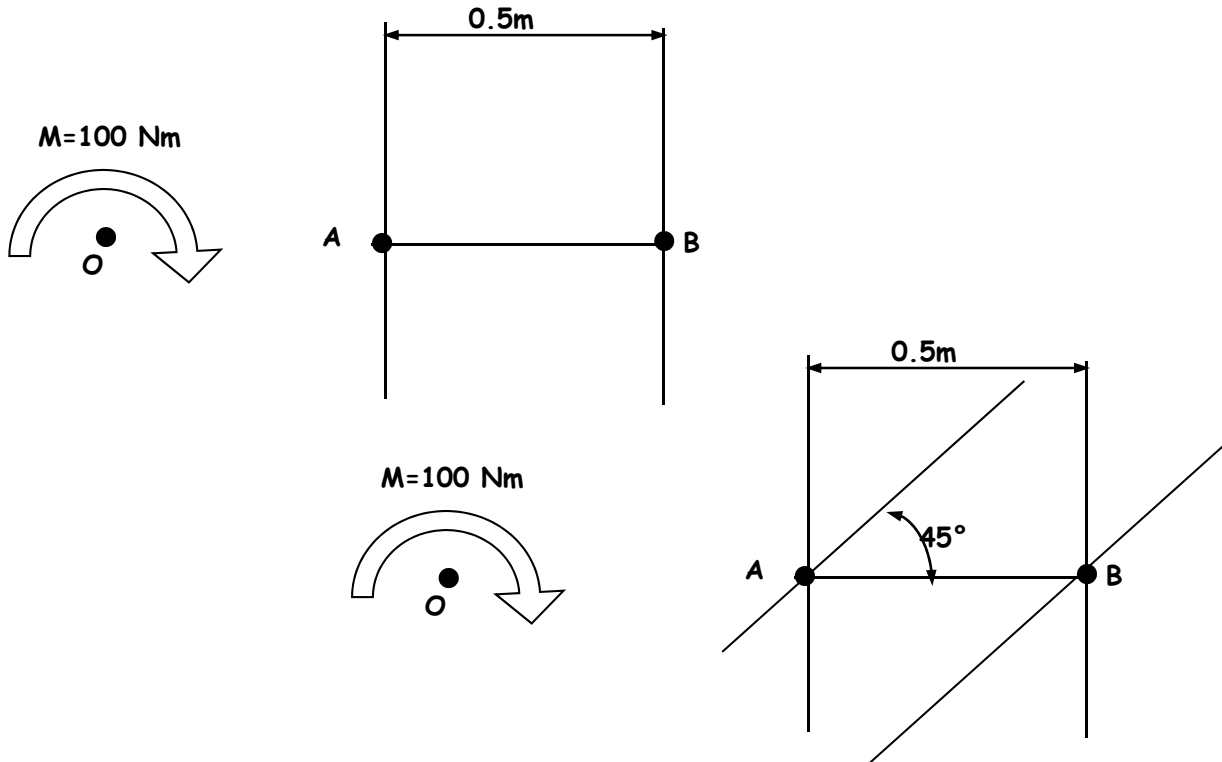
**REPONSES N°4****PROBLÈME N°5**

Calculez la valeur et la position de la résultante des deux forces concourantes.

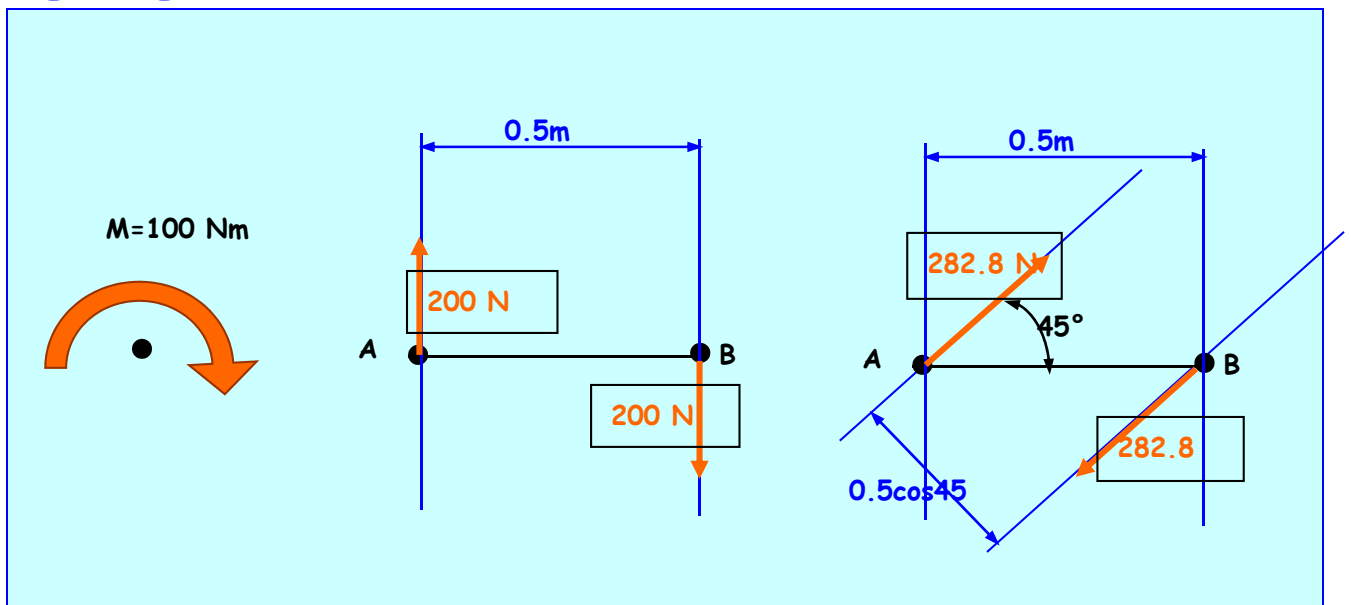
**REPONSES N°5**

## PROBLÈME N°6

e) Décomposez le moment  $M$  suivant deux forces // passant par A et B, d'abord verticales, puis inclinées à  $45^\circ$ .

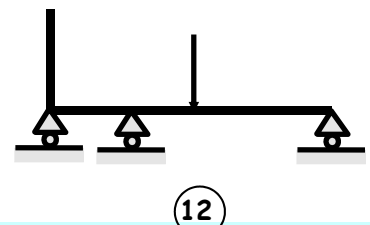
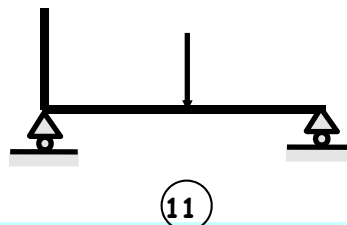
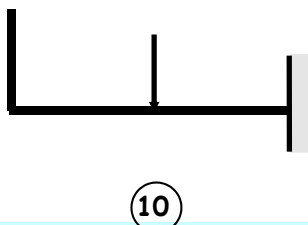
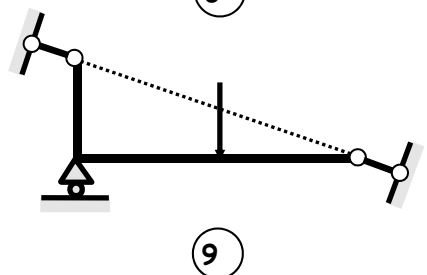
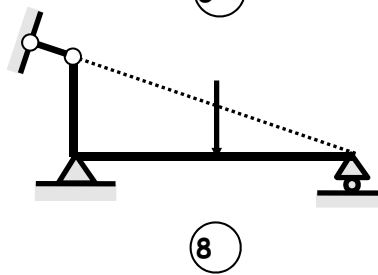
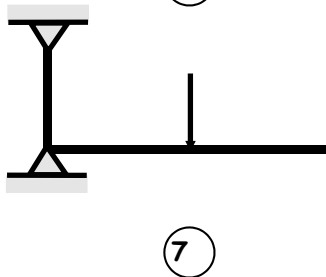
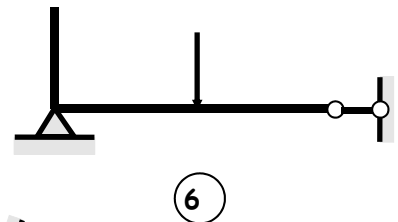
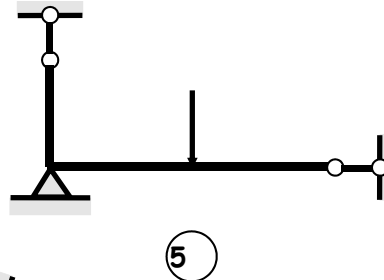
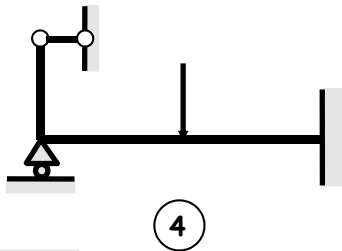
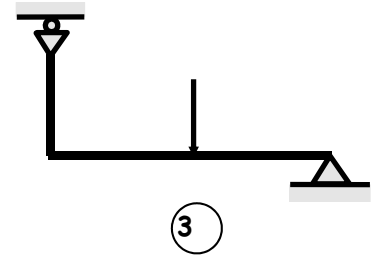
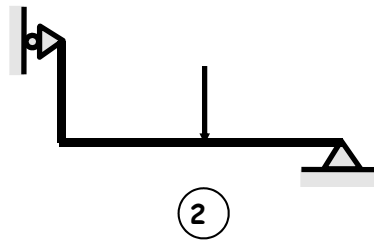
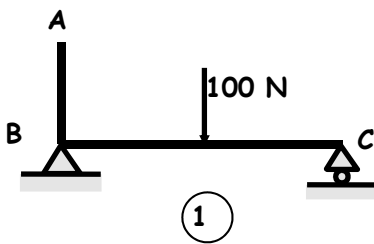


## REPONSES N°6



**PROBLÈME N°7**

L'équerre ABC peut être supportée de différentes manières. Identifiez chaque cas.

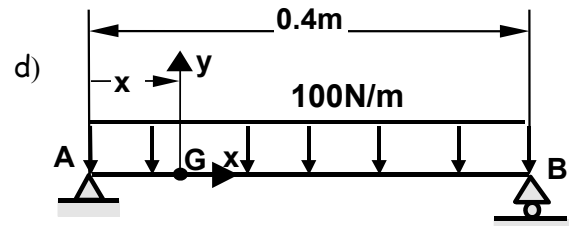
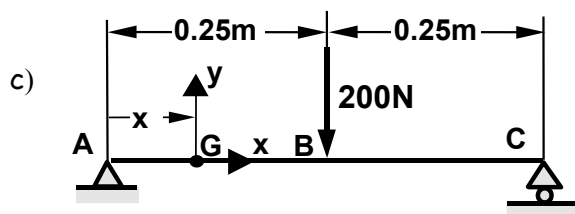
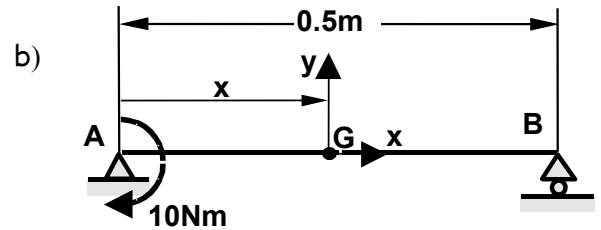
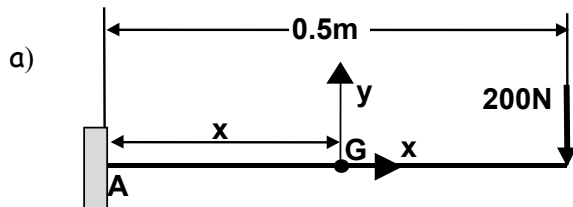
**REPONSES N°7**

| Cas N° | Isostatique | Hyperstatique de d° | Liaisons Incomplètes | Liaisons Incorrectes |
|--------|-------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| 1      | X           |                     |                      |                      |
| 2      | X           |                     |                      |                      |
| 3      | X           |                     |                      |                      |
| 4      |             | 2                   |                      |                      |
| 5      |             |                     |                      | X                    |
| 6      |             |                     |                      | X                    |
| 7      |             | 1                   |                      |                      |
| 8      |             | 1                   |                      |                      |
| 9      |             |                     |                      | X                    |
| 10     | X           |                     |                      |                      |
| 11     | X           |                     | X                    |                      |
| 12     |             | 1                   | X                    |                      |

# TORSEUR DE SECTION

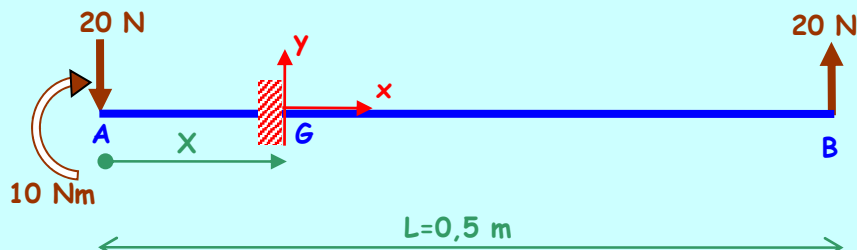
## PROBLÈME N°1

Déterminer les expressions, en fonction de  $x$  (dans  $x, y, z$ ), des composantes non nulles du torseur de section le long de la poutre et tracer leurs variations dans les quatre cas suivants :

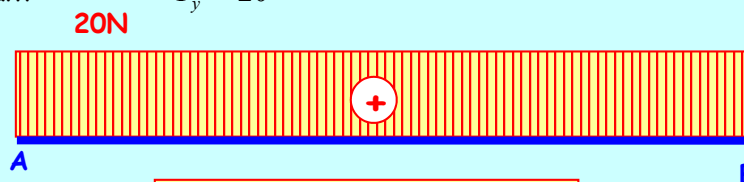


## REPONSES N°1 Voir Annexe N°2

Equilibre



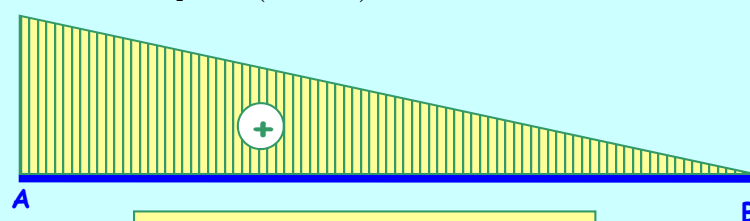
Effort Tranchant



Effort Tranchant :  $T_y$

Moment de Flexion  
10 Nm

$$M_z = 20(0,5 - x)$$



Moment Fléchissant :  $M_z$

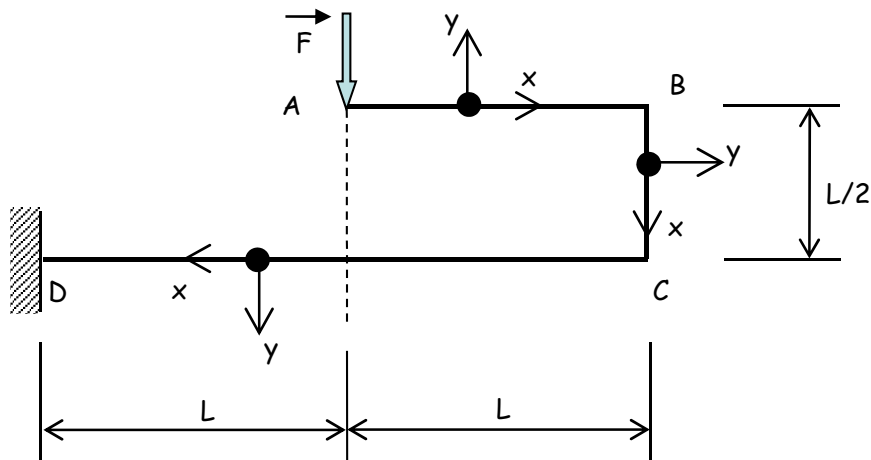
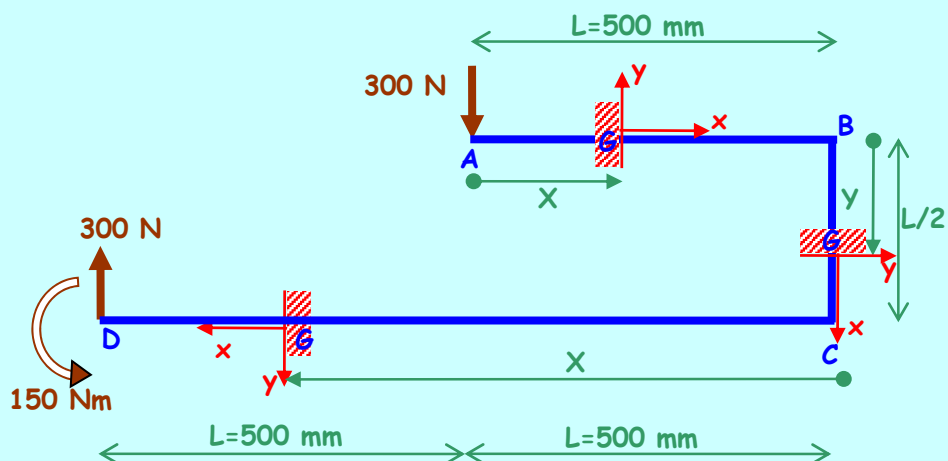
**PROBLÈME N°2**

Le système suivant est constitué de trois poutres dans le plan. La poutre AB est de longueur  $L$ , la poutre BC est de longueur  $L/2$  et la poutre CD est de longueur  $2L$ . Une force  $\vec{F}$  est appliquée en A. Le système est encastré en D.

Déterminer les expressions des composantes non nulles du torseur de section dans chacune des poutres et tracer leurs variations.

Données :  $L = 500 \text{ mm}$   
Module de la force :  $300 \text{ N}$

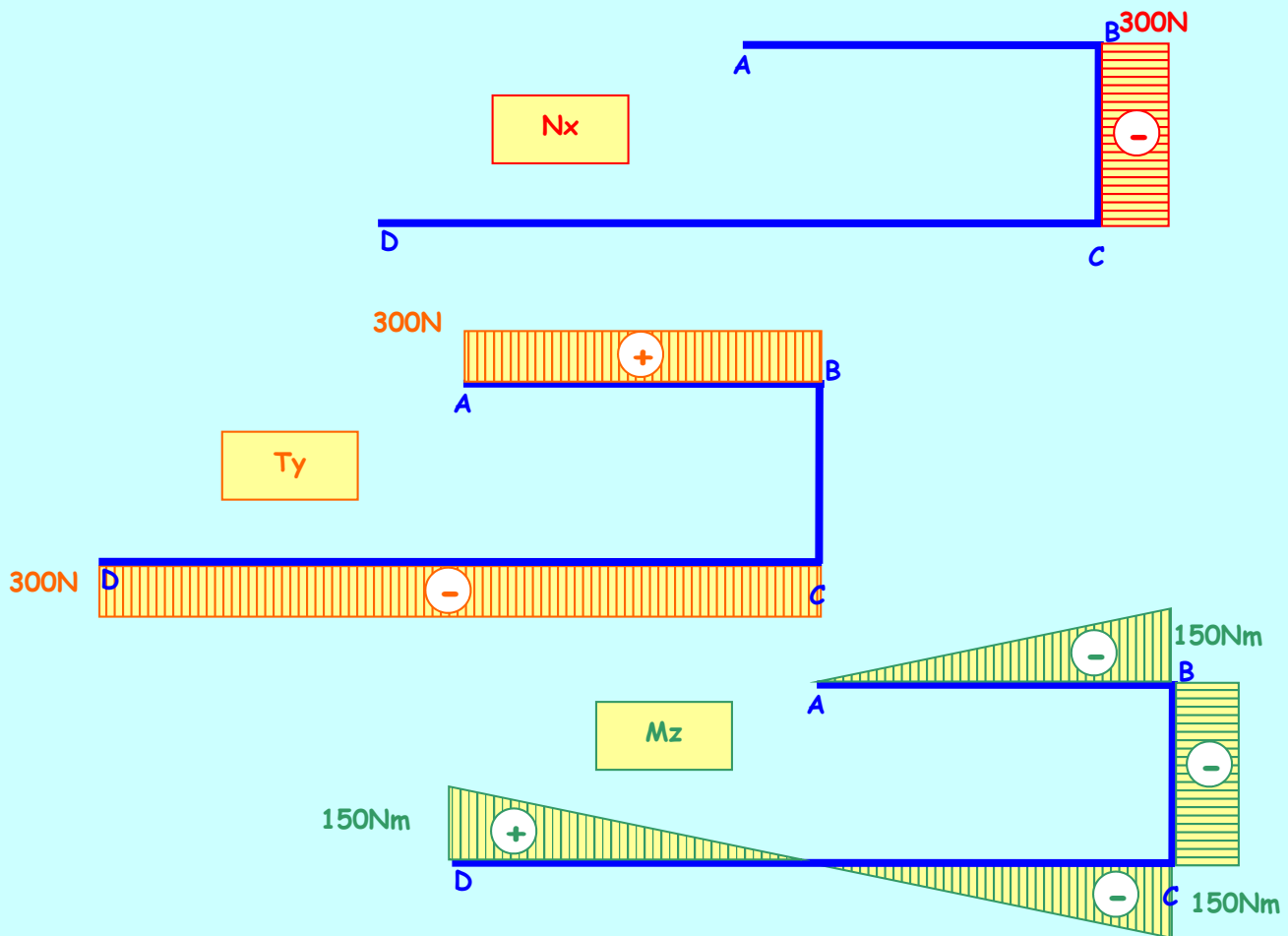
Remarque : Il n'est pas nécessaire de conduire une étude statique afin de déterminer les réactions en D.

**REPONSES N°2**

$$\text{Zone AB : } 0 < X < 500\text{mm} \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_G \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = 0 \\ T_y = 300 \end{array} \right. \\ \vec{M}_G \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_z = -300X \end{array} \right. \end{array} \right.$$

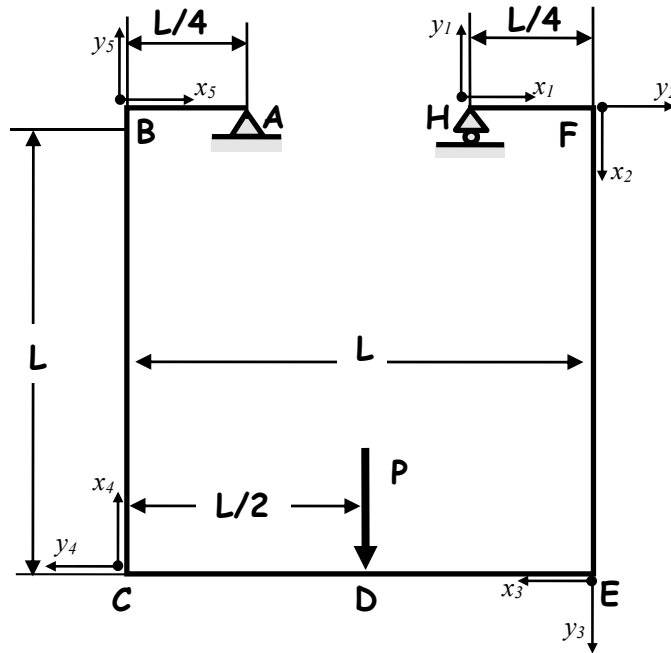
$$\text{Zone BC : } 0 < X < 250\text{mm} \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_G \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = -300 \\ T_y = 0 \end{array} \right. \\ \vec{M}_G \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_z = -150\text{Nm} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\text{Zone CD : } 0 < X < 1000\text{mm} \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_G \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = 0 \\ T_y = -300 \end{array} \right. \\ \vec{M}_G \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_z = 300(X - 500) \end{array} \right. \end{array} \right.$$



**PROBLÈME N°3**

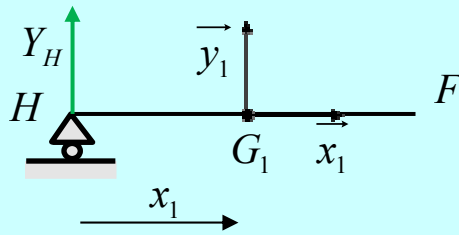
Déterminer les expressions, en fonction de  $x$  (dans  $x,y,z$ ), des composantes non nulles du torseur de section le long de la poutre et tracer leurs variations.

**REPONSES N°3**

$$\text{Equilibre: } \begin{cases} \vec{R}_A + \vec{R}_H + \vec{P} = \vec{0} \\ M_A(\vec{R}_A) + M_A(\vec{P}) + M_A(\vec{R}_H) = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A + Y_H + P = 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -PL/4 + Y_H L/2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_A = P/2 \\ Y_H = P/2 \end{cases}$$

$$\vec{M}_A(\vec{P}) = \vec{M}_D(\vec{P}) + \vec{AD} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} L/4 & 0 & 0 \\ L & \wedge & -P \\ 0 & 0 & -PL/4 \end{vmatrix}$$

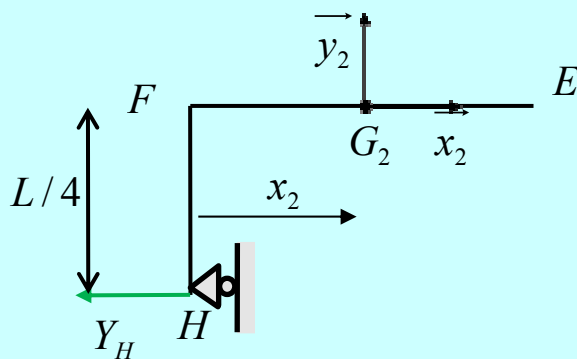
$$\vec{M}_A(\vec{R}_H) = \vec{M}_H(\vec{R}_H) + \vec{AH} \wedge \vec{R}_H = \begin{vmatrix} L/2 & 0 & 0 \\ 0 & \wedge & Y_H \\ 0 & 0 & Y_H L/2 \end{vmatrix}$$



**Zone de HF :**  $G_1 \in [HF]$   $x_1 \in [0; L/2]$

$$[T_{\text{int}}^{HF}]_{G_1} = -[T_{\text{ext} \rightarrow \text{amont}}]_{G_1} = - \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ P/2 & 0 \\ 0 & -x_1 P/2 \end{Bmatrix}_{G_1}$$

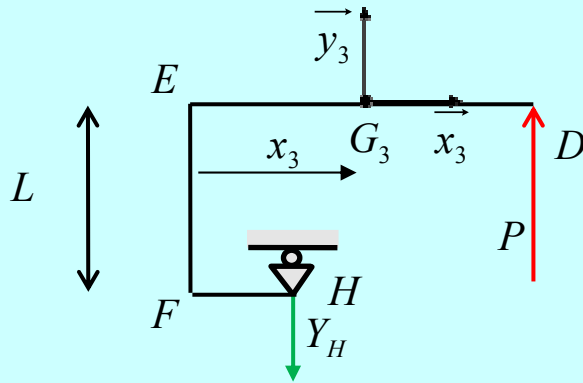
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{G_1} \Rightarrow \begin{cases} N_x = 0 \\ T_y = -P/2 \\ T_z = 0 \end{cases} \quad \overrightarrow{M}_{G_1} \Rightarrow \begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = x_1 P/2 \end{cases} \end{array} \right\}_{G_1}$$



**Zone de FE :**  $G_2 \in [FE]$   $x_2 \in [0; L]$

$$[T_{\text{int}}^{FE}]_{G_2} = -[T_{\text{ext} \rightarrow \text{amont}}]_{G_2} = - \begin{Bmatrix} -P/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -PL/8 \end{Bmatrix}_{G_2}$$

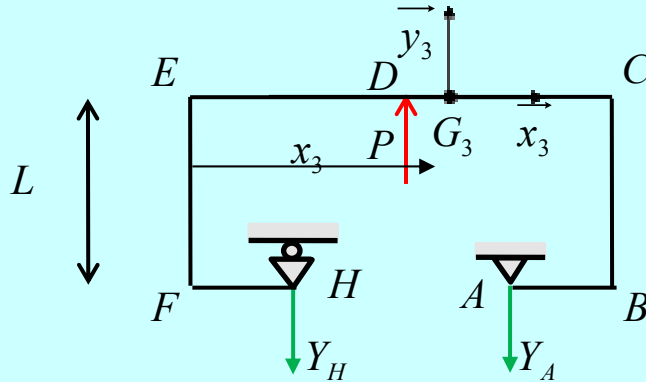
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{G_2} \Rightarrow \begin{cases} N_x = P/2 \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{cases} \quad \overrightarrow{M}_{G_2} \Rightarrow \begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = PL/8 \end{cases} \end{array} \right\}_{G_2}$$



**Zone de ED :**  $G_3 \in [ED] \quad x_3 \in [0; L/2]$

$$[T_{\text{int}}^{ED}]_{G_3} = -[T_{\text{ext} \rightarrow \text{amont}}]_{G_3} = - \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -P/2 & 0 \\ 0 & -(L/4 - x_3)P/2 \end{array} \right\}_{G_3}$$

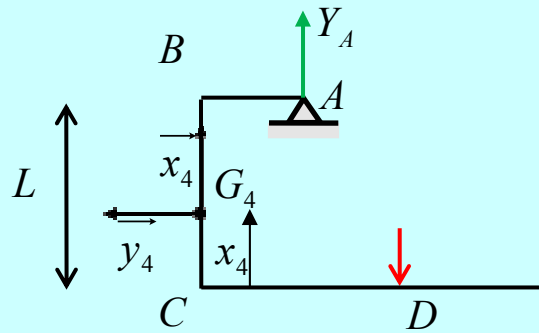
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{G_3} \Rightarrow \begin{array}{l} N_x = 0 \\ T_y = P/2 \\ T_z = 0 \end{array} \quad \overrightarrow{M}_{G_3} \Rightarrow \begin{array}{l} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = (L/4 - x_3)P/2 \end{array} \end{array} \right\}_{G_3}$$



**Zone de DC :**  $G_3 \in [DC] \quad x_3 \in [L/2; L]$

$$[T_{\text{int}}^{DC}]_{G_3} = +[T_{\text{ext} \rightarrow \text{aval}}]_{G_3} = + \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -P/2 & 0 \\ 0 & -(3L/4 - x_3)P/2 \end{array} \right\}_{G_3}$$

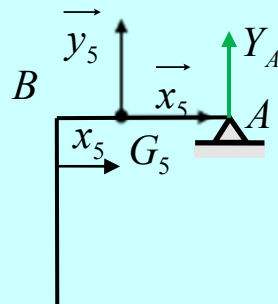
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{G_3} \Rightarrow \begin{array}{l} N_x = 0 \\ T_y = -P/2 \\ T_z = 0 \end{array} \quad \overrightarrow{M}_{G_3} \Rightarrow \begin{array}{l} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = -(3L/4 - x_3)P/2 \end{array} \end{array} \right\}_{G_3}$$



**Zone de CB :**  $G_4 \in [CB] \quad x_4 \in [0; L]$

$$[T_{\text{int}}^{CB}]_{G_4} = +[T_{\text{ext} \rightarrow \text{aval}}]_{G_4} = + \begin{Bmatrix} P/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & PL/8 \end{Bmatrix}_{G_4}$$

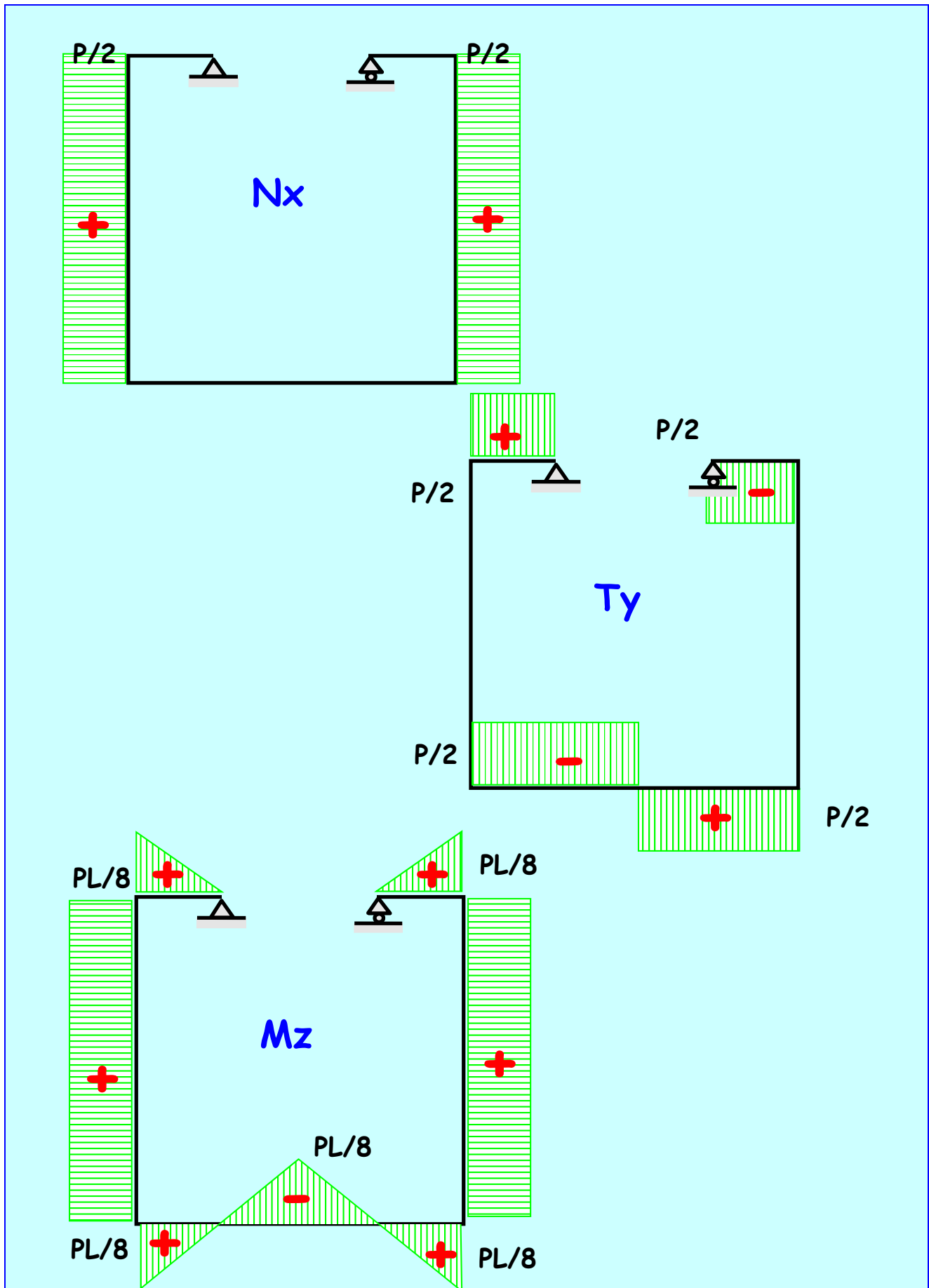
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{G_4} \Rightarrow \begin{cases} N_x = P/2 \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{cases} \quad \overrightarrow{M}_{G_4} \Rightarrow \begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = PL/8 \end{cases} \end{array} \right\}_{G_4}$$



**Zone de BA :**  $G_5 \in [BA] \quad x_5 \in [0; L/4]$

$$[T_{\text{int}}^{BA}]_{G_5} = +[T_{\text{ext} \rightarrow \text{aval}}]_{G_5} = + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ P/2 & 0 \\ 0 & (L/4 - x_5)P/2 \end{Bmatrix}_{G_5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{G_5} \Rightarrow \begin{cases} N_x = 0 \\ T_y = P/2 \\ T_z = 0 \end{cases} \quad \overrightarrow{M}_{G_5} \Rightarrow \begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = (L/4 - x_5)P/2 \end{cases} \end{array} \right\}_{G_5}$$



## PROBLÈME N°4

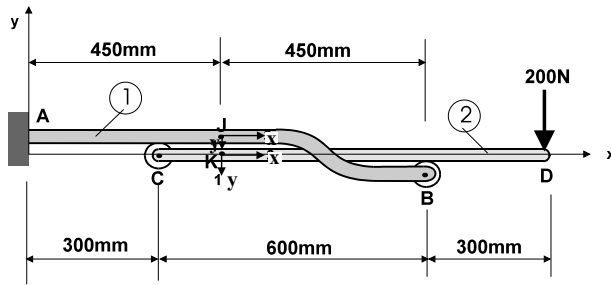


Figure 1

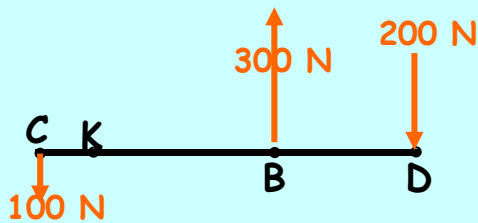
Un support ajustable plan est composé de deux poutres AB notée (1) et CD notée (2). La liaison en A est un encastrement, les liaisons en C et B des liaisons ponctuelles sans frottement. Une force verticale de 200N est appliquée en D. Notez l'orientation particulière du repère !

1°) Isolez le solide (2). Calculez dans le repère  $x, y, z$  les composantes des actions en B et C s'exerçant sur celui-ci.

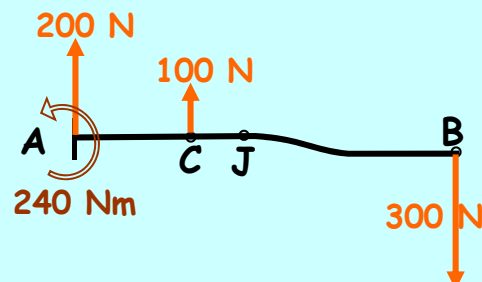
2°) Isolez le solide (1). Calculez dans le repère  $x, y, z$  la réaction et le moment en A (en Nm)

3°) Calculer (dans le repère  $x, y, z$ ) l'effort tranchant  $T_y$  (en N) et le moment fléchissant  $M_z$  (en Nm) au point J de la poutre AB et au point K de la poutre CD.

## REPONSES N°4



$$\begin{aligned}\vec{F}_{C_{1/2}} &= -100\vec{j} & \vec{F}_{B_{1/2}} &= 300\vec{j} \\ T_y^J &= 300\text{ N} & M_z^J &= 135\text{ Nm}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= 200\vec{j} & \vec{M}_A &= 240\vec{k} \\ T_y^K &= -100\text{ N} & M_z^K &= 15\text{ Nm}\end{aligned}$$

## PROBLÈME N°5

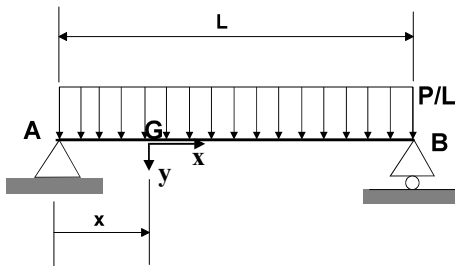


Figure 2a

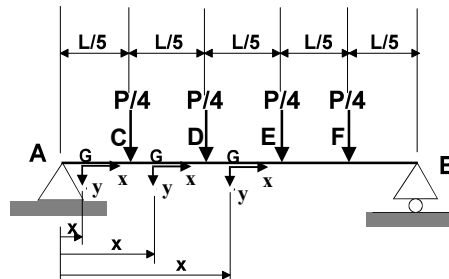


Figure 2b

Une poutre de longueur  $L$  et de poids  $P$  repose sur deux appuis. La liaison en A est une articulation plane, la liaison en B une liaison ponctuelle sans frottement. Le poids  $P$  est modélisé soit comme une charge uniformément répartie à raison de  $\frac{P}{L}$  N/m (voir Figure 2a), soit avec quatre forces concentrées équidistantes  $\frac{P}{4}$  (voir Figure 2 b).

Notez que le repère de calcul a son axe « y » dirigé vers le bas.

1°) Après avoir déterminé les réactions en A et B, calculez les expressions du moment fléchissant  $M_z$  (dans le repère  $x, y, z$ ) dans chacun des deux cas en fonction de  $P$ ,  $L$  et  $x$  sous forme de polynôme réduit en  $x$  (présenter les résultats sous forme de tableau).

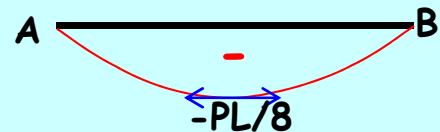
a) Entre A et B pour le cas (a).

b) Entre A et C, puis entre C et D et enfin entre D et E pour le cas (b).

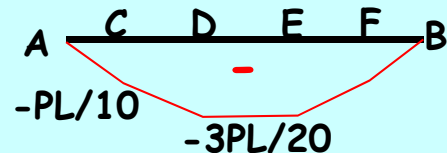
2°) Tracer les variations de  $M_z$  dans chacun des deux cas en indiquant la valeur de l'extremum du moment fléchissant en fonction de  $P$  et de  $L$ .

## REPONSES N°5

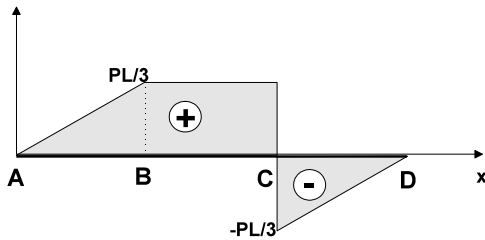
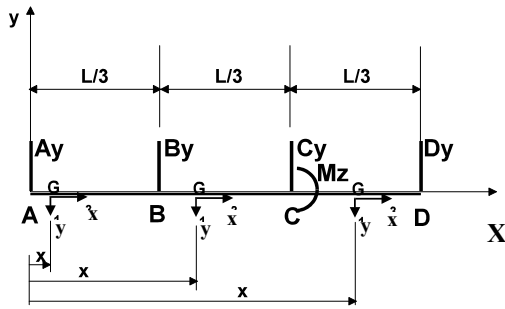
Cas (a) : 
$$M_z^{AB} = -\frac{P}{2}x + \frac{P}{2L}x^2$$



Cas (b) : 
$$M_z^{AC} = -\frac{P}{2}x \quad M_z^{CD} = -\frac{P}{4}x - \frac{PL}{20} \quad M_z^{DE} = -\frac{3PL}{20}$$



## PROBLÈME N°6



Une poutre de longueur  $L$  est en équilibre sous l'action d'un torseur extérieur plan composé de quatre forces verticales inconnues,  $A_y$  en A,  $B_y$  en B,  $C_y$  en C,  $D_y$  en D et d'un moment inconnu  $M_z$  en C. On connaît le diagramme représentant les variations du moment fléchissant  $M_z$  dans le repère  $x, y, z$  en fonction de  $P$  (homogène à une force) et  $L$ .

Notez que le repère de calcul a son axe «  $y$  » dirigé vers le bas.

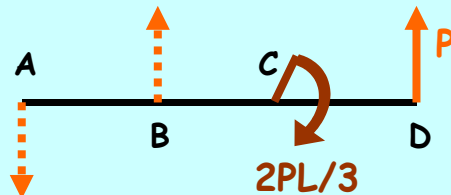
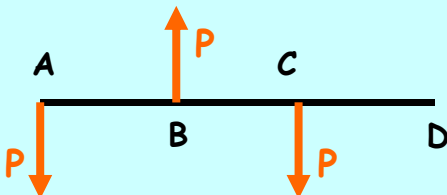
1°) A partir du diagramme, écrire les équations, sous forme de polynôme réduit en  $x$ , (en fonction de  $P$ ,  $L$  et  $x$ ) représentant les variations de  $M_z$  pour chacune des trois zones AB, BC et CD. En déduire les expressions de l'effort tranchant  $T_y$  en fonction de  $P$  dans les trois zones.

2°) Calculez à partir des efforts tranchants dans les trois zones AB, BC et CD les trois forces extérieures verticales en A, B et C en fonction de  $P$ .

3°) En écrivant dans le repère  $X, Y, Z$  que la poutre est en équilibre en déduire la quatrième force extérieure verticale en D en fonction de  $P$  et le moment extérieur en C en fonction de  $P$  et de  $L$ .

## REPONSES N°6

$$\begin{cases} M_z^{AB} = Px \\ M_z^{BC} = \frac{PL}{3} \\ M_z^{CD} = Px - PL \end{cases} \quad T_y = -M'_z \quad \begin{cases} T_y^{AB} = -P \\ T_y^{BC} = 0 \\ T_y^{CD} = -P \end{cases}$$



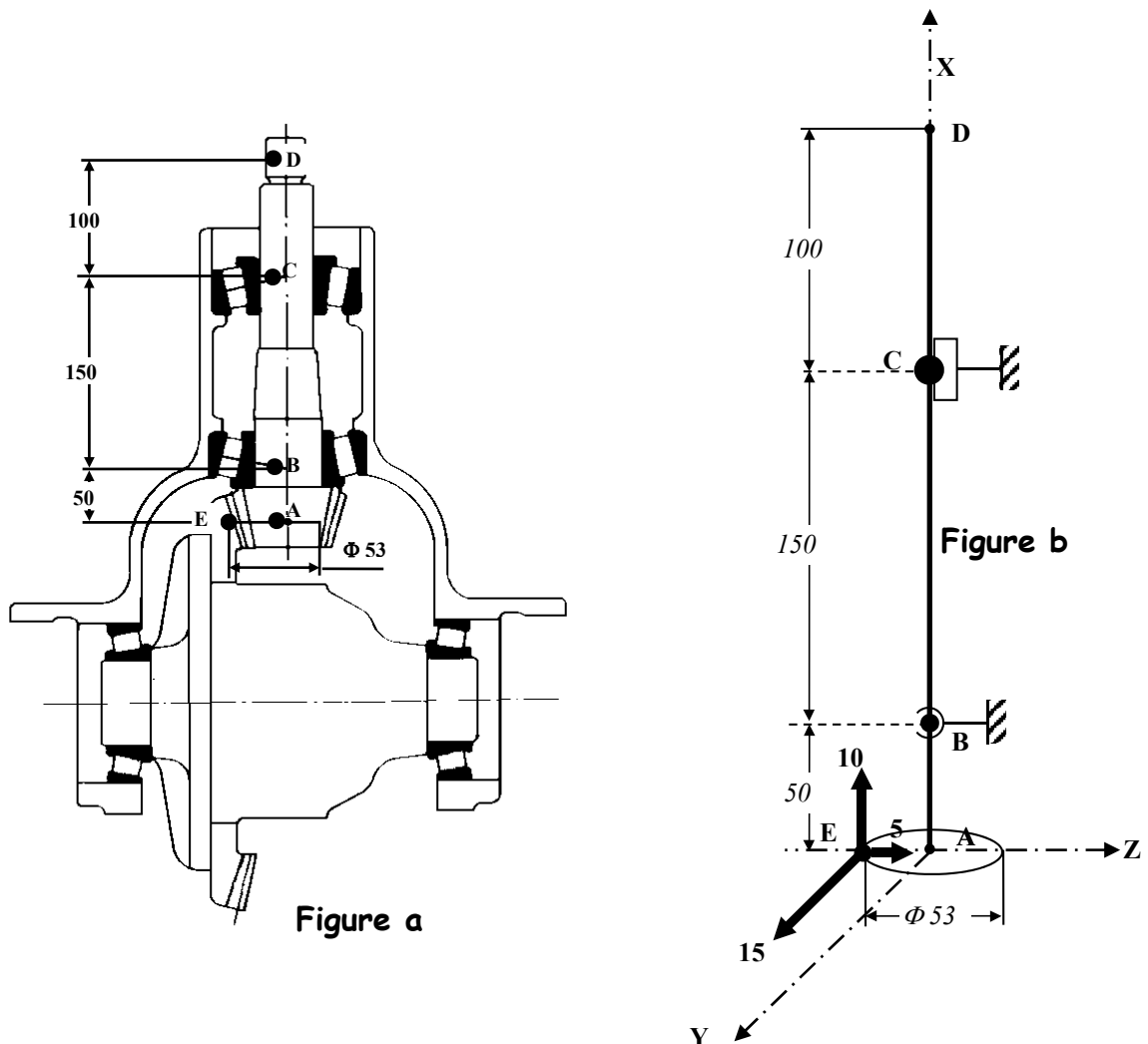
## PROBLÈME N°7

La figure a représente un pont à couple à denture spirale de camion. La figure b représente de façon schématique l'arbre porte-pignon ABCD. Cet arbre est en équilibre sous l'action, en B et C des réactions exercées par les roulements, en E des efforts exercés par la roue sur le pignon, en D du couple moteur. Les cotes sont en mm, les forces en kN.

En considérant la liaison roulement C / arbre comme une liaison sphère/cylindre (liaison linéaire annulaire) et la liaison roulement B / arbre comme une liaison sphère /sphère (liaison rotule ou sphérique).

1°) Calculez, dans le repère X,Y,Z, et en réduisant le torseur en B, les composantes des réactions en B et C exercées par les roulements sur l'arbre (en kN) et le couple moteur en D (en Nm).

2°) Déterminer les expressions, en fonction de x (dans x,y,z), des composantes du torseur de section le long de la poutre et tracer leurs variations



## REPONSES N°7

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{F}_E + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0} \\ \vec{M}_B = \vec{BE} \wedge \vec{F}_E + \vec{BC} \wedge \vec{F}_C + \vec{C}_m = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 + B_x = 0 \\ 15 + B_y + C_y = 0 \\ 5 + B_z + C_z = 0 \\ 397,5 + C_{mX} = 0 \\ -15 - 150C_z = 0 \\ -750 + 150C_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{F}_B = -10\vec{i} - 20\vec{j} - 4,9\vec{k} \\ \vec{F}_C = 5\vec{j} - 0,1\vec{k} \\ \vec{C}_m = -397,5\vec{i} \end{cases}$$

Zone AB :  $0 < x < 50\text{mm}$ 

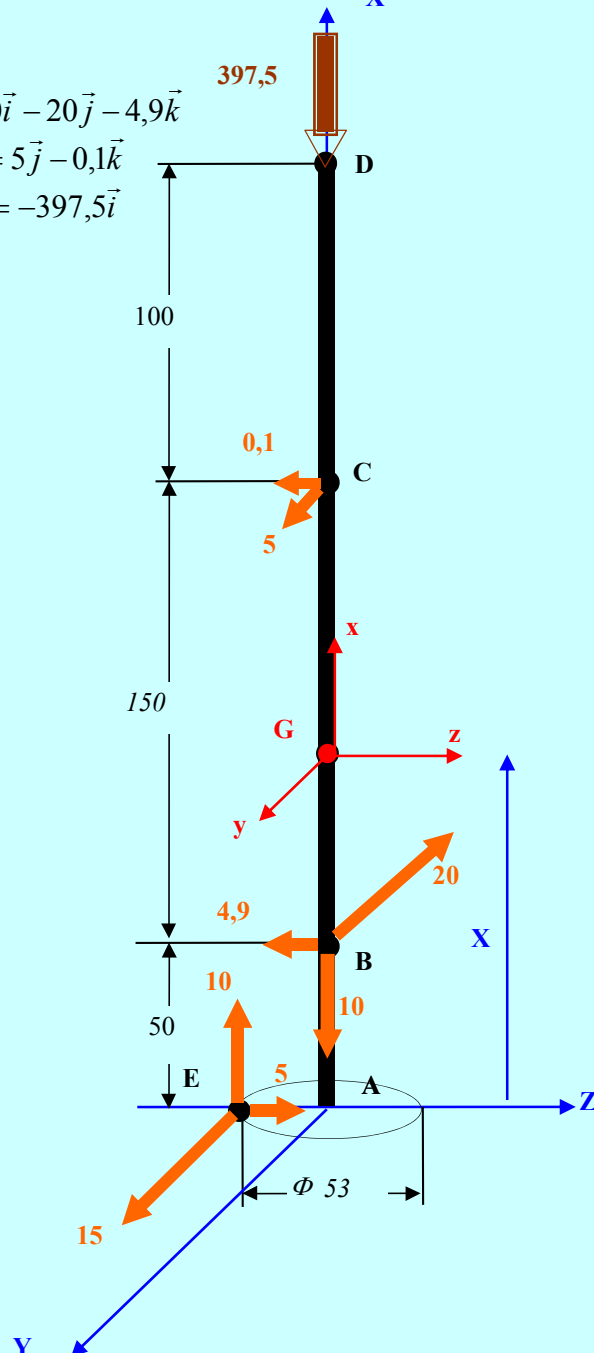
$$\begin{cases} \vec{R}_G \Rightarrow \begin{cases} N_x = -10 \\ T_y = -15 \\ T_z = -5 \end{cases} \\ \vec{M}_G \Rightarrow \begin{cases} M_x = -397,5 \\ M_y = 265 - 5x \\ M_z = 15x \end{cases} \end{cases}$$

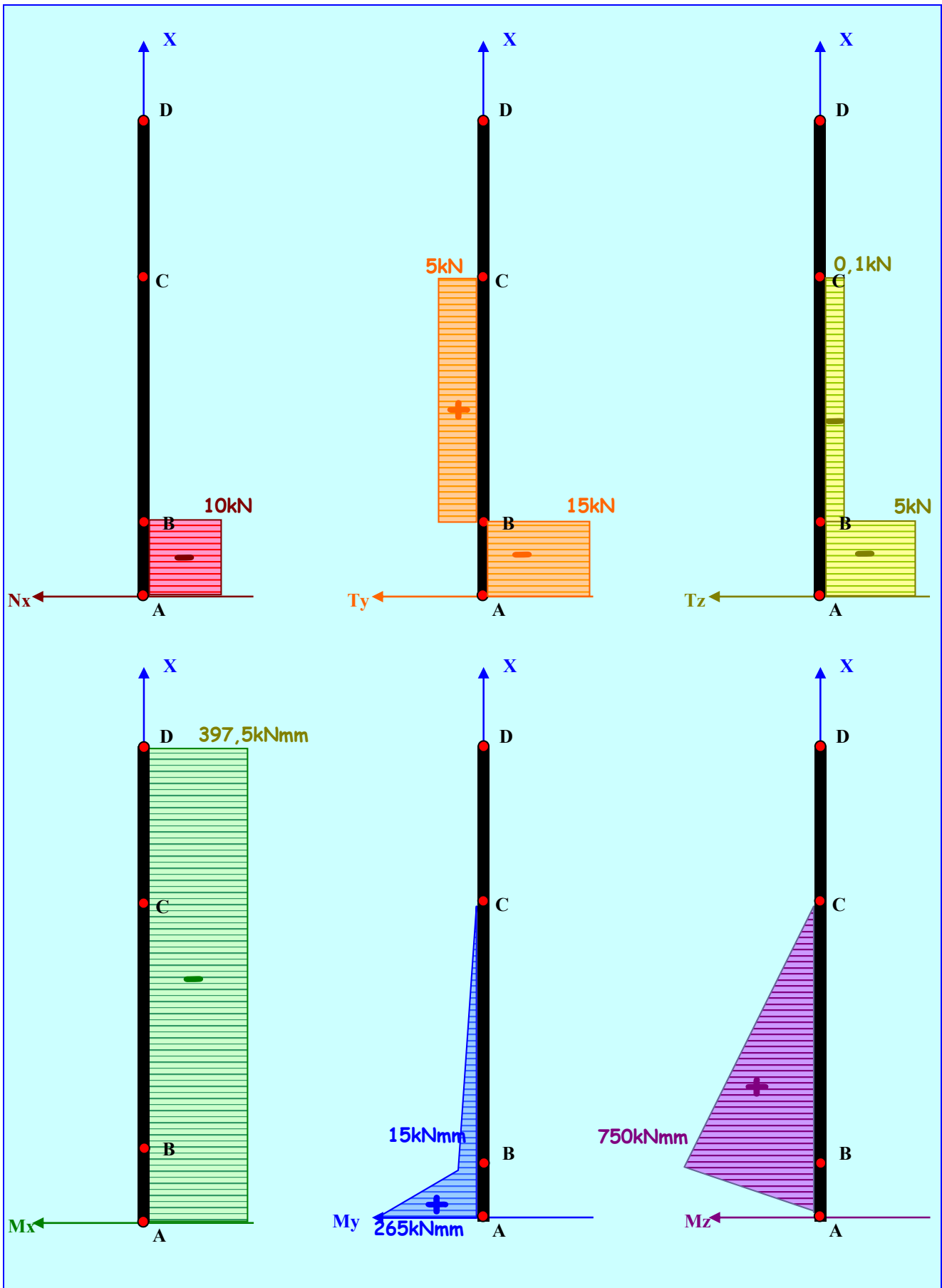
Zone BC :  $50\text{mm} < x < 200\text{mm}$ 

$$\begin{cases} \vec{R}_G \Rightarrow \begin{cases} N_x = 0 \\ T_y = 5 \\ T_z = -0,1 \end{cases} \\ \vec{M}_G \Rightarrow \begin{cases} M_x = -397,5 \\ M_y = -0,1x + 20 \\ M_z = -5x + 1000 \end{cases} \end{cases}$$

Zone CD :  $200\text{mm} < x < 300\text{mm}$ 

$$\begin{cases} \vec{R}_G \Rightarrow \begin{cases} N_x = 0 \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{cases} \\ \vec{M}_G \Rightarrow \begin{cases} M_x = -397,5 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \end{cases}$$





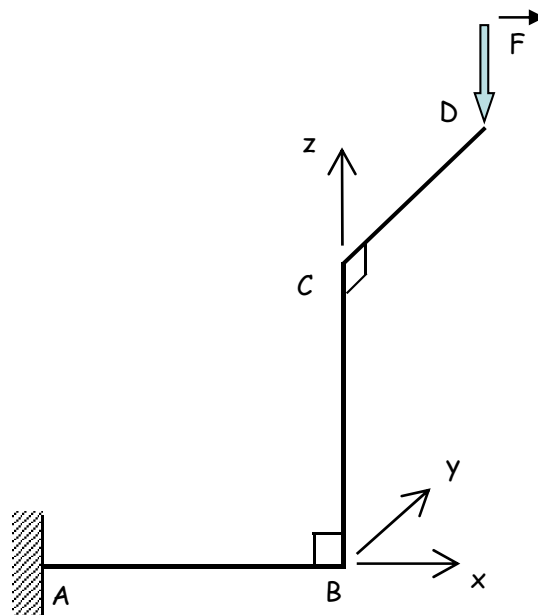
## PROBLÈME N°8

Le système suivant est constitué de trois poutres de longueur égale ( $L$ ) dans l'espace. Les trois poutres sont liées rigidement entre elles avec des angles de  $90^\circ$ .

Une force  $\vec{F}$  est appliquée en D. Le système est encastré en A.

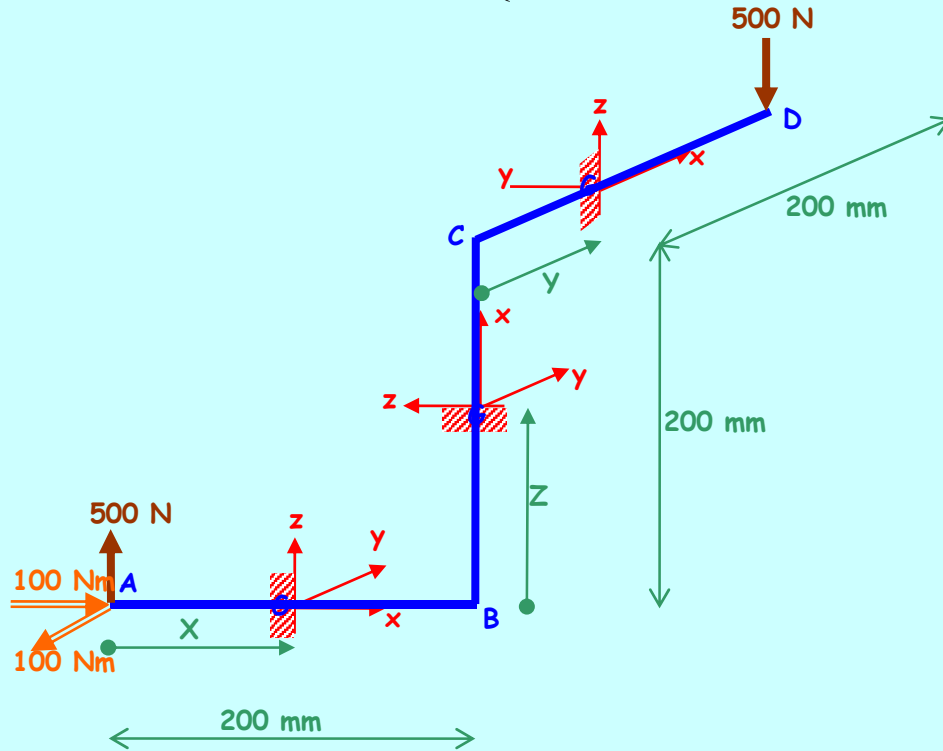
Données :  $L = 200 \text{ mm}$   
Module de la force :  $500 \text{ N}$

1. Etude statique  
Déterminer les actions exercées en A sur le système.
  
2. Torseur de section  
Déterminer les expressions du torseur de section dans les trois poutres et tracer les diagrammes des actions internes. En déduire l'endroit où le système risque de casser (les trois poutres étant identiques).



## REPNSES N°8

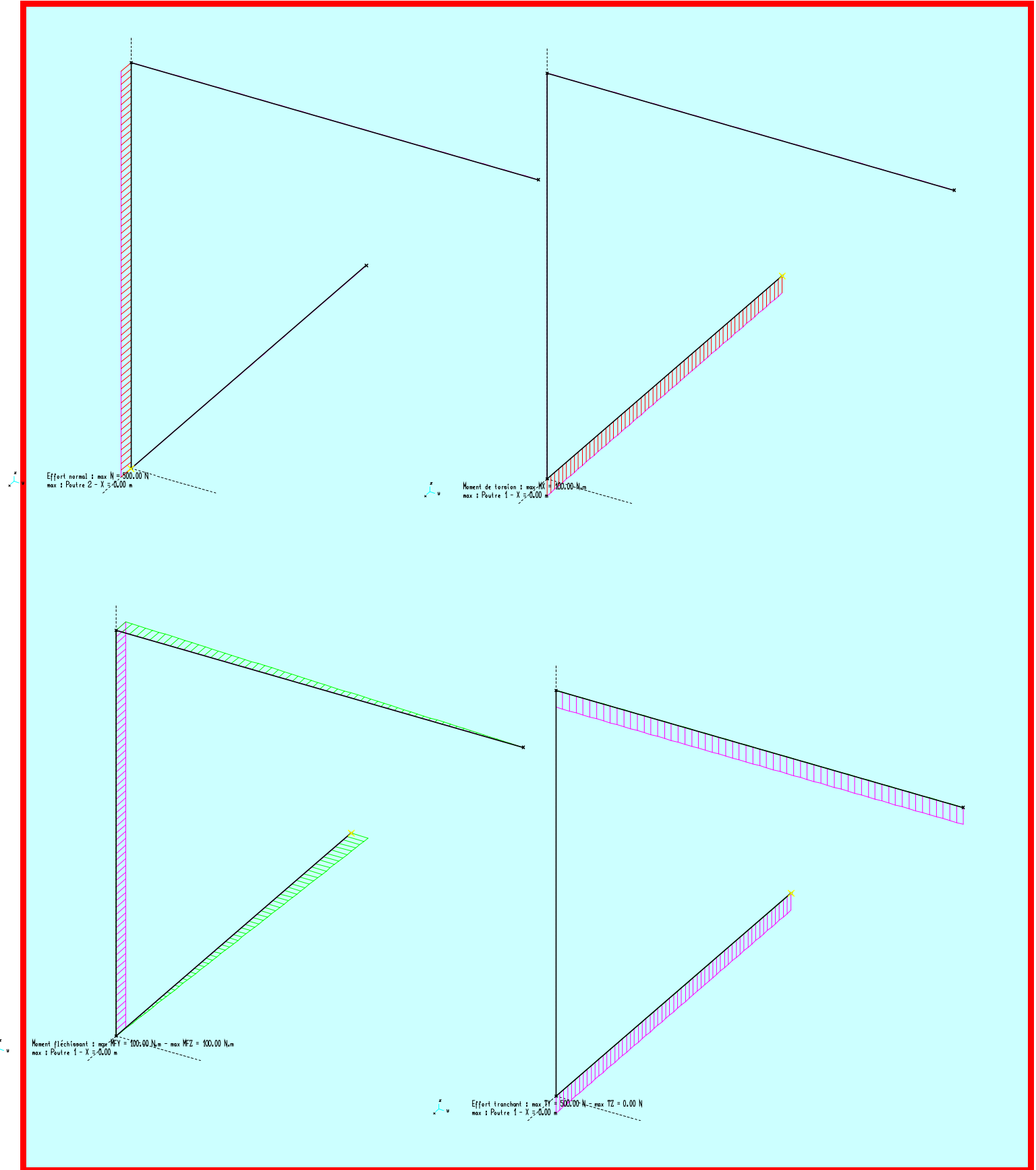
$$\text{Equilibre} \begin{cases} \vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_D = \vec{0} \\ \vec{M}_{/A} = \vec{AD} \wedge \vec{F}_D + \vec{M}_A = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = 0 \\ A_z - 500 = 0 \\ -500L + M_{AX} = 0 \\ 500L + M_{AY} = 0 \\ M_{AZ} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_A = +500\vec{k} \\ \vec{M}_A = 100\vec{i} - 100\vec{j} \end{cases}$$



$$\text{Zone AB : } 0 < X < 200\text{mm} \begin{cases} \vec{R}_G \Rightarrow \begin{cases} N_x = 0 \\ T_y = 0 \\ T_z = -500 \\ M_x = -100 \end{cases} \\ \vec{M}_G \Rightarrow \begin{cases} M_y = 500(200 - X) \\ M_z = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Zone BC : } 0 < Z < 200\text{mm} \begin{cases} \vec{R}_G \Rightarrow \begin{cases} N_x = -500 \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{cases} \\ \vec{M}_G \Rightarrow \begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = 100 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Zone CD : } 0 < Y < 200\text{mm} \begin{cases} \vec{R}_G \Rightarrow \begin{cases} N_x = 0 \\ T_y = 0 \\ T_z = -500 \\ M_x = 0 \end{cases} \\ \vec{M}_G \Rightarrow \begin{cases} M_y = 500(200 - Y) \\ M_z = 0 \end{cases} \end{cases}$$



**PROBLÈME N°9**

Une structure spatiale ABCD est soumise en A à un torseur en A :

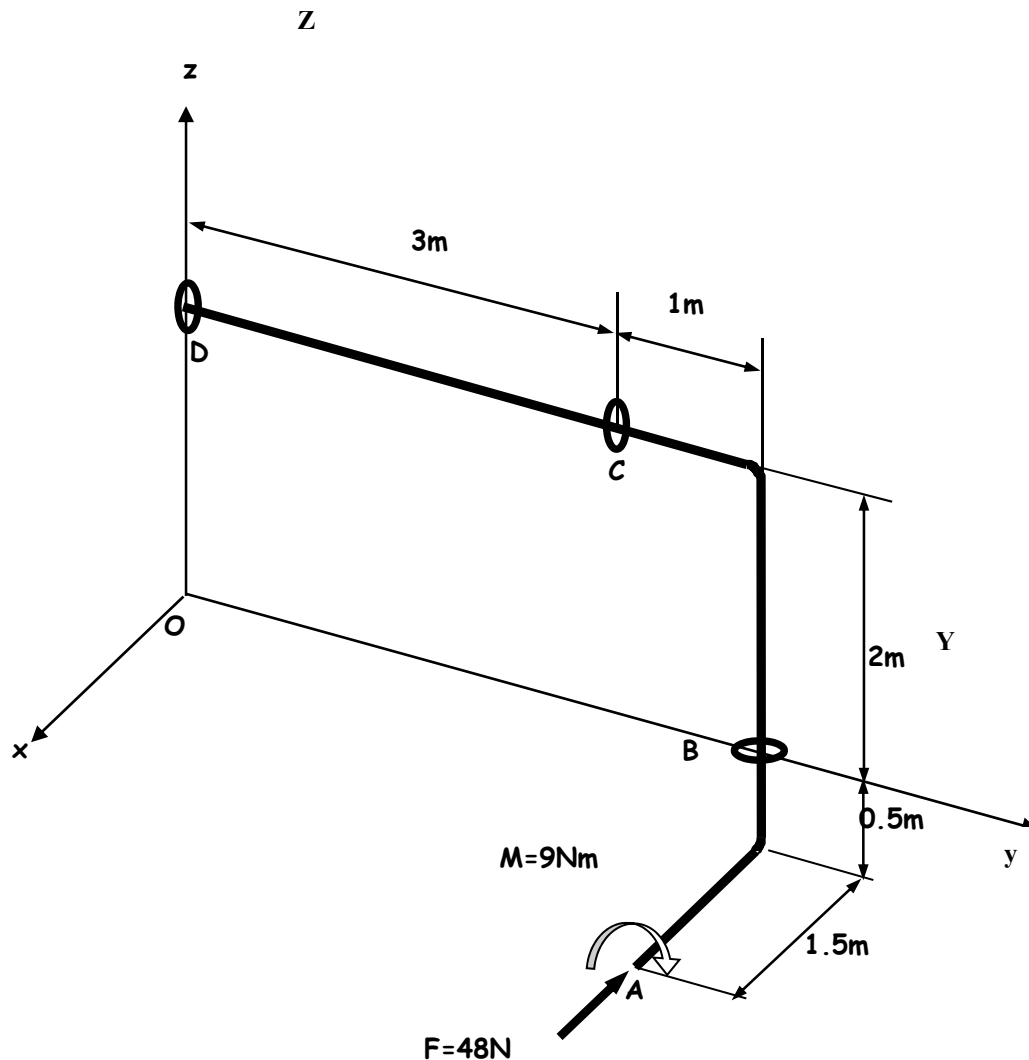
$$\vec{F} = -48\vec{i} \text{ (en N)}$$

$$\vec{M} = -9\vec{i} \text{ (en Nm)}$$

Les liaisons en B, C et D sont des « liaisons linéaires annulaires » (sphère/cylindre) parfaites et sans frottement (considérer que les réactions sont dans un plan perpendiculaire à l'axe de la structure).

1°) Calculer, en N, dans le repère xyz, les composantes des réactions en B, C et D.

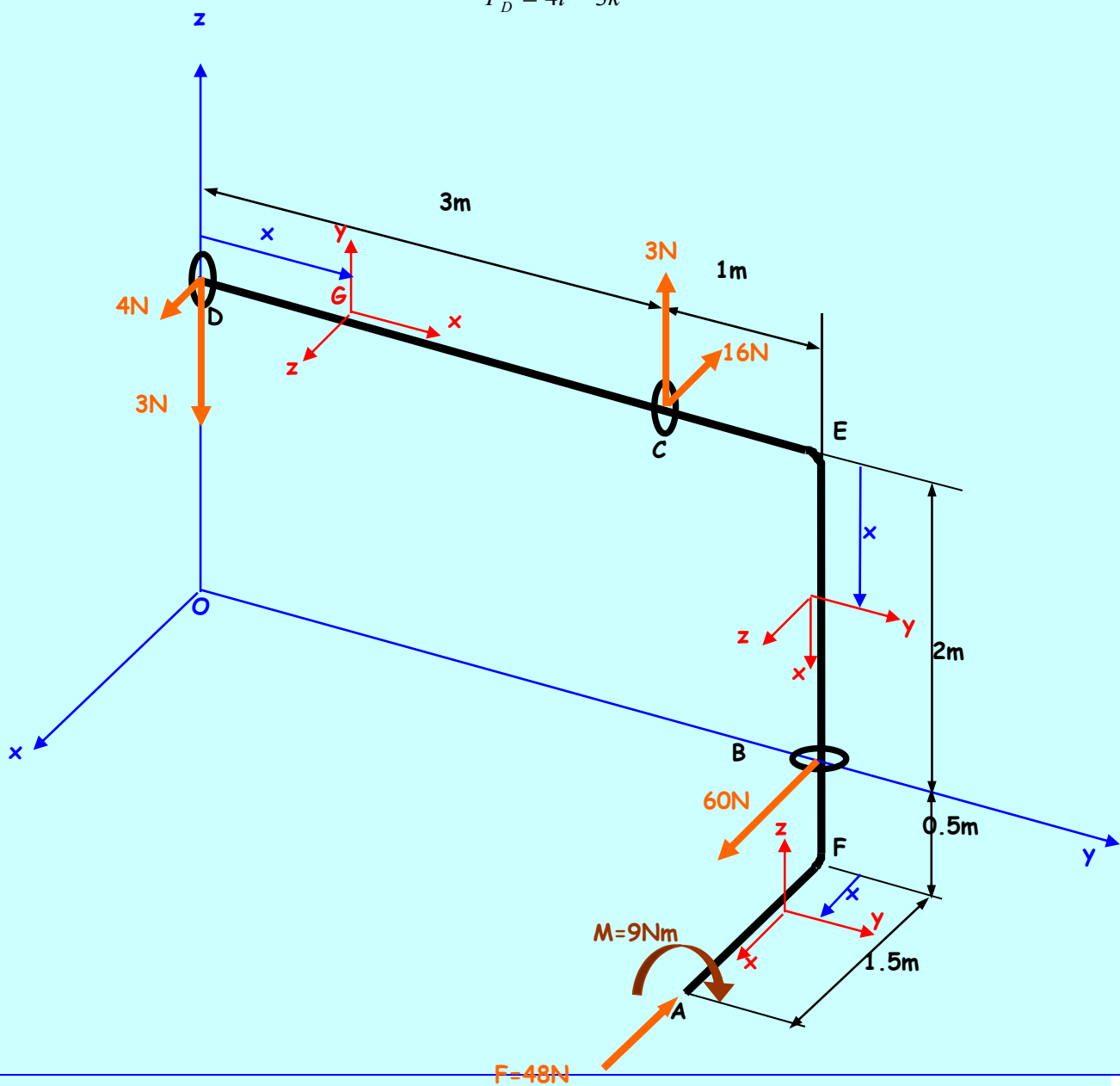
2°) Déterminer les expressions, en fonction de x (dans x,y,z), des composantes du torseur de section le long de la poutre et tracer leurs variations



## REPNSES N°9

$$\begin{cases} \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D = \vec{0} \\ \overrightarrow{DA} \wedge \vec{F}_A + \overrightarrow{DB} \wedge \vec{F}_B + \overrightarrow{DC} \wedge \vec{F}_C + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x + C_x + D_x = 48 \\ B_y = 0 \\ C_z + D_z = 0 \\ 2B_y + 3C_z = 9 \\ 2B_x = 120 \\ 4B_x + 3C_x = 192 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_B &= 60\vec{i} \\ \vec{F}_C &= -16\vec{i} + 3\vec{k} \\ \vec{F}_D &= 4\vec{i} - 3\vec{k} \end{aligned}$$



Zone DC :  $0 < x < 3\text{m}$ 

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = 0 \\ T_y = 3 \\ T_z = -4 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_x = 0 \\ M_y = -4x \\ M_z = -3x \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Zone CE :  $3\text{m} < x < 4\text{m}$ 

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = 0 \\ T_y = 0 \\ T_z = 12 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_x = 0 \\ M_y = 12x - 48 \\ M_z = -9 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Zone EB :  $0 < x < 2\text{m}$ 

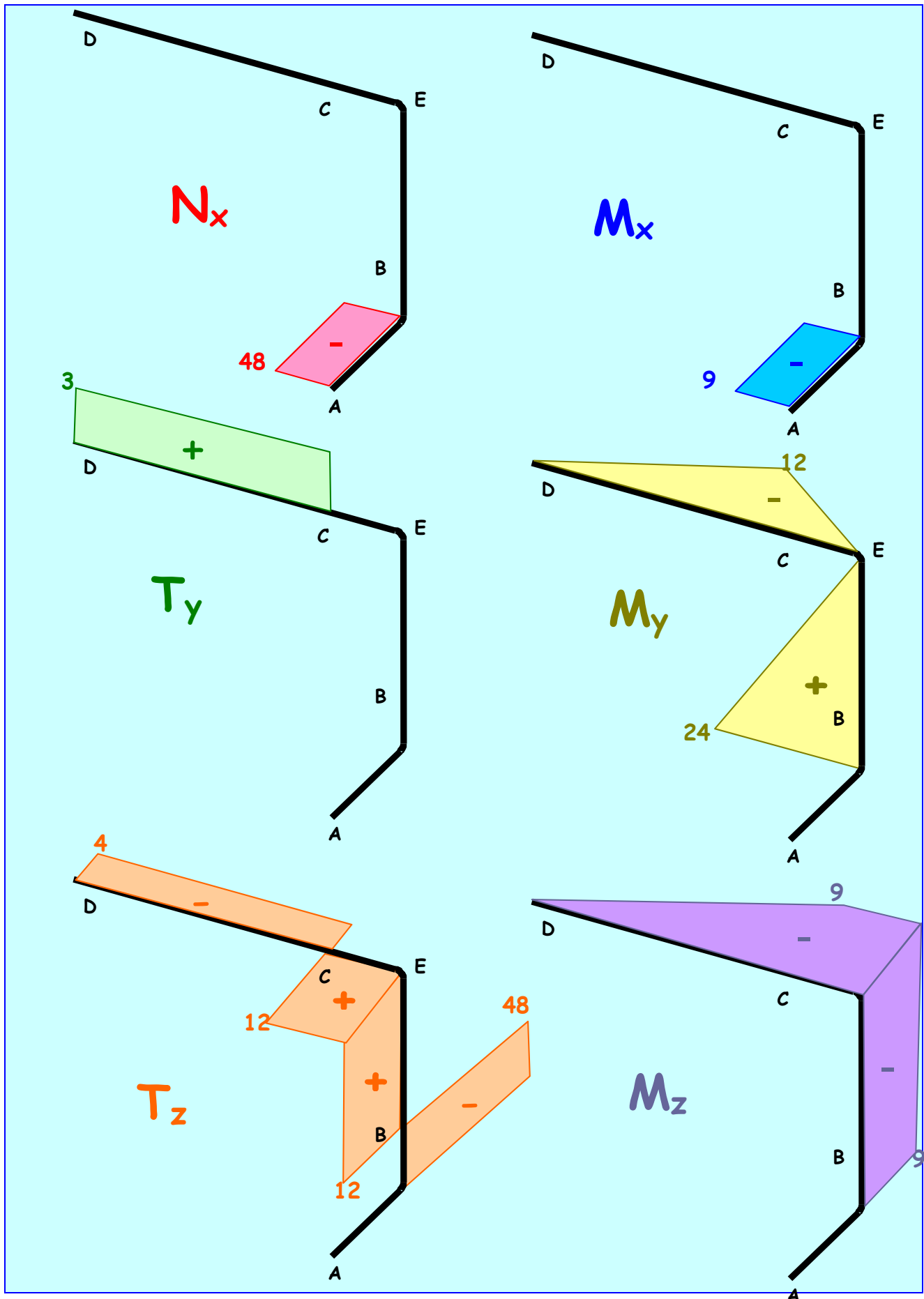
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = 0 \\ T_y = 0 \\ T_z = 12 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_x = 0 \\ M_y = 12x \\ M_z = -9 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Zone BF :  $2\text{m} < x < 2,5\text{m}$ 

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = 0 \\ T_y = 0 \\ T_z = -48 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_x = 0 \\ M_y = -48x + 120 \\ M_z = -9 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Zone FA :  $0 < x < 1,5\text{m}$ 

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = -48 \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_x = -9 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$



**PROBLÈME N°10**

La figure représente une pince de levage pour rails. La figure 2 représente le schéma de la pince. Les cotes sont en cm. Remarquez que la pince de levage admet un axe de symétrie vertical. La pince se compose de deux barres ABCD (1) et EFCG (2), de deux bielles HD (3) et HG (4) et d'un anneau de levage (5). Les poids propres de toutes les barres et de l'anneau sont négligeables. Toutes les liaisons en A, C, D, E, G et H sont des liaisons verrous. Elles sont supposées parfaites et sans frottement. Les calculs se font dans le repère xy.

1°) Isolez l'ensemble et déterminez la valeur des composantes verticales des réactions en A et E.

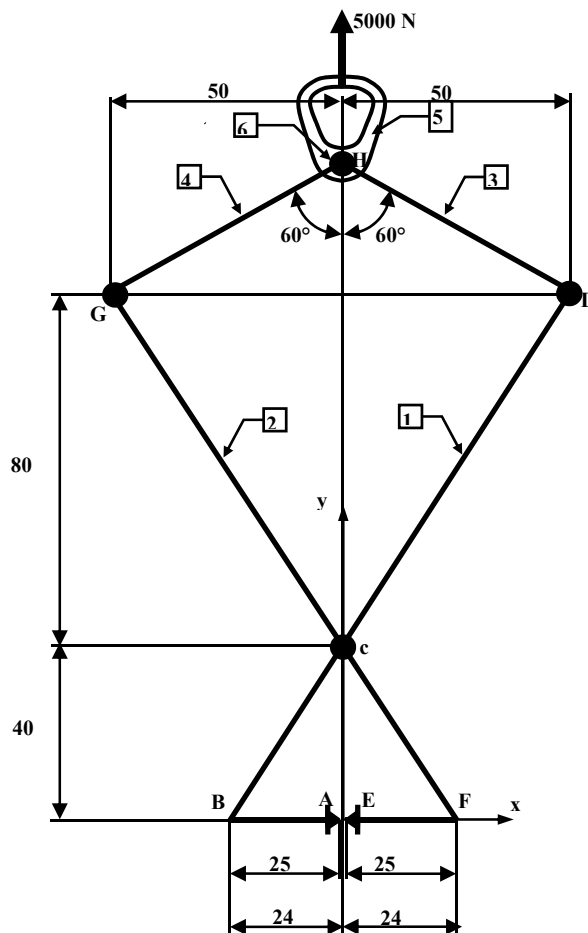
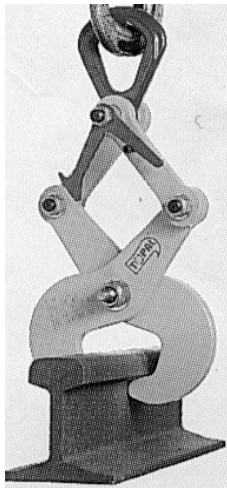
2°) Isolez les bielles (3) et (4) et donnez la direction des actions s'exerçant à leurs extrémités.

3°) Isolez l'anneau (5) et les deux bielles (3) et (4). Représentez les forces extérieures connues et inconnues s'exerçant sur ce sous-ensemble. Calculez (ou déterminez graphiquement) les actions s'exerçant en G et D sur ce sous-ensemble.

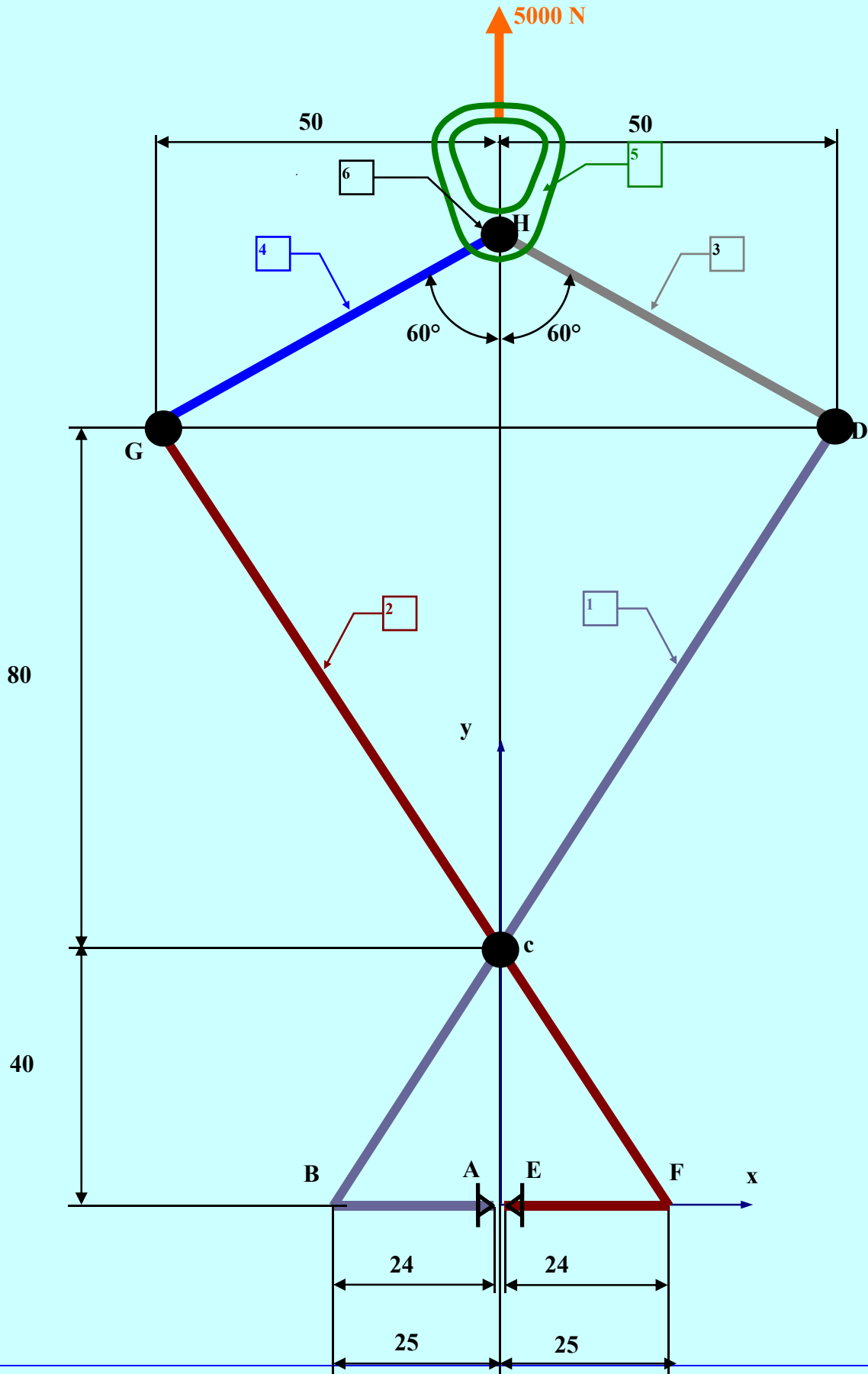
4°) Isolez la barre (1). Représentez les forces connues et inconnues s'exerçant sur cette barre. Calculez la composante horizontale de la réaction en A et les composantes de l'action en C.

5°) Le coefficient de frottement entre les barres (1) et (2) et le rail vaut 0.18. Ce coefficient est-il suffisant pour soulever le rail ? (en supposant qu'on remplace les verrous A et E par des contacts ponctuels).

6°) Tracez le diagramme des moments fléchissants sur la barre 1.

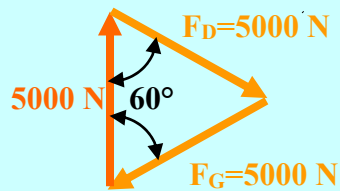


## REPONSES N°10



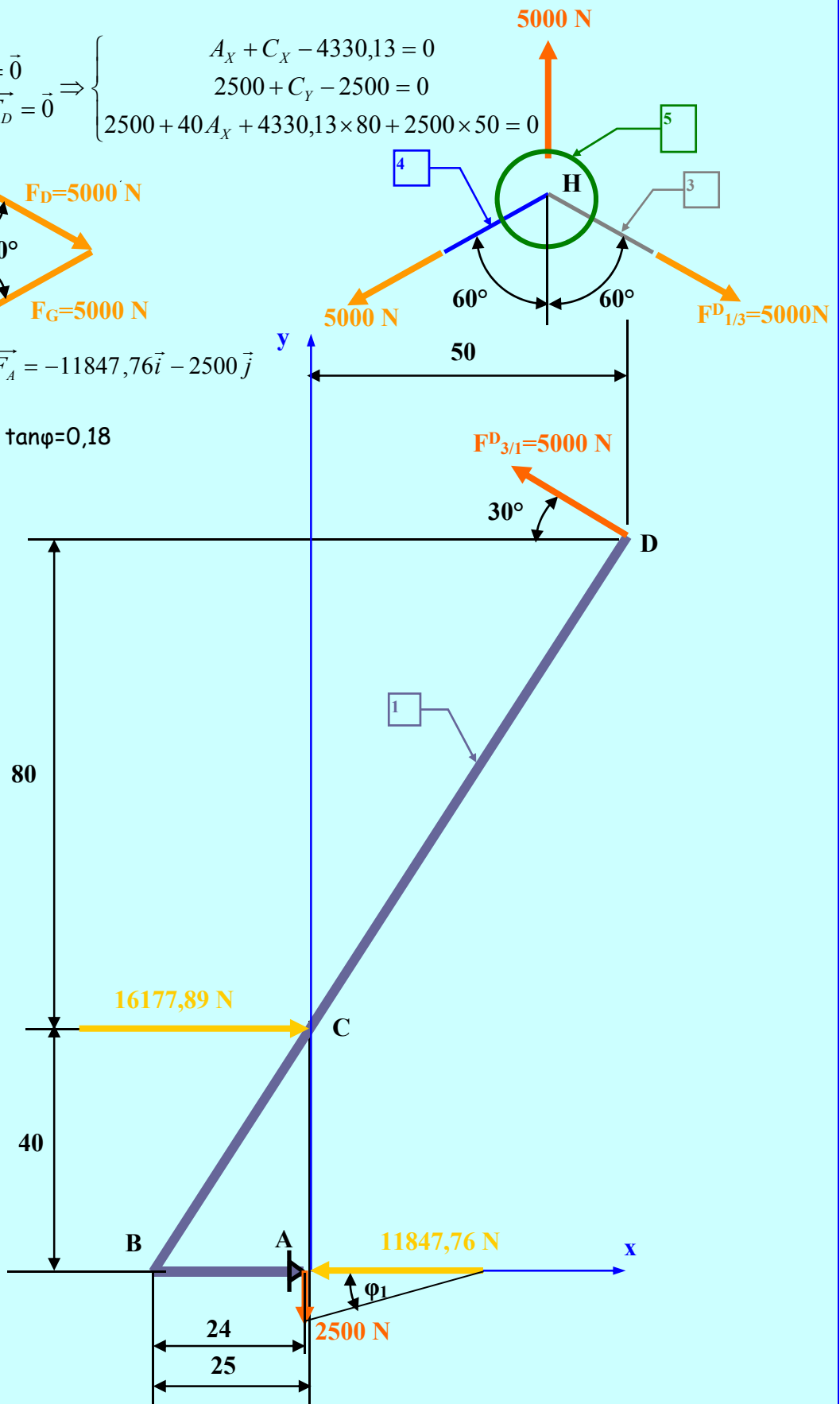
$$A_y = E_y \quad , \quad HG \text{ et } HD$$

$$\begin{cases} \vec{F}_A + \vec{F}_C + \vec{F}_D = \vec{0} \\ \overrightarrow{CA} \wedge \vec{F}_A + \overrightarrow{CD} \wedge \vec{F}_D = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_X + C_X - 4330,13 = 0 \\ 2500 + C_Y - 2500 = 0 \\ 2500 + 40A_X + 4330,13 \times 80 + 2500 \times 50 = 0 \end{cases}$$



$$\vec{F}_C = 16177,89\vec{i} \ ; \ \vec{F}_A = -11847,76\vec{i} - 2500\vec{j}$$

Non :  $\tan\varphi_1=0,21 > \tan\varphi=0,18$



Zone DC :  $0 < x < 94,34\text{mm}$

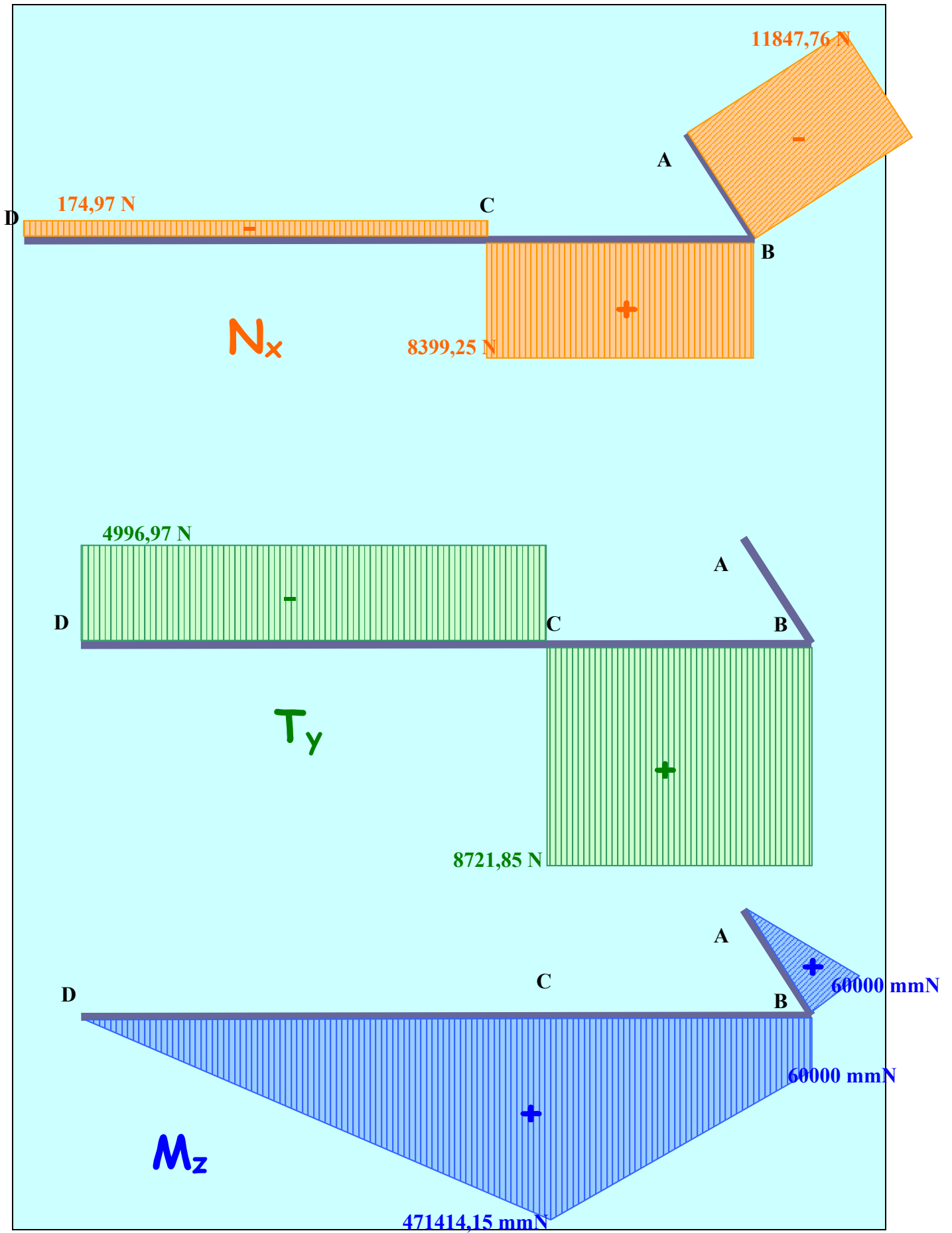
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = -174,97 \\ T_y = -4996,97 \\ 0 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ M_z = 4996,97x \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Zone CB :  $94,34\text{mm} < x < 141,51\text{mm}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = +8399,25 \\ T_y = 8721,85 \\ 0 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ M_z = -8721,85x + 1294233,48 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

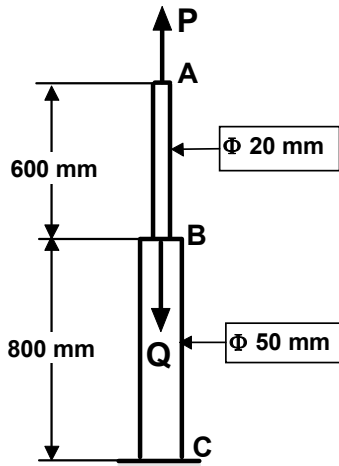
Zone BA :  $0 < x < 24\text{mm}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} N_x = -11847,76 \\ T_y = 2500 \\ 0 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{M_G} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ M_z = -2500x + 60000 \end{array} \right. \end{array} \right.$$



# TRACTION-COMPRESSION

## PROBLÈME N°1



La barre ABC est soumise à une force  $Q = 150 \text{ kN}$  et à une force  $P$  inconnue. Sachant que  $E = 200 \text{ GPa}$ , calculez la valeur de  $P$  pour laquelle le déplacement de A est nul. Calculez alors le déplacement de B.

*N.B. On néglige l'effet de la variation brutale de la section sur les allongements.*

## REPONSES N°1

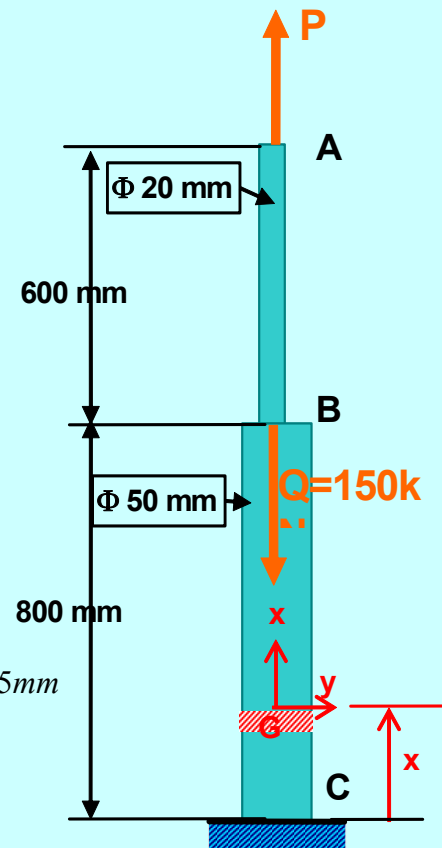
$$N_x^{CB} = -150 + P \quad N_x^{BA} = +P$$

$$\Delta L_{CB} = \frac{N_x^{CB} L_{CB}}{EA_{CB}} \quad \Delta L_{BA} = \frac{N_x^{BA} L_{BA}}{EA_{BA}}$$

$$\Delta A = 0 \Rightarrow \Delta L_{CB} + \Delta L_{BA} = 0$$

$$\frac{3P}{2} + \frac{8P}{25} - \frac{150 \times 8}{25} = 0 \Rightarrow P = 26,4 \text{ kN}$$

$$\Delta B = \Delta L_{CB} = \frac{(-150 + 26,4) 10^3 \times 800 \times 4}{2 \cdot 10^5 \times \pi \times 50^2} \Rightarrow \Delta B = -0,25 \text{ mm}$$



## PROBLÈME N°2

Un câble vertical en acier, de longueur 50m, de section droite circulaire, de module de YOUNG  $E = 210 \text{ GPa}$ , de limite élastique  $\sigma_e = 240 \text{ MPa}$ , de poids volumique  $\mu$  est soumis à son extrémité libre à un effort de traction  $P = 2000 \text{ N}$ . Le coefficient de sécurité vaut 6. Calculez le diamètre minimum du câble et son allongement quand:

a)  $\mu = 0$

b)  $\mu = 7.8 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$

## REPONSES N°2

**a)  $\mu = 0$**

$$N_x^{BA} = +P$$

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} \leq \frac{\sigma_e}{\alpha} \Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4P\alpha}{\pi\sigma_e}} \Rightarrow d = 8 \text{ mm}$$

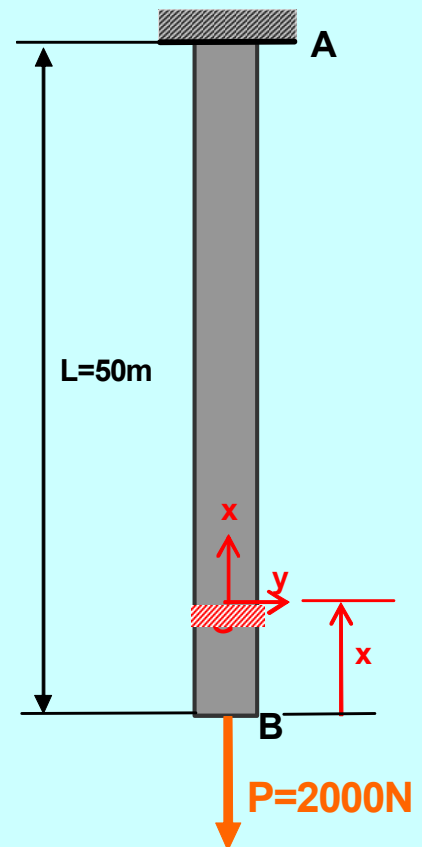
$$\Delta L = \frac{N_x L}{EA} = \frac{2000 \times 50 \times 10^3 \times 4}{210 \times 10^3 \times \pi \times 8^2} \Rightarrow \Delta L = 9,5 \text{ mm}$$

**b)  $\mu = 7.8 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$**

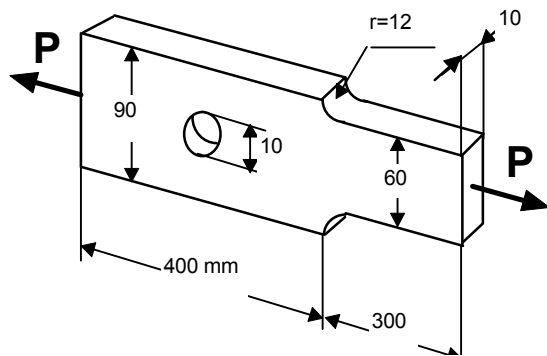
$$N_x^{BA} = P + p_{(x)} = P + \mu Ax \Rightarrow N_x^{\max} = P + \mu AL$$

$$\sigma_{xx} \leq \frac{\sigma_e}{\alpha} \Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi \left( \frac{\sigma_e}{\alpha} - \mu L \right)}} \Rightarrow d = 8,4 \text{ mm}$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{\Delta(dx)}{dx} \\ \sigma_{xx} &= \frac{P + \mu Ax}{A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta L = \int_0^L \left( \frac{P}{AE} + \frac{\mu x}{E} \right) dx = \frac{PL}{AE} + \frac{\mu L^2}{2E} = 9,05 \text{ mm}$$



## PROBLÈME N° 3



Calculez la contrainte maximum pour  $P = 36 \text{ kN}$

## REPONSES N°3

$$K_{\text{trou}} \Rightarrow \frac{r}{d} = \frac{5}{80} = 0,0625 \quad K_{\text{trou}} = 2,65$$

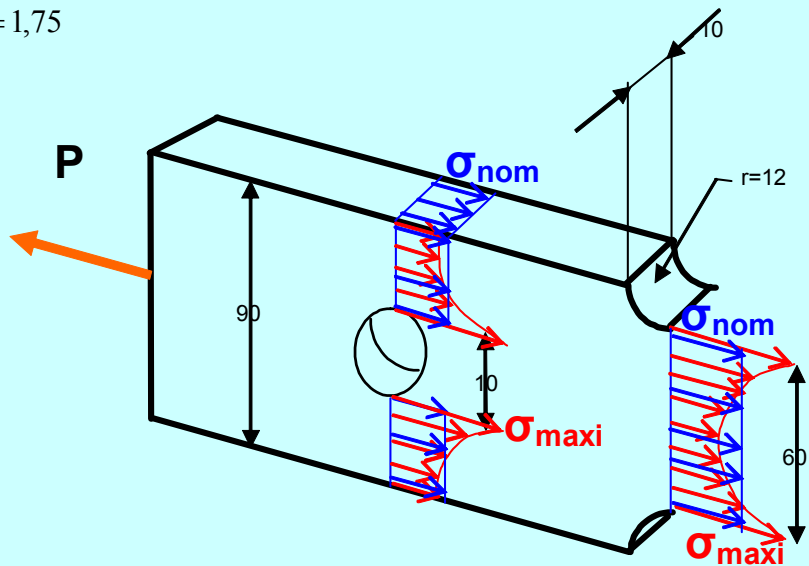
$$K_{\text{epaul't}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{D}{d} = \frac{90}{60} = 1,5 \\ \frac{r}{d} = \frac{12}{60} = 0,2 \end{cases} \quad K_{\text{epaul't}} = 1,75$$

$$\sigma_{\text{max } i} = K \sigma_{\text{nom}}$$

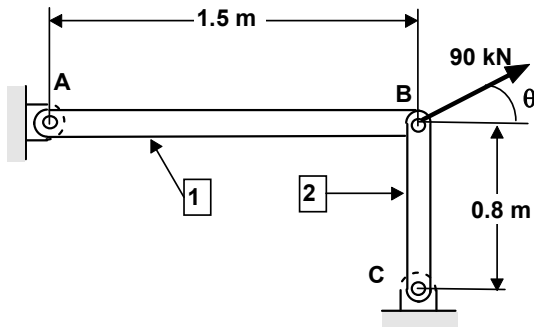
$$\sigma_{\text{max } i}^{\text{trou}} = 2,65 \frac{36000}{10 \times 80} = 119 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{max } i}^{\text{epaul't}} = 1,75 \frac{36000}{10 \times 60} = 105 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{max } i} = 119 \text{ MPa}$$



## PROBLÈME N°4



Toutes les liaisons sont des liaisons verrous. Les aires des sections droites de AB et BC valent respectivement  $500 \text{ mm}^2$  et  $750 \text{ mm}^2$ . Le module de YOUNG vaut  $200 \text{ GPa}$ .

1°) Déterminez la grandeur et la direction du déplacement du point B quand  $\theta = 30^\circ$

2°) Déterminez la valeur de  $\theta$  pour que la direction du déplacement du point B soit de  $45^\circ$ . Quelle est alors la valeur du déplacement du point B ?

## REPONSES N°4

$$\Delta L_{BA} = \frac{N_x^{BA} L_{BA}}{EA_{BA}} \quad \Delta L_{CB} = \frac{N_x^{CB} L_{CB}}{EA_{CB}}$$

$$\Delta L_{BA} = \frac{77,94 \cdot 10^3 \times 1500}{200 \cdot 10^3 \times 500} = 1,17 \text{ mm}$$

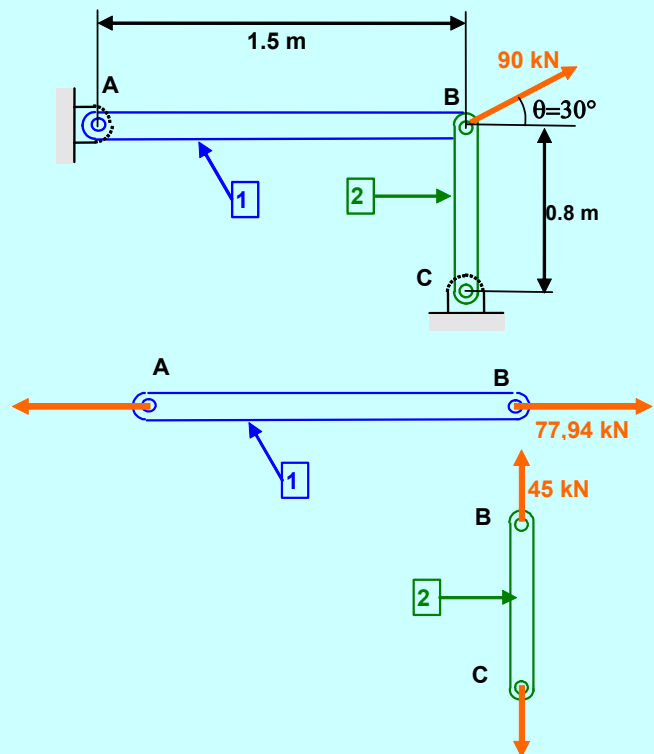
$$\Delta L_{BC} = \frac{45 \cdot 10^3 \times 800}{200 \cdot 10^3 \times 750} = 0,24 \text{ mm}$$

$$\Delta BB' = 1,19 \text{ mm} \quad \begin{array}{c} 0,24 \text{ mm} \\ \uparrow \\ B \end{array} \quad \begin{array}{c} B' \\ \nearrow 1,6^\circ \\ 1,17 \text{ mm} \end{array}$$

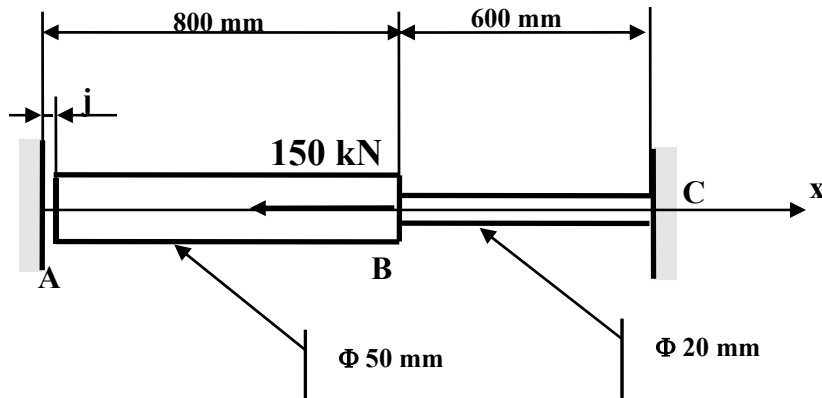
$$\Delta L_{BA} = \frac{P \cos \theta L_{BA}}{EA_{BA}} = \Delta L_{CB} = \frac{P \sin \theta L_{CB}}{EA_{CB}}$$

$$\tan \theta = \frac{L_{BA} A_{CB}}{L_{CB} A_{BA}} \Rightarrow \theta = 70^\circ 43'$$

$$\Delta BB' = \sqrt{2} \Delta L_{BA} = \sqrt{2} \frac{90 \cdot 10^3 \cos 70^\circ 43' \times 1500}{200 \cdot 10^3 \times 500} = 0,64 \text{ mm}$$



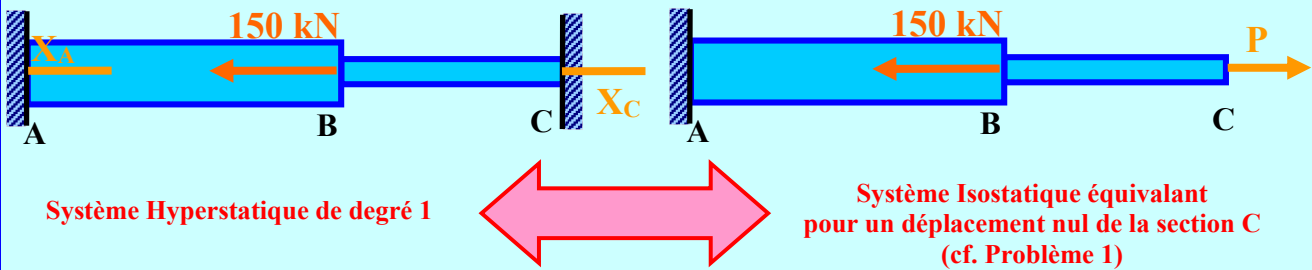
## PROBLÈME N°5



Calculez la valeur des réactions en A et C sachant que  $E = 200 \text{ GPa}$  et que :

- a)  $j=0$   
b)  $j=0.4 \text{ mm}$ .

## REPONSES N°5

a)  $j=0$ 

PFS :  $-150 \text{ kN} + X_C + X_A = 0 \Rightarrow$  Problème hyperstatique (1 équation et 2 inconnues,  $X_A$  et  $X_C$ )

On cherche une équation supplémentaire en déformation, que l'on transformera en équation en réaction.

Equation supplémentaire en déformation :  $\Delta L_{AC} = 0$  (1)

Or  $\{\Delta L_{AC} = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC}\}$  et  $\left\{ \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N/S}{E} \Rightarrow \Delta L = \frac{N \cdot L}{S \cdot E} \right\}$

D'où (1)  $\rightarrow \Delta L_{AC} = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} = \frac{N_{AB} \cdot L_{AB}}{S_{AB} \cdot E_{AB}} + \frac{N_{BC} \cdot L_{BC}}{S_{BC} \cdot E_{BC}} = 0$

On sait que :  $E_{AB} = E_{BC}$  et  $S_{AB} = \frac{\pi \cdot 50^2}{4}$ ,  $S_{BC} = \frac{\pi \cdot 20^2}{4}$  donc (1)  $\rightarrow N_{AB} \cdot \frac{L_{AB}}{25} + N_{BC} \cdot \frac{L_{BC}}{4} = 0$  (2)

Torseurs de section :  $N_{AB} = -150 \text{ kN} + X_C$  et  $N_{BC} = X_C$

Finalement : (2)  $\rightarrow 4 \cdot N_{AB} \cdot L_{AB} + 25 \cdot N_{BC} \cdot L_{BC} = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (-150 \text{ kN} + X_C) \cdot 800 + 25 \cdot X_C \cdot 600 = 0$

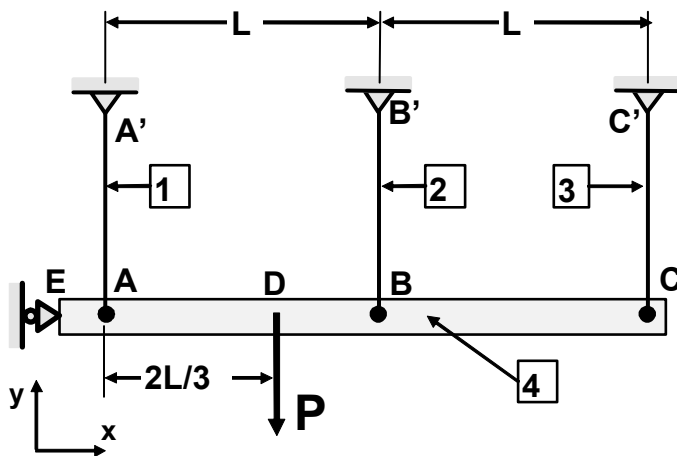
$\Leftrightarrow 18200 \cdot X_C = 4 \cdot 150 \text{ kN} \cdot 800$

Donc :  $\overline{X_C} = 150 \text{ kN} \cdot \frac{4 \cdot 800}{18200} = 26,4 \text{ kN}$

A partir du PFS :  $-150 \text{ kN} + X_C + X_A = 0 \Leftrightarrow \overline{X_A} = 150 \text{ kN} - X_C = 123,6 \text{ kN}$

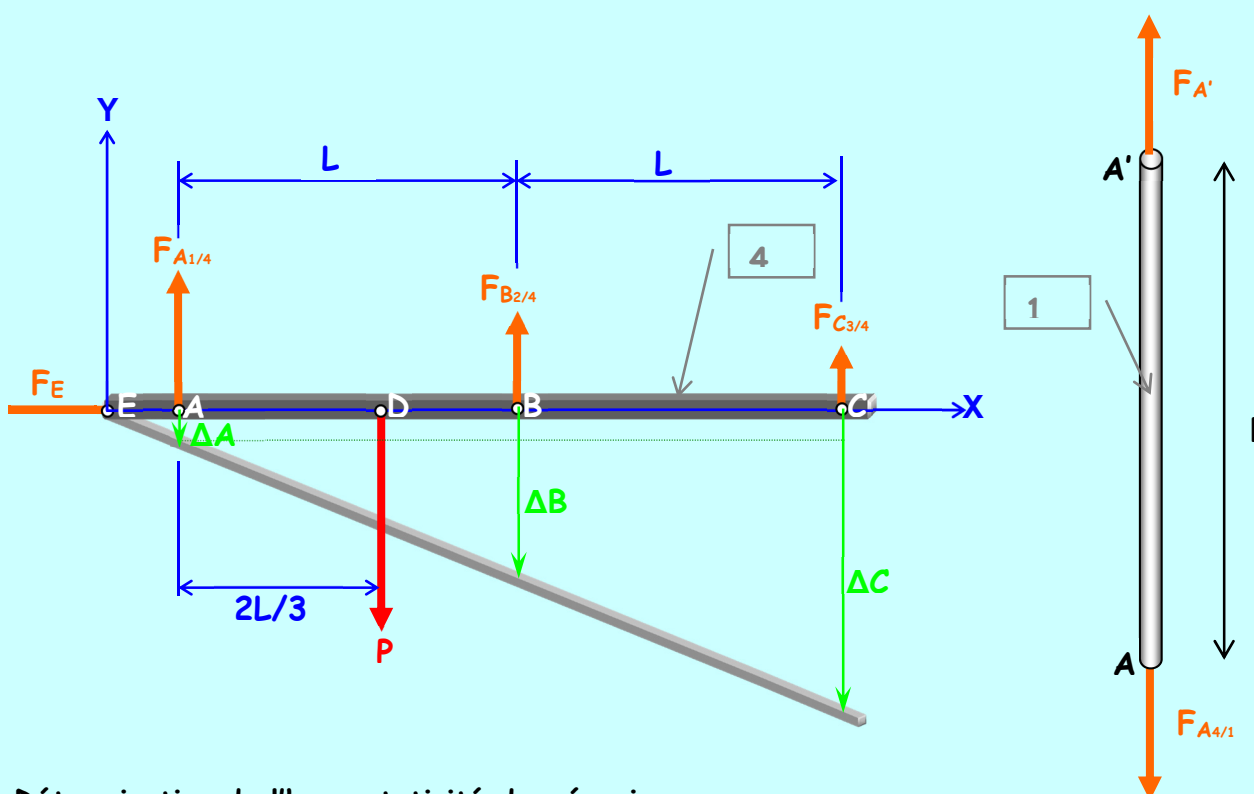
**PROBLÈME N°6**

Une barre indéformable EADBC (4) est suspendue par 3 fils identiques (même section et même matériau). Les six liaisons en A, B, C, A', B' et C' sont des articulations planes, la liaison en E une liaison ponctuelle.



1°) Montrez que le système est hyperstatique (préciser le nombre d'inconnues et le nombre d'équations). Écrire les équations d'équilibre du solide 4 en A.

2°) **Les fils sont tendus.** Écrivez une équation de déformation et déterminez les tensions  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  dans chaque fil en fonction de P.

**REPNSES N°6**

**Détermination de l'hyperstaticité du mécanisme :**

- Inconnues : 4
  - 3 efforts de traction dans les 3 fils  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$
  - 1 inconnue de réaction en E notée  $F_E$  (liaison ponctuelle de direction x)
- Equations d'équilibre de la barre n°4: 3 équations dans le plan.

$$H = i - 3n = 4 - 3 = 1 \Rightarrow \text{Hyperstatique de degré 1}$$

**Equations d'équilibre de la barre 4 :**

$$[T_{Ext}]_A \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_E + \vec{F}_{A/4} + \vec{F}_{B_2/4} + \vec{F}_{C_3/4} + \vec{F}_D = \vec{0} \\ \vec{AD} \wedge \vec{F}_D + \vec{AB} \wedge \vec{F}_{B_2/4} + \vec{AC} \wedge \vec{F}_{C_3/4} = \vec{0} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_X = 0 \quad (1) \\ F_1 + F_2 + F_3 - P = 0 \quad (2) \\ -\frac{2PL}{3} + F_2L + 2F_3L = 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

**Equations de déformation des fils en traction :**

Notons  $\ell$  la longueur initiale de chaque fil.

Loi de Hooke appliquée à chaque fil :  $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \Rightarrow \Delta l = \frac{N_x l}{EA}$

Soit  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  et  $\Delta C$  les allongements respectifs des 3 fils.

Equation supplémentaire : barre EADBC indéformable  $\frac{\Delta B - \Delta A}{L} = \frac{\Delta C - \Delta A}{2L}$

$$2\Delta B - \Delta A - \Delta C = 0 \quad \Rightarrow \quad 2F_2 - F_1 - F_3 = 0 \quad (3)$$

**Système de 3 équations (1) (3) (2) à 3 inconnues  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$**

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 + F_2 + F_3 = P \\ -F_1 + 2F_2 - F_3 = 0 \\ F_2 + 2F_3 = \frac{2P}{3} \end{array} \right.$$

Après résolution de ce système on trouve :

$$\left| \begin{array}{l} F_1 = \frac{P}{2} \\ F_2 = \frac{P}{3} \\ F_3 = \frac{P}{6} \end{array} \right.$$

**PROBLÈME N°7**

Une tige homogène et isotrope de 500 mm de long, de diamètre 16 mm s'allonge de 568  $\mu\text{m}$  pendant que son diamètre diminue de 5.3  $\mu\text{m}$  sous un effort de traction de 48 kN. Calculez le module de YOUNG et le coefficient de POISSON du matériau. Quel est ce matériau ?

**REPONSES N°7**

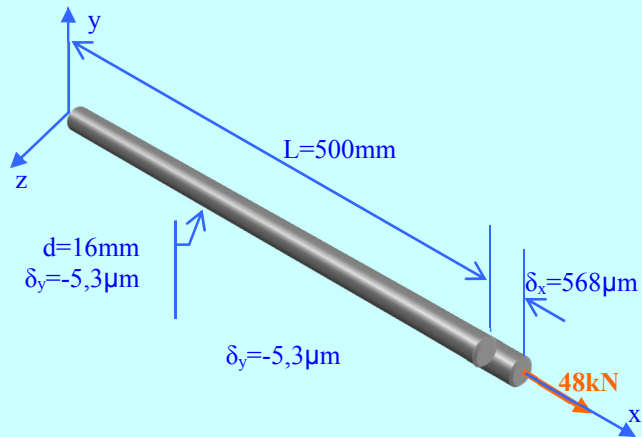
$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} = \frac{48000 \times 4}{\pi \times 16^2}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\delta_x}{L} = \frac{568 \times 10^{-6}}{0,5}$$

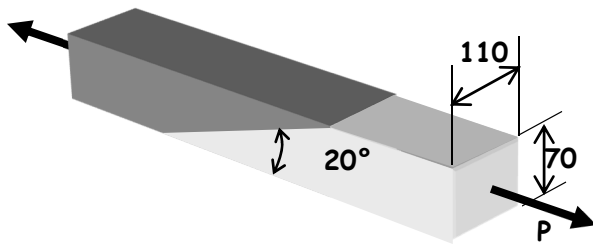
$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \Rightarrow E = 210152 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\delta_y}{d} = \frac{-5,3 \times 10^{-6}}{16 \times 10^{-3}}$$

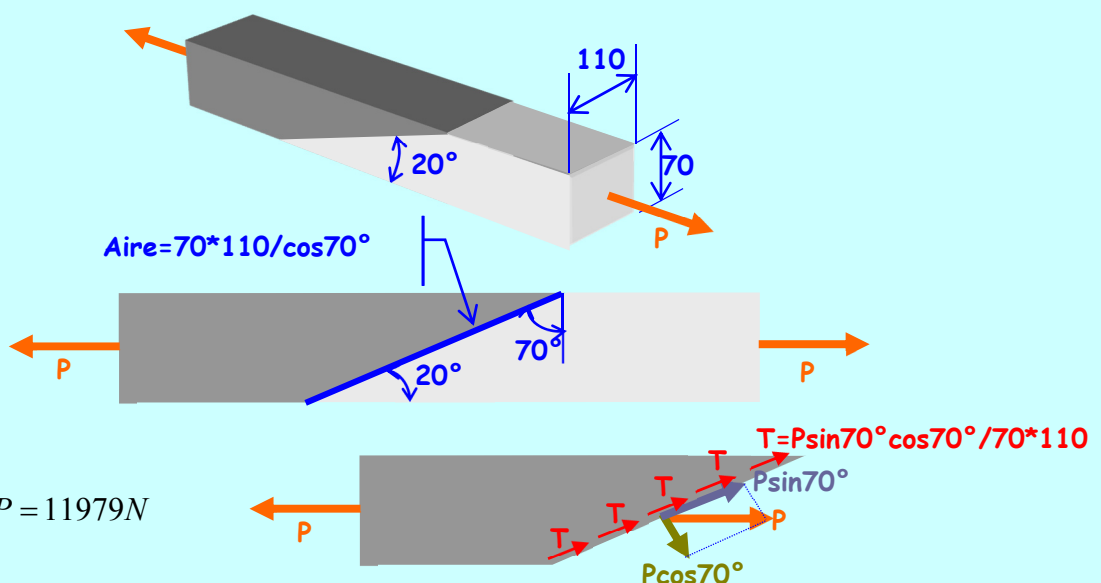
$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu \varepsilon_{xx} \Rightarrow \nu = 0,29$$



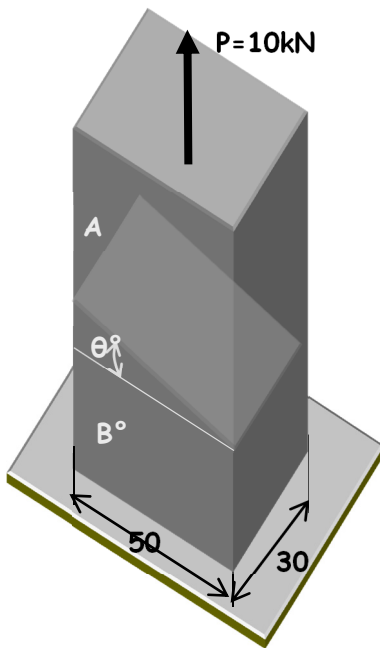
Voir Annexe 4

**PROBLÈME N°8**

Deux tronçons de poutre de section droite 70x110 sont assemblés par collage. La contrainte de cisaillement limite de la colle vaut 0.5 MPa. Calculer la force maximum P que l'on peut appliquer.

**REPONSES N°8**

## PROBLÈME N°9



Les deux tronçons de poutre A et B sont assemblés par collage. Les contraintes normale et de cisaillement limites de la colle valent respectivement 17 et 9 MPa.

a) Calculer les limites supérieure et inférieure de  $\theta$  pour que le coefficient de sécurité vale 3.

b) Calculer la valeur de  $\theta$  qui donne un coefficient de sécurité maximum. Quel est alors la valeur de ce coefficient ?

## REPONSES N°9

$$\sigma = \frac{P}{A} \cos^2 \theta = \frac{P}{A} \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)$$

$$\alpha \sigma \leq \sigma_{\text{lim}} \Rightarrow 3 \leq \frac{17 \times 1500}{10^4 \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)}$$

$$\cos 2\theta \leq 0,7 \Rightarrow \theta \geq 22,8^\circ$$

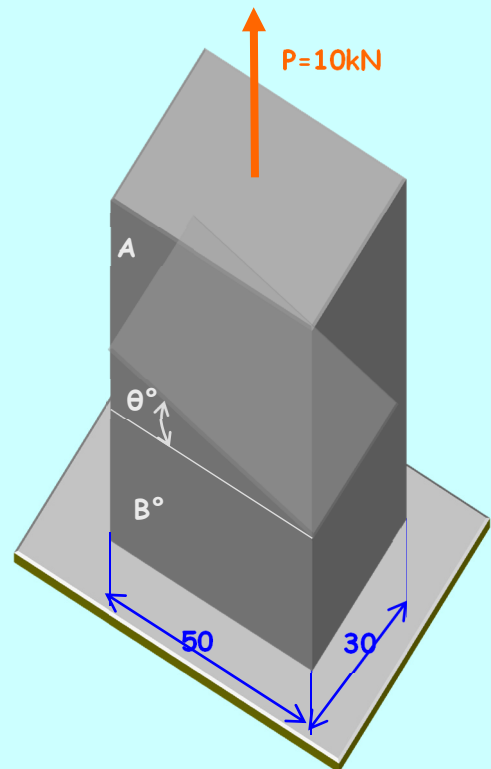
$$\tau = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = \frac{P}{2A} \sin 2\theta$$

$$\alpha \tau \leq \tau_{\text{lim}} \Rightarrow 3 \leq \frac{9 \times 2 \times 1500}{10^4 \sin 2\theta}$$

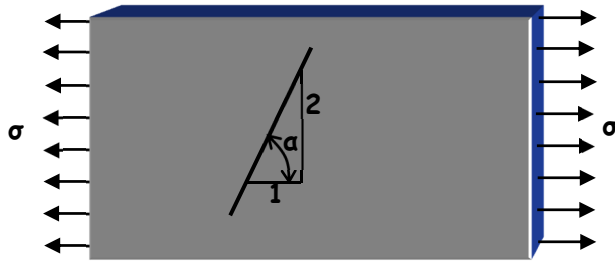
$$\sin 2\theta \leq 0,9 \Rightarrow \theta \leq 32^\circ$$

$$22,8^\circ \leq \theta \leq 32^\circ$$

$$\alpha = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{\frac{P}{A} \cos^2 \theta} = \frac{\tau_{\text{lim}}}{\frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta} \Rightarrow \tan \theta = \frac{9}{17} \Rightarrow \theta = 27,9^\circ \Rightarrow \alpha = 3,26$$



## PROBLÈME N°10



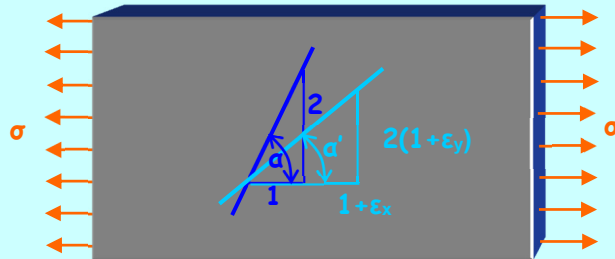
Avant chargement on trace une droite de pente 2 sur une éprouvette. Calculer la pente de cette droite quand  $\sigma = 130 \text{ MPa}$ ,  $E = 70 \text{ GPa}$  et  $\nu = 0.33$ .

## REPONSES N°10

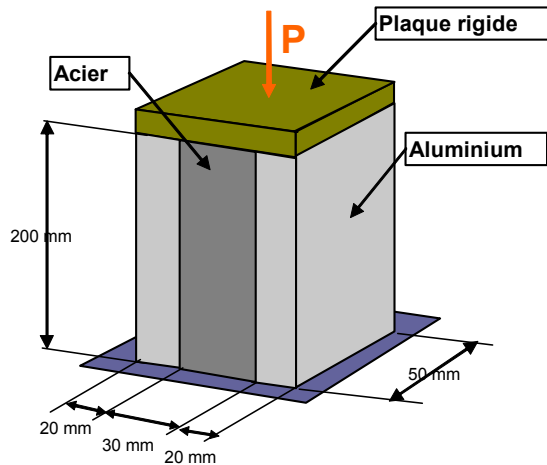
$$\tan \alpha = 2$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = 1857 \mu$$

$$\tan \alpha' = \frac{2(1 - \nu \varepsilon_x)}{1 + \varepsilon_x} = 1,995$$



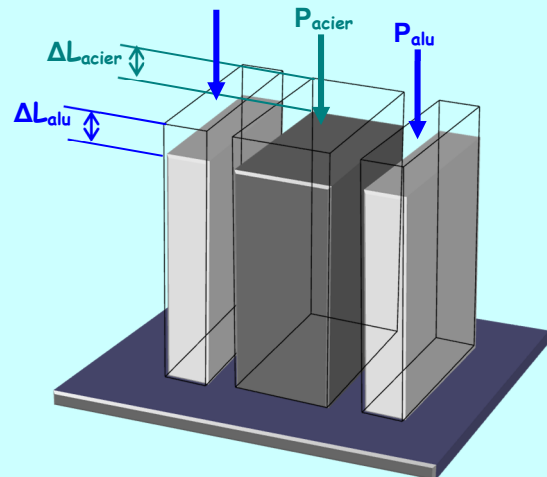
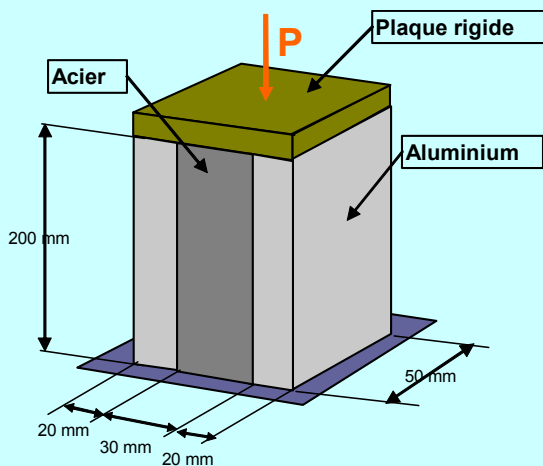
## PROBLÈME N°11



Une force  $P = 385 \text{ kN}$  est appliquée sur un bloc composite. Les modules de YOUNG de l'acier et de l'aluminium valent respectivement  $200 \text{ GPa}$  et  $70 \text{ GPa}$ . Calculez les contraintes de compression dans l'acier et l'aluminium.

## REPONSES N°11

La plaque rigide implique que chaque bloc subit la même variation de longueur.



$$\Delta L_{alu} = \Delta L_{acier} \Rightarrow \frac{P_{alu} \times 200}{70 \cdot 10^3 \times 2000} = \frac{P_{acier} \times 200}{200 \cdot 10^3 \times 1500} \Rightarrow P_{alu} = \frac{7}{15} P_{acier}$$

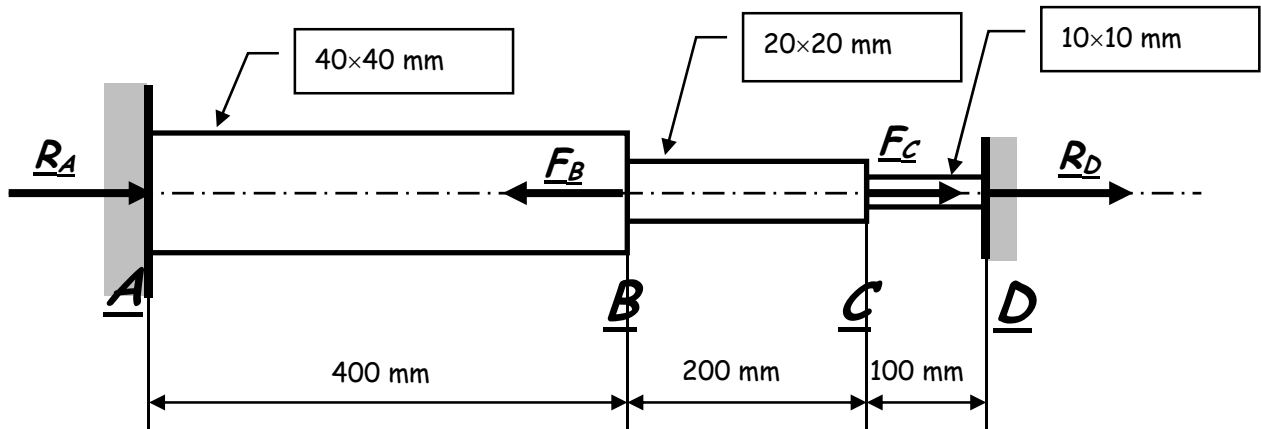
$$\begin{cases} P = P_{alu} + P_{acier} \\ P_{alu} = \frac{7}{15} P_{acier} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{alu} = 122,5 \text{ kN} \\ P_{acier} = 262,5 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\sigma_{alu} = \frac{-122,5 \cdot 10^3}{2000} = -61,25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{acier} = \frac{-262,5 \cdot 10^3}{2000} = -131,25 \text{ MPa}$$

## PROBLÈME N°12

La structure ci-dessus est composée de trois tronçons à section carrée. Les liaisons en A et D sont des encastrement.



On envisage deux cas de charge :

**Cas 1 :**  $F_B = 56 \text{ kN}$  et  $F_C = 28 \text{ kN}$

**Cas 2 :**  $F_B = F_C = 0$   $\Delta\theta = 50^\circ\text{C}$  sur le tronçon BC.

Pour les deux cas :

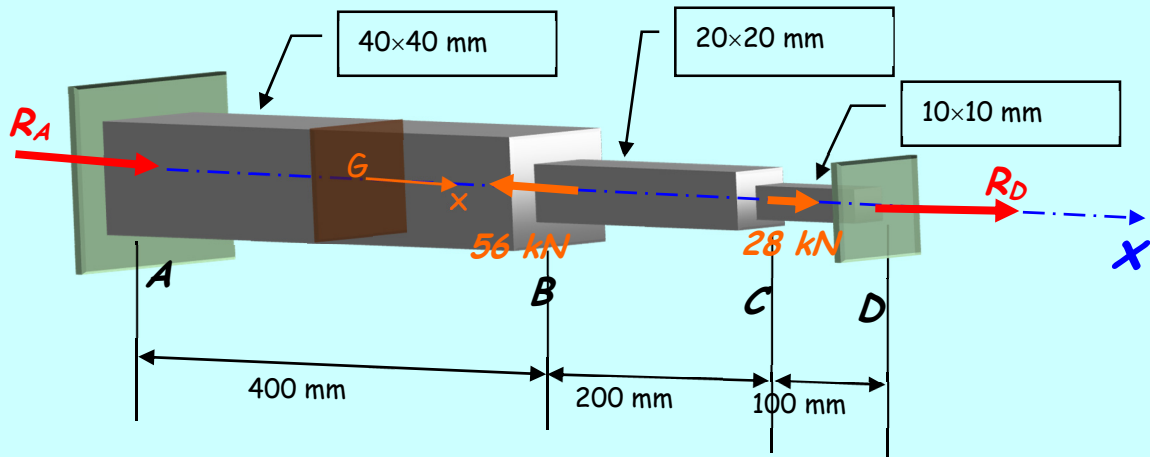
1°) Montrez que le système est hyperstatique (précisez le nombre d'inconnues et le nombre d'équations). Écrivez l'équation d'équilibre suivant  $x$ .

2°) Que valent les efforts normaux  $N_x$  dans les trois tronçons AB, BC et CD ? Écrivez une équation de déformation et calculez la valeur numérique des réactions  $R_A$  et  $R_D$  (en kN).

3°) Calculez les déplacements des sections B et C (en mm).

## REPONSES N°12

Cas 1 :

 $F_B = 56 \text{ kN}$  et  $F_C = 28 \text{ kN}$ 1°) Une seule équation d'équilibre pour calculer les deux inconnues  $R_A$  et  $R_D$ .

$$R_A + R_D = 28$$

$$2^\circ) \quad N_x^{AB} = -R_A \quad N_x^{BC} = -R_A + 56 \quad N_x^{CD} = -R_A + 28$$

$$\Delta L_{ABCD} = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} + \Delta L_{CD} = 0$$

$$\frac{N_x^{AB} L_{AB}}{EA_{AB}} + \frac{N_x^{BC} L_{BC}}{EA_{BC}} + \frac{N_x^{CD} L_{CD}}{EA_{CD}} = 0$$

$$\frac{-400R_A}{1600} + \frac{200(-R_A + 56)}{400} + \frac{100(-R_A + 28)}{100} = 0$$

$$\frac{-R_A}{4} + \frac{(-R_A + 56)}{2} + (-R_A + 28) = 0$$

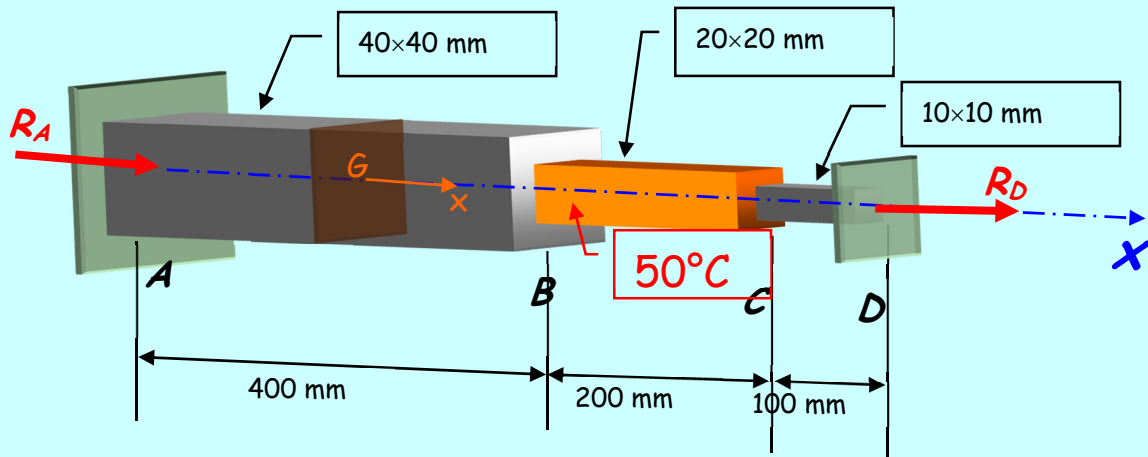
$$7R_A = 224$$

$$R_A = 32 \text{ kN} \quad R_D = -4 \text{ kN}$$

$$\Delta L_{AB} = \frac{N_x^{AB} L_{AB}}{EA_{AB}} = \frac{-32000 \times 400}{210000 \times 1600} = -0.038 \text{ mm} \quad u_B = -0.038 \text{ mm}$$

$$\Delta L_{CD} = \frac{N_x^{CD} L_{CD}}{EA_{CD}} = \frac{-4000 \times 100}{210000 \times 100} = -0.019 \text{ mm} \quad u_C = +0.019 \text{ mm}$$

**Cas 2 :**  $F_B = F_C = 0$   $\Delta\theta = 50^\circ\text{C}$  sur le tronçon BC.



1°) Une seule équation d'équilibre pour calculer les deux inconnues  $R_A$  et  $R_D$ .

$$R_A + R_D = 0$$

2°)  $N_x^{AB} = N_x^{BC} = N_x^{CD} = -R_A$

$$\Delta L_{ABCD} = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} + \Delta L_{CD} = 0$$

$$\frac{N_x^{AB} L_{AB}}{EA_{AB}} + \left( \frac{N_x^{BC} L_{BC}}{EA_{BC}} + \Delta L_{BC}^{\text{therm}} \right) + \frac{N_x^{CD} L_{CD}}{EA_{CD}} = 0$$

$$\Delta L_{BC}^{\text{therm}} = \alpha \Delta\theta L_{BC}$$

$$\frac{-400R_A}{210000 \times 1600} + \frac{200 \times -R_A}{210000 \times 400} + 1.3 \times 10^{-5} \times 50 \times 200 + \frac{100 \times -R_A}{210000 \times 100} = 0$$

$$\frac{R_A}{4} + \frac{R_A}{2} + R_A = 27300$$

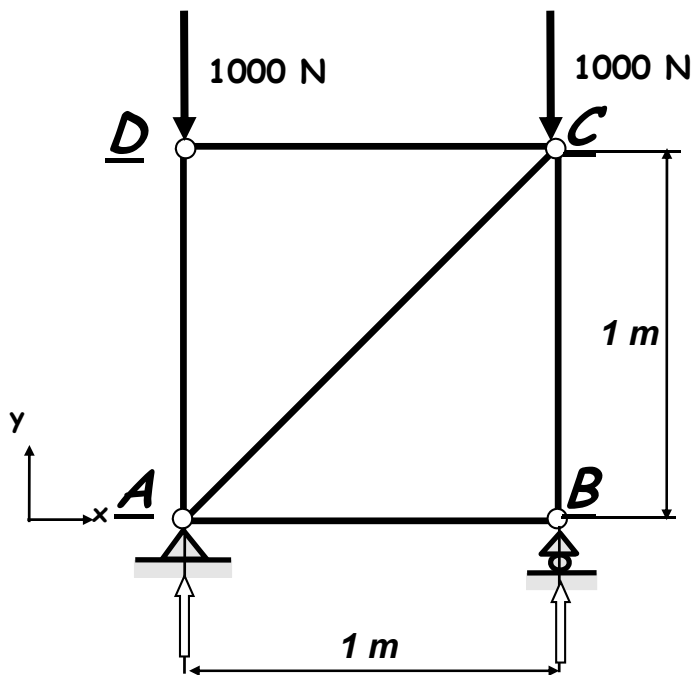
$$R_A = \frac{4}{7} \times 27300$$

$$R_A = 15.6 \text{ kN} \quad R_D = -15.6 \text{ kN}$$

$$\Delta L_{AB} = \frac{N_x^{AB} L_{AB}}{EA_{AB}} = \frac{-15600 \times 400}{210000 \times 1600} = -0.018 \text{ mm} \quad u_B = -0.018 \text{ mm}$$

$$\Delta L_{CD} = \frac{N_x^{CD} L_{CD}}{EA_{CD}} = \frac{-15600 \times 100}{210000 \times 100} = -0.074 \text{ mm} \quad u_C = +0.074 \text{ mm}$$

## PROBLÈME N°13



1°) Calculez les réactions en A et B.

2°) Déterminez les efforts de traction et de compression dans les barres du treillis par la **méthode de RITTER**

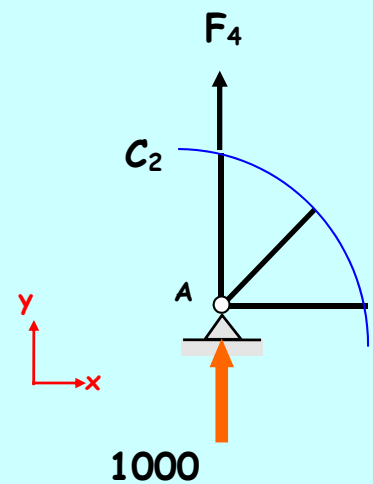
## REPONSES N°13

$$R_y = 0 \Rightarrow F_2 = 0$$

$$R_x = 0 \Rightarrow F_1 = 0$$

$$M_A = 0 \Rightarrow F_3 = 0$$

$$R_y = 0 \Rightarrow F_4 = -1000$$



| Barres | AB et CD | AD et BC | AC |
|--------|----------|----------|----|
| Nx (N) | 0        | -1000    | 0  |

**PROBLÈME N°14**

1°) Quel est le degré d'hyperstaticité du treillis ?

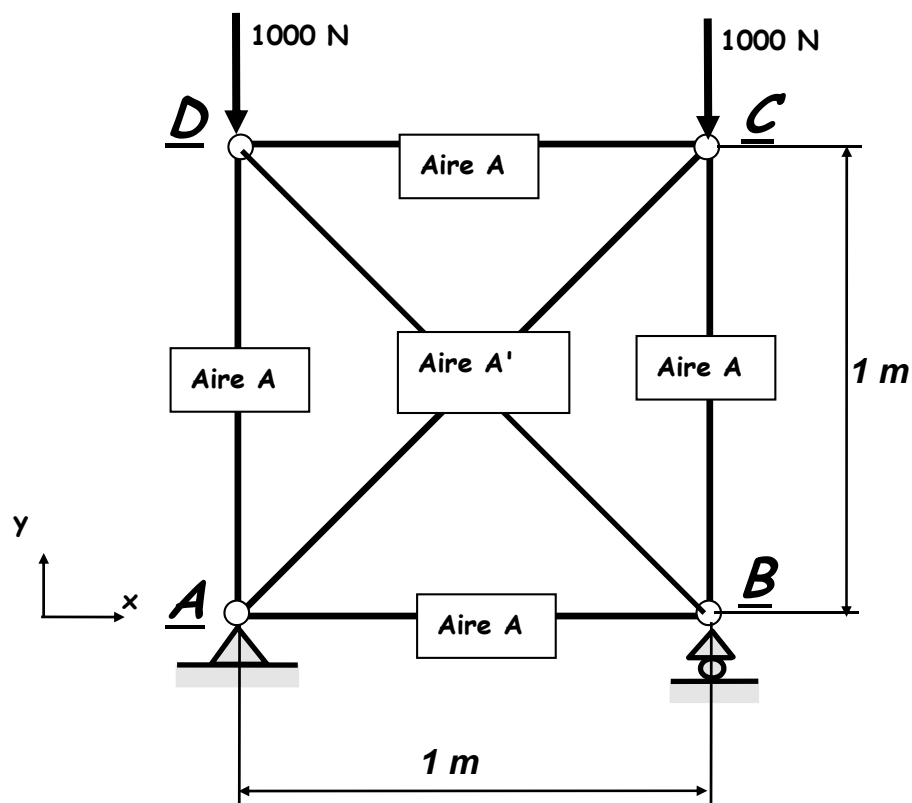
2°) Déterminez les expressions des efforts de traction et de compression dans les barres du treillis en fonction de  $A$  et  $A'$ .

3°) Calculez numériquement ces efforts quand :

a)  $A = A'$ .

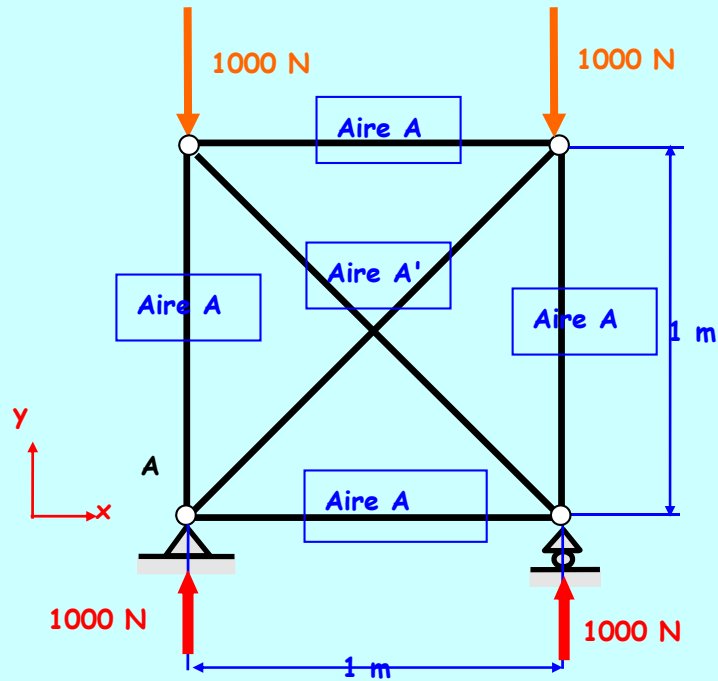
b)  $A = 2A'$ .

Conclusion?



## REPONSES N°14

1°) Le treillis est hyperstatique interne de degré 1 car  $b+3 > 2n$  ( $b=6$  et  $n=4$ ).

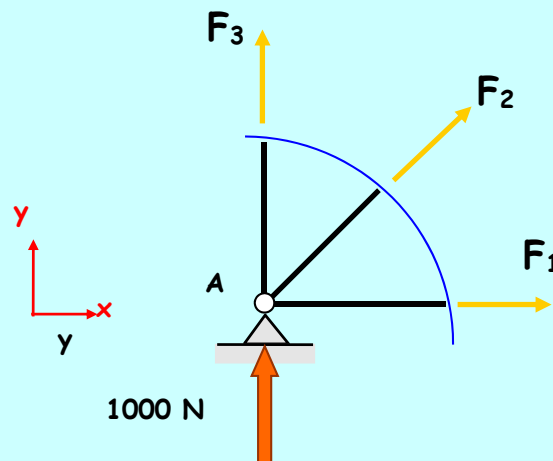


2°) Calcul des efforts dans les barres :

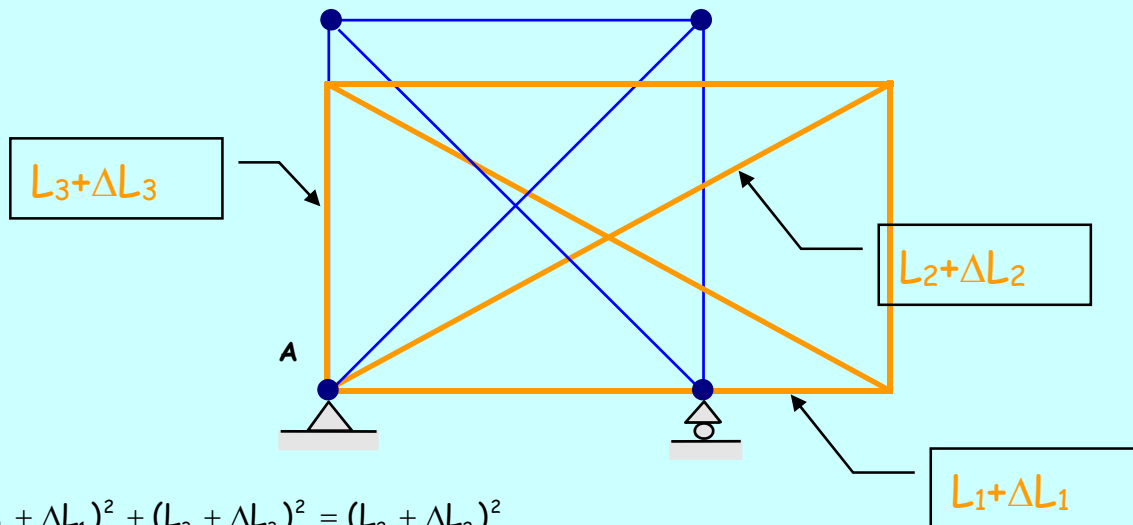
- Equations d'équilibre du nœud A

$$R_x=0 \Rightarrow F_1 + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (1)$$

$$R_y=0 \Rightarrow 1000 + F_3 + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (2)$$



- **Equations de déformation** : Etant donné la symétrie du système, celui-ci se déforme de la façon suivante :



$$(L_1 + \Delta L_1)^2 + (L_3 + \Delta L_3)^2 = (L_2 + \Delta L_2)^2$$

En négligeant les  $\Delta L_i^2$  et compte tenu que  $L_1 = L_3 = L$  et que  $L_2 = L\sqrt{2}$  on trouve :

$$\sqrt{2}\Delta L_2 \approx \Delta L_1 + \Delta L_3 \quad \text{avec} \quad \Delta L = \frac{N_x L}{EA}$$

$$\sqrt{2} \frac{F_2 L \sqrt{2}}{EA'} \approx \frac{F_1 L}{EA} + \frac{F_3 L}{EA} \quad \text{d'où} \quad 2F_2 \frac{A}{A'} = F_1 + F_3 \quad (3)$$

nous avons donc trois équations :

$$F_1 + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (1)$$

$$1000 + F_3 + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (2)$$

$$2F_2 \frac{A}{A'} = F_1 + F_3 \quad (3)$$

La résolution donne :

$$F_2 = -\frac{1000}{2 \frac{A}{A'} + \sqrt{2}}$$

$$F_1 = -\frac{1000}{2 \frac{A}{A'} + \sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} = F_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_3 = -\frac{1000}{2 \frac{A}{A'} + \sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1000 = F_1 - 1000$$

3°)

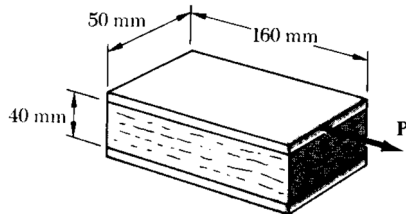
| Barres                  | AB et CD ( $F_1$ ) | AD et BC ( $F_3$ ) | AC et BD ( $F_2$ ) |
|-------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Nx en N pour<br>$A=A'$  | 207.1              | -792.9             | -292.9             |
| Nx en N pour<br>$A=2A'$ | 130.6              | -869.4             | -184.7             |

Conclusion : dans un treillis hyperstatique interne les efforts de traction et de compression dans les barres dépendent de la grandeur de la section des barres.

# CISAILLEMENT

## PROBLÈME N°1

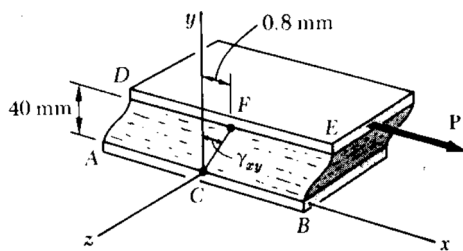
Un  
est



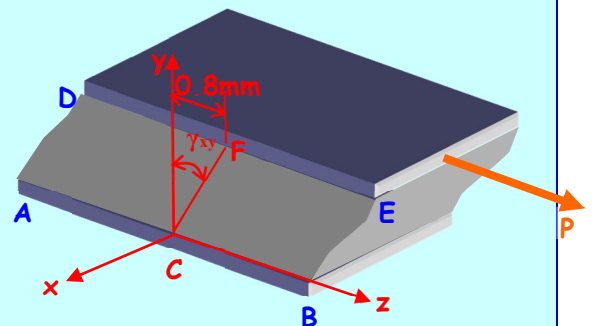
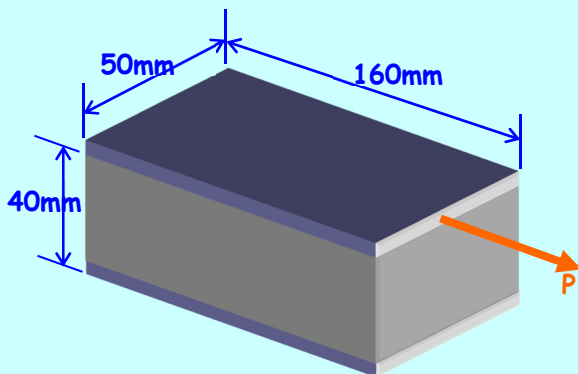
bloc rectangulaire de module de COULOMB 600 MPa collé entre deux plaques rigides. La plaque supérieure se déplace de 0.8 mm sous l'action d'une force P, pendant que la plaque inférieure reste immobile.

**Calculer :**

- La contrainte de cisaillement moyenne dans le bloc.
- La valeur de la force P.



## REPONSES N°1

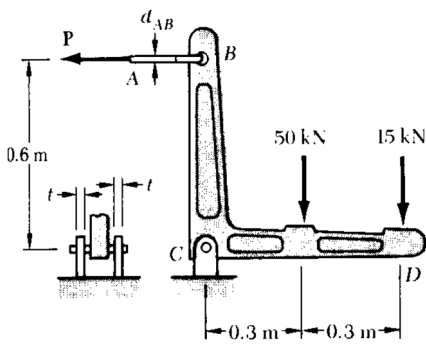


$$\gamma_{xy} \approx \tan \gamma_{xy} = \frac{0,8}{40} = 0,02$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = 600 \times 0,02 = 12 \text{ MPa}$$

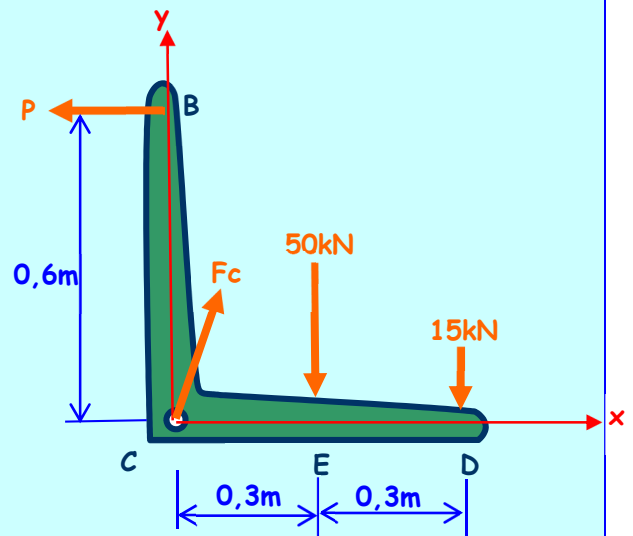
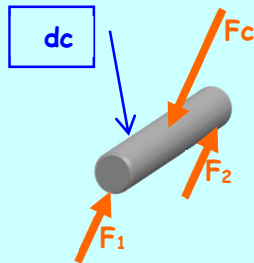
$$P = \tau_{xy} A = 12 \times 160 \times 50 = 96000 \text{ N} = 96 \text{ kN}$$

## PROBLÈME N°2



L'axe C est en acier de limite élastique au cisaillement  $\tau_e^{\text{moy}} = 350 \text{ MPa}$ . Calculer le diamètre de l'axe C pour que le coefficient de sécurité soit égal à 3.3.

## REPONSES N°2



$$\begin{cases} \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_E + \vec{F}_D = \vec{0} \\ \vec{CB} \wedge \vec{F}_B + \vec{CE} \wedge \vec{F}_E + \vec{CD} \wedge \vec{F}_D = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -P + C_x = 0 \\ C_y - 50 - 15 = 0 \\ -50 \times 0,3 - 15 \times 0,6 + P \times 0,6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_C \begin{cases} 40 \text{ kN} \\ 65 \text{ kN} \end{cases} \\ P = 40 \text{ kN} \end{cases}$$

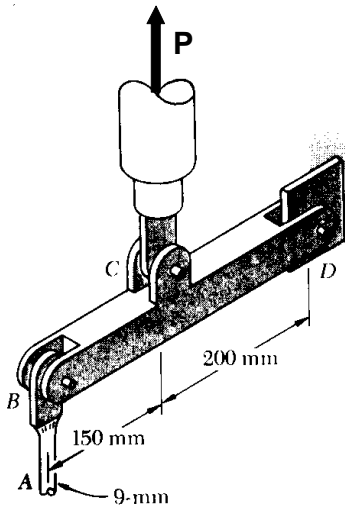
$$\tau = \frac{\tau_{\text{moy}}}{3,3} = \frac{350}{3,3} = 106,1 \text{ MPa}$$

$$F_C = \sqrt{40^2 + 65^2} = 76,32 \text{ kN}$$

$$F_1 = F_2 = \frac{F_C}{2}$$

$$\frac{\pi d_C^2}{4} = \frac{76,32 \cdot 10^3}{2 \times 106,1} \Rightarrow d_C = \sqrt{\frac{4 \times 76,32 \cdot 10^3}{\pi \times 2 \times 106,1}} = 21,4 \text{ mm}$$

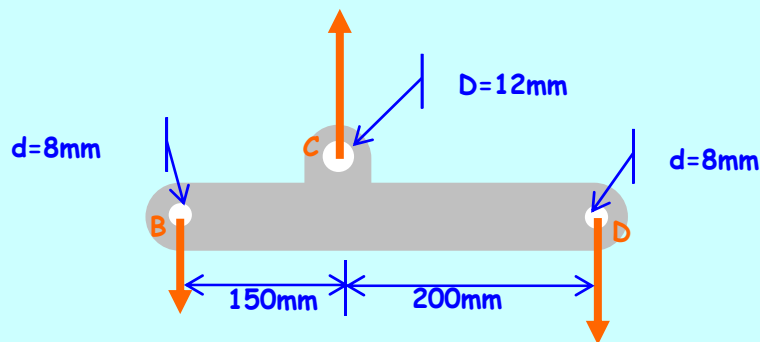
## PROBLÈME N°3



La barre BCD est supposée infiniment rigide. Le diamètre des axes B et D est égal à 8 mm, celui de l'axe C égal à 12 mm. Les axes sont en acier de limite élastique au cisaillement 300 MPa. Le coefficient de sécurité global doit être de 3.

Calculer la force verticale P maximum exercée par le vérin hydraulique C.

## REPONSES N°3



$$\begin{cases} M'_{/D} = 0 \Rightarrow F_C \times 200 - F_B \times 350 = 0 \Rightarrow F_C = 1,75F_B \\ M'_{/B} = 0 \Rightarrow 150 \times F_C - 350 \times F_D = 0 \Rightarrow F_C = 2,33F_D \end{cases}$$

$$\tau = \frac{\tau_{moy}}{\alpha} = \frac{300}{3} = 100 \text{ MPa}$$

$$\text{En B : } \frac{F_B}{2} = \tau \times A \Rightarrow F_B = \frac{100 \times 2 \times \pi \times 8^2}{4} = 10053 \text{ N} \Rightarrow \begin{cases} F_C = 1,75F_B = 17593 \text{ N} \\ F_C = 2,33F_D = 23424 \text{ N} \end{cases}$$

$$\text{En C : } \frac{F_C}{2} = \tau \times A \Rightarrow F_C = \frac{100 \times 2 \times \pi \times 12^2}{4} = 22619 \text{ N}$$

$$P_{Max} = 17593 \text{ N}$$

*2<sup>em</sup> SEMESTRE*

*MODULE F213 :*

*SOLLICITATIONS SIMPLES - FLEXION - TORSION*

## *PROBLÈMES-CORRIGES*

Bienvenue à vous

au laboratoire de :

**Dimensionnement Des Structures**

du Département :

**Génie Mécanique et Productique**

Ce livre électronique est destiné à compléter le cours enseigné durant la première année du module F213, et relatif au deuxième Semestre.

Il reprend le plan suivi en amphithéâtre avec d'avantages de détails, d'illustrations ainsi que des corrigés des Problèmes du fascicule Travaux Dirigés qui, nous l'espérons, vous permettront de mieux comprendre cette matière qui n'est pas si terrible qu'elle peut laisser paraître.

A présent, choisissez sur votre gauche dans l'onglet signet un chapitre du programme que vous désirez voir ou revoir .

**BON TRAVAIL-BON COURAGE**

V. BLANCHOT - G. VESSIERE

*F213*

*INERTIE*

*TORSION*

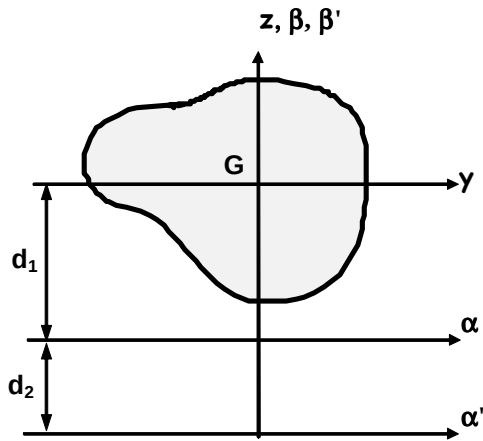
*FLEXION*

*SOLLICITATIONS COMPOSEES*

*FLAMBEMENT*

# INERTIE

## PROBLÈME N°1

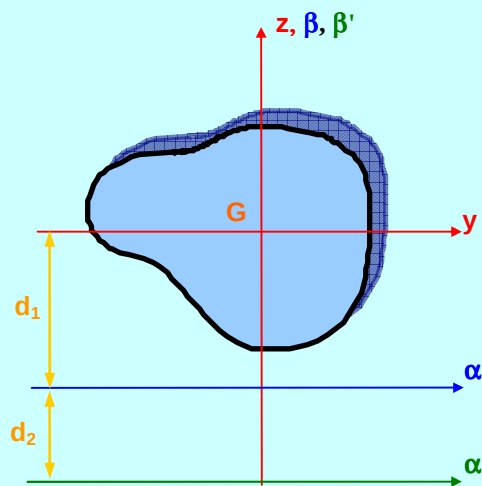


rapport à l'axe  $\alpha$

1°) L'aire de la surface ci-contre vaut  $129 \text{ cm}^2$ . Ses moments d'inertie par rapport aux axes  $\alpha$  et  $\alpha'$  valent respectivement  $37\,460 \text{ cm}^4$  et  $74\,920 \text{ cm}^4$ . La distance  $d_2$  vaut  $7.6 \text{ cm}$ . Calculez la distance  $d_1$ , le moment d'inertie de la surface par rapport à l'axe central  $y$ , et le moment statique de la surface par rapport à l'axe  $\alpha'$ .

2°) L'aire de la surface ombrée ci-contre vaut maintenant  $96.78 \text{ cm}^2$ . Son moment d'inertie par rapport à l'axe  $\alpha'$  vaut  $16\,650 \text{ cm}^4$ . Les distances  $d_1$  et  $d_2$  valent respectivement  $7.6 \text{ cm}$  et  $5.1 \text{ cm}$ . Calculez le moment d'inertie de la surface par

## RÉPONSES N°1



1) Théorème d'Huyghens :

$$\begin{cases} I_{\alpha\alpha} = I_{yy} + d_1^2 A & (1) \\ I_{\alpha'\alpha'} = I_{yy} + (d_1^2 + d_2^2) A & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 37460 = I_{yy} + d_1^2 129 & (1) \\ 74920 = I_{yy} + (d_1^2 + 7.6^2) 129 & (2) \end{cases}$$

$$(2) - (1) \Rightarrow 37460 = (2d_1 \times 7.6 + 7.6^2) 129 \quad \mathbf{d_1 = 15.3 \text{ cm}}$$

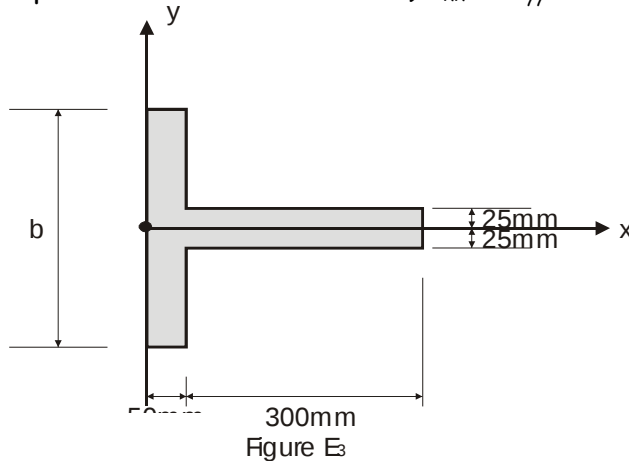
En reportant la valeur de  $d_1$  dans l'équation (1) :  $\mathbf{I_{yy} = 7246.6 \text{ cm}^4}$

$$Q_{\alpha'} = x_{\beta'} A = (15.3 + 7.6) 129 \quad \mathbf{Q_{\alpha'} = 2954.1 \text{ cm}^3}$$

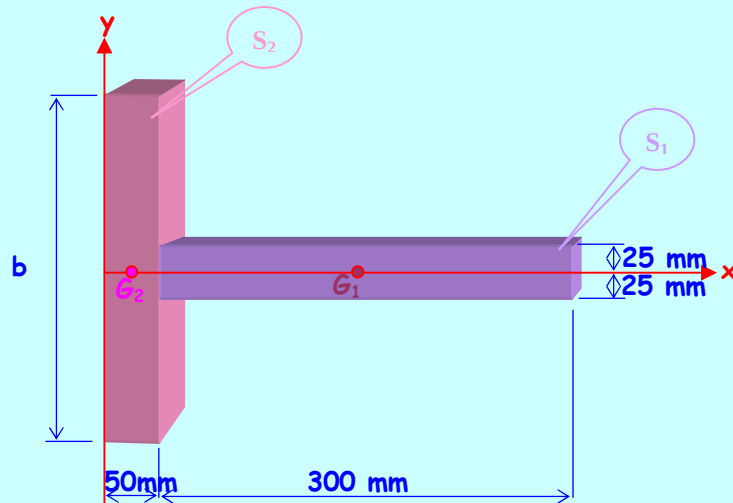
$$\begin{aligned} 2) \quad I_{yy} &= I_{\alpha'\alpha'} - (d_1^2 + d_2^2) A & I_{yy} &= 16650 - 12.7^2 \times 96.78 & I_{yy} &= 1040.35 \text{ cm}^4 \\ I_{\alpha\alpha} &= I_{yy} + d_1^2 A & I_{\alpha\alpha} &= 1040.35 + 15.3^2 \times 96.78 & I_{\alpha\alpha} &= 6630.37 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

## PROBLÈME N°2

Calculez pour la surface ci-contre: a)  $I_{xx}$  et  $I_{yy}$  si  $b = 25 \text{ cm}$  . b)  $b$  pour que  $I_{xx} = I_{yy}$ .



## RÉPONSES N°2



a)  $b=25\text{cm}$

Décomposons la surface  $S$  en deux  $S_1$ , et  $S_2$

$$I_{xx}^{S_1} = \frac{30 \times 5^3}{12} \quad I_{xx}^{S_2} = \frac{5 \times 25^3}{12}$$

$$I_{xx}^S = I_{xx}^{S_1} + I_{xx}^{S_2} = \frac{30 \times 5^3}{12} + \frac{5 \times 25^3}{12} \quad \mathbf{I_{xx}=6822,92 \text{ cm}^4}$$

De même après application du théorème d'Huyghens :

$$I_{yy}^{S_1} = \frac{5 \times 30^3}{12} + 20^2 \times 30 \times 5 \quad I_{yy}^{S_2} = \frac{25 \times 5^3}{12} + 2,5^2 \times 5 \times 25$$

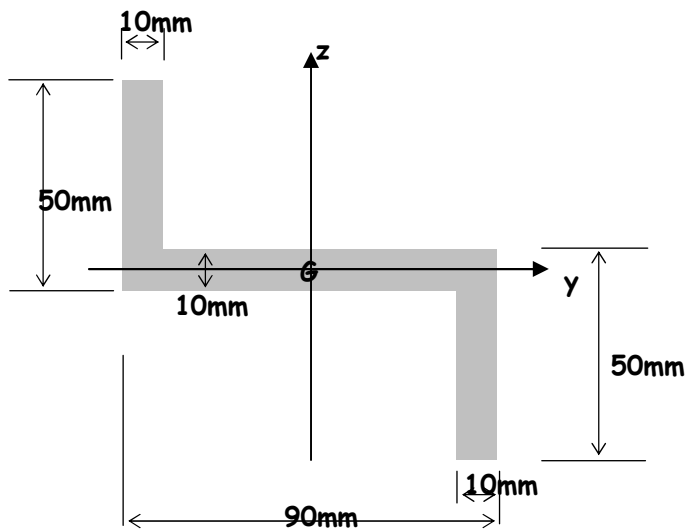
$$I_{yy}^S = I_{yy}^{S_1} + I_{yy}^{S_2} = \frac{5 \times 30^3}{12} + 20^2 \times 30 \times 5 + \frac{25 \times 5^3}{12} + 2,5^2 \times 5 \times 25 \quad \mathbf{I_{yy}=72291,67 \text{ cm}^4}$$

$$\text{b) } I_{xx} = I_{yy} \quad \frac{30 \times 5^3}{12} + \frac{5 \times b^3}{12} = \frac{5 \times 30^3}{12} + 20^2 \times 30 \times 5 + \frac{b \times 5^3}{12} + 2,5^2 \times 5 \times b$$

$5b^3 - 500b - 851250 = 0$  équation du 3<sup>ème</sup> degré admettant 2 solutions imaginaires et une solution réelle :

**$b=56 \text{ cm}$**

## PROBLÈME N°3



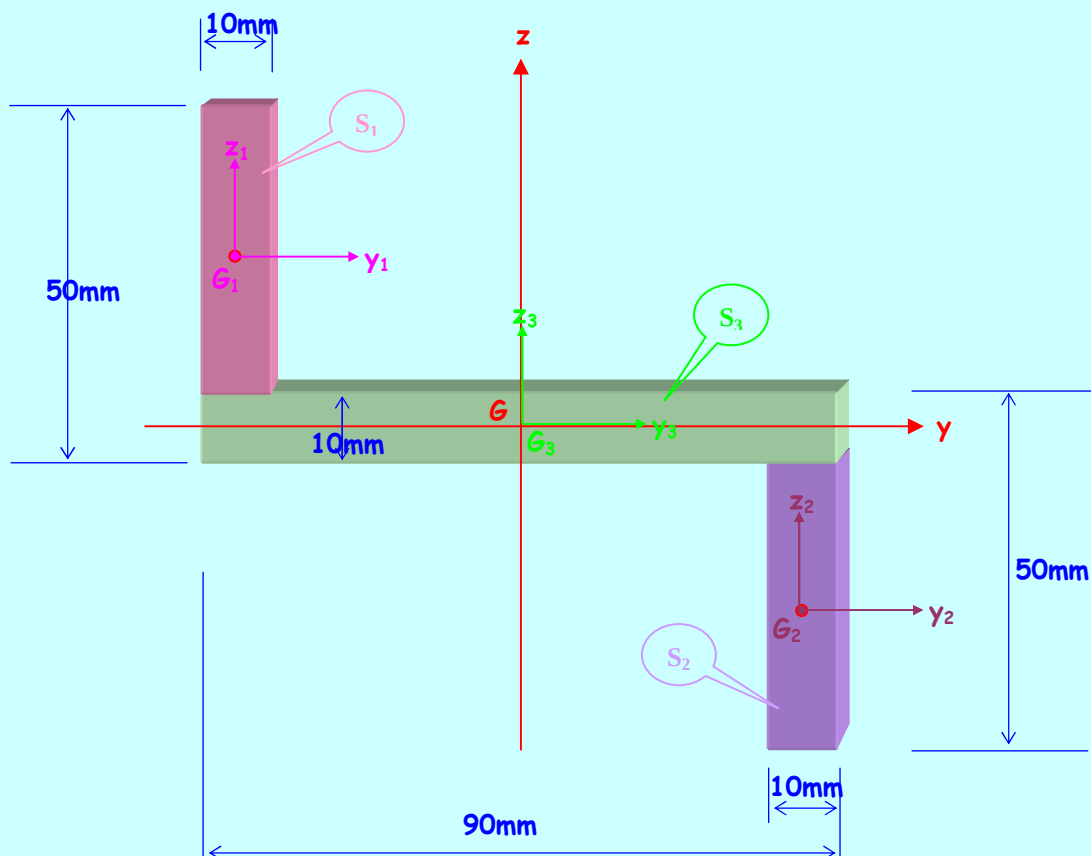
Calculez pour la surface ci-contre:

1°) Les moments et le produit d'inertie par rapport aux axes centraux y et z.

2°) La position des axes centraux principaux et les moments d'inertie principaux.

3°) Les moments et le produit d'inertie par rapport à deux nouveaux axes centraux obtenus par une rotation positive de 30° des axes y et z.

## RÉPONSES N°3



1°)

Décomposons la surface initiale  $S$  en trois surfaces  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  :  $I_{yy}^S = I_{yy}^{S_1} + I_{yy}^{S_2} + I_{yy}^{S_3}$  avec  $I_{yy}^{S_1} = I_{yy}^{S_2}$

Appliquons le théorème d'Huyghens :

$$I_{yy}^{S_1} = I_{y_1y_1}^{S_1} + z_{G_1}^2 A_1 \quad \text{et} \quad I_{yy}^{S_3} = I_{y_3y_3}^{S_3} + G_{\text{yz}} \begin{vmatrix} -4\text{cm} \\ 2,5\text{cm} \end{vmatrix}$$

$$I_{yy}^S = 2 \left( \frac{1 \times 4^3}{12} + 2,5^2 \times 4 \right) + \frac{9 \times 1^3}{12}$$

$$I_{yy}^S = 61,42 \text{ cm}^4$$

De même :  $I_{zz}^S = 2 \left( \frac{4 \times 1^3}{12} + (-4)^2 \times 4 \right) + \frac{1 \times 9^3}{12}$

$$I_{zz}^S = 189,42 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz}^S = I_{yz}^{S_1} + I_{yz}^{S_2} + I_{yz}^{S_3} \quad \text{avec } I_{yz}^{S_3} = 0 \text{ (y et z sont axes de symétrie pour } S_3) \quad I_{yz}^{S_1} = I_{yz}^{S_2} = I_{y_1 z_1}^{S_1} + y_{G_1} z_{G_1} A_1$$

$$I_{yz}^S = 2(0 + (-4)(2,5) \times 4 \times 1) \text{ car } I_{y_1 z_1}^{S_1} = 0 \text{ (y}_1 \text{ et } z_1 \text{ sont axes de symétrie pour } S_1) \quad I_{yz}^S = -80 \text{ cm}^4$$

2°)

Position des axes principaux :

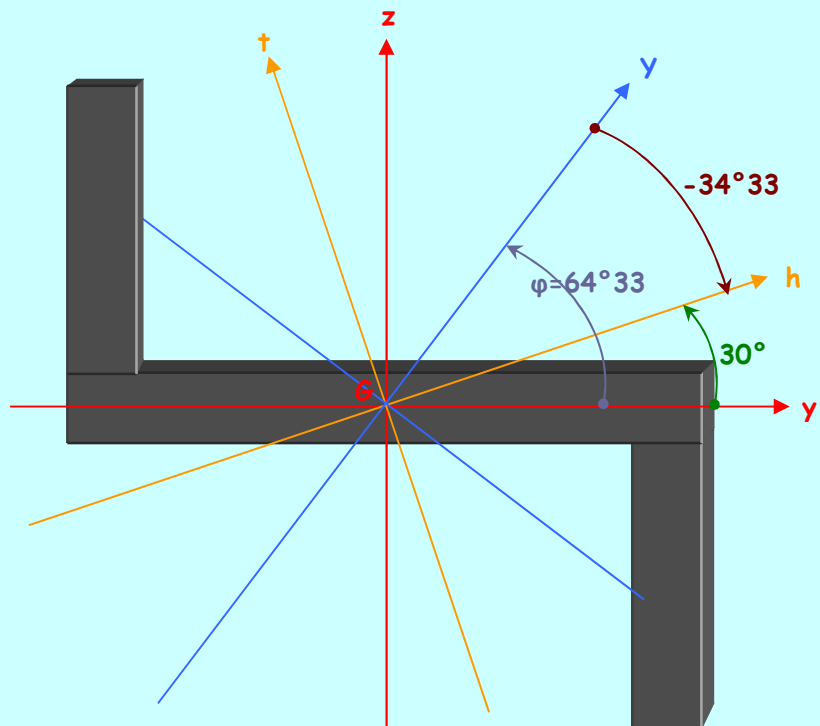
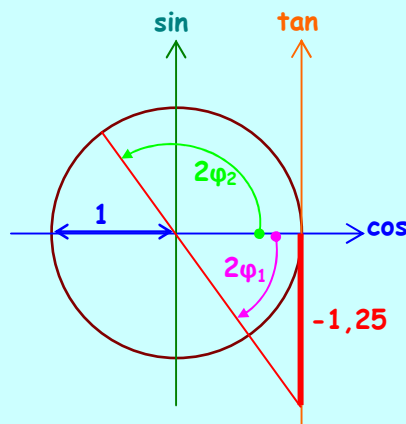
$$\tan 2\varphi = \frac{-2I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}}$$

$\cos 2\varphi$  même signe que  $I_{yy} - I_{zz}$

$$\hat{\varphi} = (\vec{y}, \vec{Y})$$

$$\tan 2\varphi = \frac{-2 \times 80}{61,42 - 189,42} \approx -1,25$$

$$\cos 2\varphi < 0$$



Inversion trigonométrique de la tangente :  $\tan 2\varphi \approx -1,25 \quad \begin{cases} 2\varphi_1 = -51^\circ 34' \\ 2\varphi_2 = 128^\circ 66' \end{cases}$

Or  $\cos 2\varphi < 0$  la solution  $\varphi_1$  est donc à rejeter.  $\varphi = 64^\circ 33'$  avec  $\hat{\varphi} = (\vec{y}, \vec{Y})$

Moments d'inertie principaux

$$I_Y^Z = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4I_{yz}^2} = \frac{61,42 + 189,42}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(61,42 - 189,42)^2 + 4(-80)^2}$$

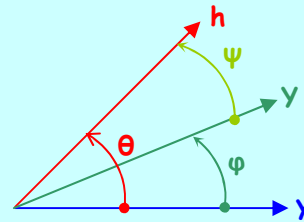
$$I_y = 227,87 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 22,97 \text{ cm}^4$$

3°)

Utilisons les formules de rotation exprimées dans les axes principaux :

$$\begin{cases} I_{hh} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\psi \\ I_{tt} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \\ I_{ht} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\psi \end{cases} \quad \text{avec } \hat{\psi} = (\vec{Y}, \vec{h})$$



$$I_{hh} = \frac{227,87 + 22,97}{2} + \frac{227,87 - 22,97}{2} \cos 2(-34^\circ 33')$$

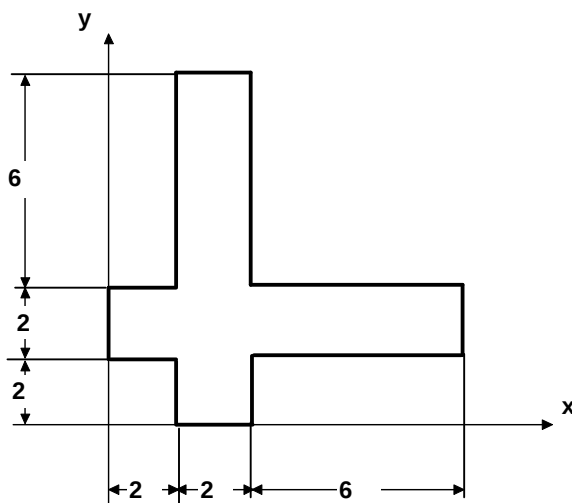
$$I_{hh} = 162,7 \text{ cm}^4$$

$$I_{tt} = 88,14 \text{ cm}^4$$

$$I_{ht} = -95,43 \text{ cm}^4$$

Nous pouvons vérifier que :  $I_{hh} + I_{tt} = I_y + I_z = I_G = 250,84 \text{ cm}^4$

## PROBLÈME N°4



Calculez, pour la surface ci-contre (les cotes sont en cm):

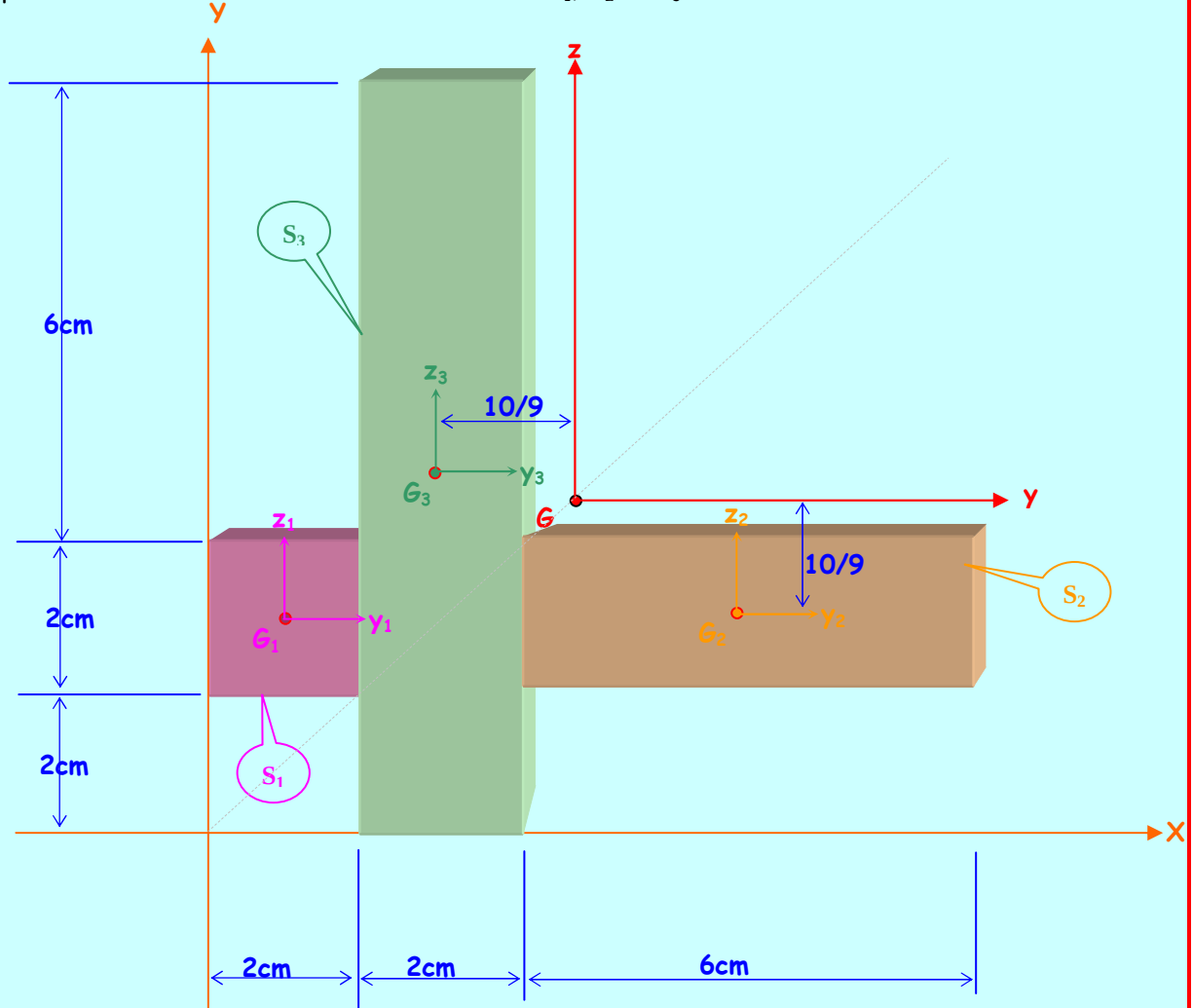
1°) La position du centre de gravité dans le repère x,y.

2°) Les moments et le produit d'inertie par rapport aux axes centraux parallèles à x,y.

3°) La position des axes centraux principaux et les moments d'inertie principaux.

## RÉPONSES N°4

Décomposons la surface initiale  $S$  en trois surfaces  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$



1)

$$G_{1/XY} \begin{vmatrix} 1\text{cm} \\ 3\text{cm} \end{vmatrix} \quad G_{2/XY} \begin{vmatrix} 7\text{cm} \\ 3\text{cm} \end{vmatrix} \quad G_{3/XY} \begin{vmatrix} 3\text{cm} \\ 5\text{cm} \end{vmatrix} \quad A_1=4\text{cm}^2 \quad A_2=12\text{cm}^2 \quad A_3=20\text{cm}^2$$

$$X_G = \frac{X_{G1}A_1 + X_{G2}A_2 + X_{G3}A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \Rightarrow \frac{1 \times 4 + 7 \times 12 + 3 \times 20}{4 + 12 + 20}$$

$$Y_G = \frac{Y_{G1}A_1 + Y_{G2}A_2 + Y_{G3}A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \Rightarrow \frac{3 \times 4 + 3 \times 12 + 5 \times 20}{4 + 12 + 20}$$

$$G_{/XY} \begin{vmatrix} 4,11\text{cm} \\ 4,11\text{cm} \end{vmatrix}$$

| $S_i$                    | $S_1$    | $S_2$             | $S_3$              |
|--------------------------|----------|-------------------|--------------------|
| $A_i (\text{cm}^2)$      | 4        | 12                | 20                 |
| $G_{i/yz} (\text{cm})$   | -28/9    | 26/9              | -10/9              |
|                          | -10/9    | -10/9             | 8/9                |
| $I_{yiyi} (\text{cm}^4)$ | $2^4/12$ | $6 \times 2^3/12$ | $2 \times 10^3/12$ |
| $I_{yizi} (\text{cm}^4)$ | 0        | 0                 | 0                  |

2)

$$I_{yy}^S = I_{yy}^{S_1} + I_{yy}^{S_2} + I_{yy}^{S_3} \quad \text{avec} \quad I_{yy}^{S_i} = I_{y_i y_i}^{S_i} + z_{Gi}^2 A_i$$

$$I_{yy}^S = \frac{2^4}{12} + \left(-\frac{10}{9}\right)^2 4 + \frac{6.2^3}{12} + \left(-\frac{10}{9}\right)^2 12 + \frac{2.10^3}{12} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 20$$

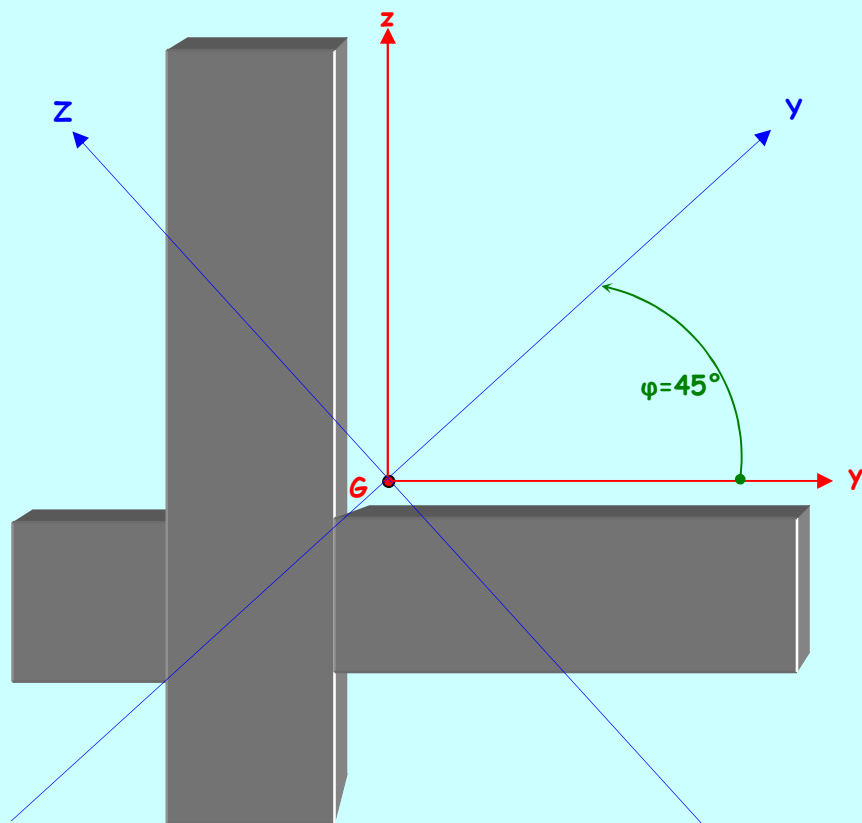
$$I_{yy}^S = I_{zz}^S = 207,56 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz}^S = I_{yz}^{S_1} + I_{yz}^{S_2} + I_{yz}^{S_3} \quad \text{avec} \quad I_{yz}^{S_i} = I_{y_i z_i}^{S_i} + y_{Gi} z_{Gi} A_i$$

$$I_{yz}^S = 0 + \left(-\frac{28}{9}\right)\left(-\frac{10}{9}\right) 4 + 0 + \left(\frac{26}{9}\right)\left(-\frac{10}{9}\right) 12 + 0 + \left(-\frac{10}{9}\right)\left(\frac{8}{9}\right) 20$$

$$I_{yz}^S = -44,44 \text{ cm}^4$$

Éléments principaux d'Inertie :



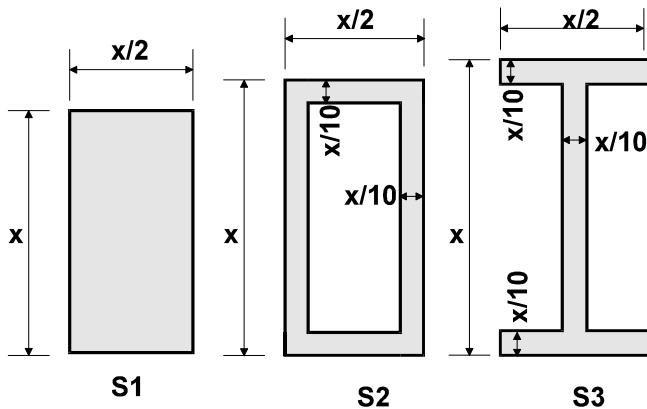
$\varphi = 45^\circ$  car Y est axe de symétrie de la surface S

$$I_Y^Z = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4I_{yz}^2} = \frac{207,56 + 207,562}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(0)^2 + 4(-44,44)^2}$$

$$I_Y = 252 \text{ cm}^4$$

$$I_Z = 163,12 \text{ cm}^4$$

## PROBLÈME N°5



Considérons les trois surfaces ci-contre.

1°) Calculez pour chaque surface la valeur de  $x$  de telle façon que le moment d'inertie central maximum vaille  $54 \text{ cm}^4$ .

2°) Calculez alors l'aire de chaque surface et en déduire la surface la plus rationnelle.

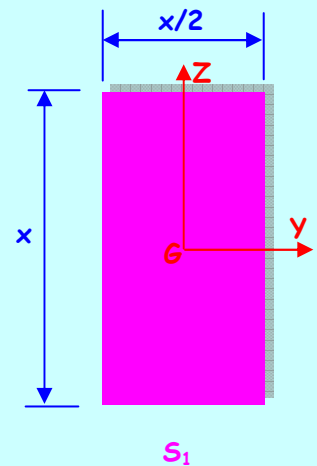
## RÉPONSES N°5

Les trois sections  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  possèdent 2 axes de symétries qui sont donc les axes principaux d'inertie. Le moment d'inertie maximum est celui relatif à l'axe  $Y$ .

Section  $S_1$  :

$$I_Y = \frac{\frac{x}{2} \times x^3}{12} = \frac{x^4}{24} = 54 \text{ cm}^4 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[4]{54 \times 24}$$

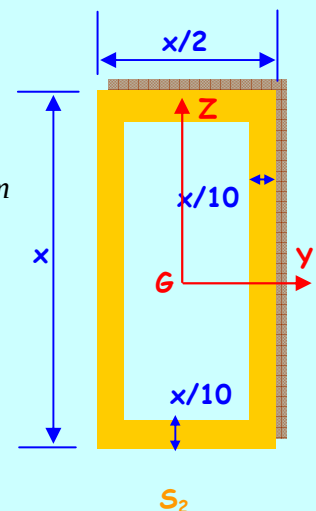
$$x = 6 \text{ cm} \quad A_1 = 18 \text{ cm}^2$$

Section  $S_2$  :

$$I_Y = \frac{x^4}{24} - \frac{\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{5}\right)\left(x - \frac{x}{5}\right)^3}{12} = 54 \text{ cm}^4 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[4]{\frac{54}{\frac{1}{24} - \frac{8}{625}}} = 6,58 \text{ cm}$$

$$A_2 = \frac{6,58^2}{2} - \left(\frac{3 \times 6,58}{10}\right)\left(\frac{4 \times 6,58}{5}\right)$$

$$x = 6,58 \text{ cm} \quad A_2 = 11,25 \text{ cm}^2$$



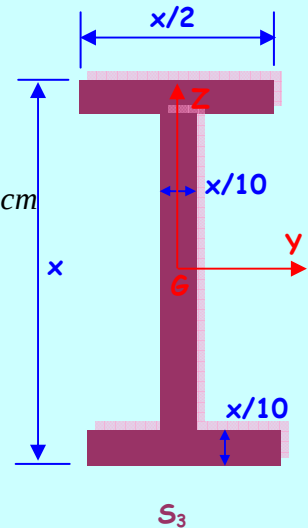
**Section  $S_3$  :**

$$I_Y = \frac{x^4}{24} - \frac{\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{10}\right)\left(x - \frac{x}{5}\right)^3}{12} = 54 \text{ cm}^4 \quad \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{54}{\frac{1}{24} - \frac{64}{3750}}} = 6,84 \text{ cm}$$

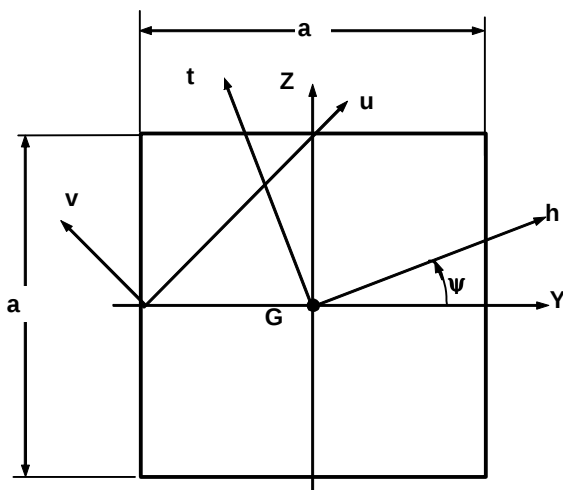
$$A_3 = \frac{6,84^2}{2} - \left(\frac{2 \times 6,84}{5}\right)\left(\frac{4 \times 6,84}{5}\right)$$

$$x = 6,84 \text{ cm} \quad A_2 = 8,42 \text{ cm}^2$$

**Récapitulatif :**

| $S_i$              | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
|--------------------|-------|-------|-------|
| $x(\text{cm})$     | 6     | 6,58  | 6,84  |
| $I_Y(\text{cm}^4)$ | 54    | 54    | 54    |
| $A_i(\text{cm}^2)$ | 18    | 11,25 | 8,42  |

Section la plus rationnelle  $S_3$  car pour un même moment d'inertie son aire est la plus faible.

**PROBLÈME N°6**

1°) Montrez que pour un carré de côté  $a$  tous les axes centraux sont principaux et que tous les moments d'inertie centraux valent  $a^4 / 12$  (calculer  $I_{hh}$  et  $I_{ht}$ ).

2°) Calculez les moments et le produit d'inertie du carré dans les axes  $u, v$ .

## RÉPONSES N°6

1) 4 axes de symétrie : Tous les axes centraux sont donc principaux

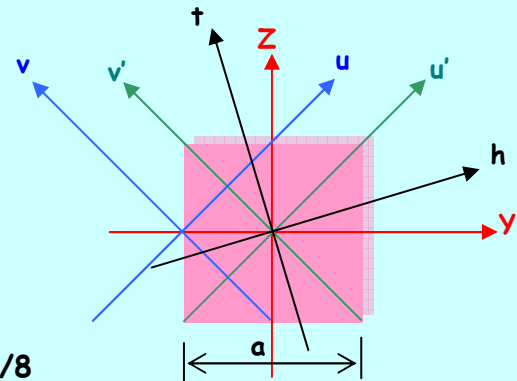
$$I_Y = I_Z = I_{hh} = I_{tt} = \frac{a^4}{12} \Rightarrow I_{ht} = 0$$

2)

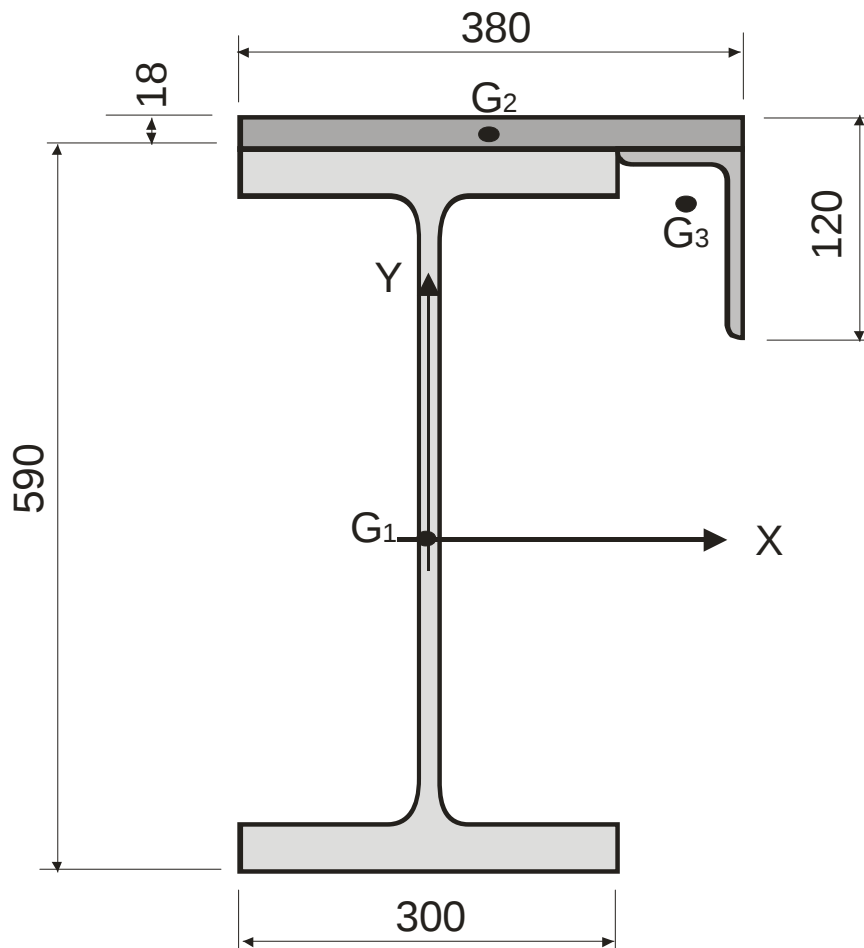
$$I_{u'u'} = I_{v'v'} = \frac{a^4}{12} \quad I_{u'v'} = 0$$

$$I_{uu} = I_{u'u'} + x_{v_G}^2 A = \frac{a^4}{12} + \left(-\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 a^2 \quad I_{ww} = 5a^4/24$$

$$I_{uv} = I_{u'v'} + x_{u_G} x_{v_G} A = 0 + \left(-\frac{a\sqrt{2}}{4}\right) \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right) a^2 \quad I_{uv} = -a^4/8$$



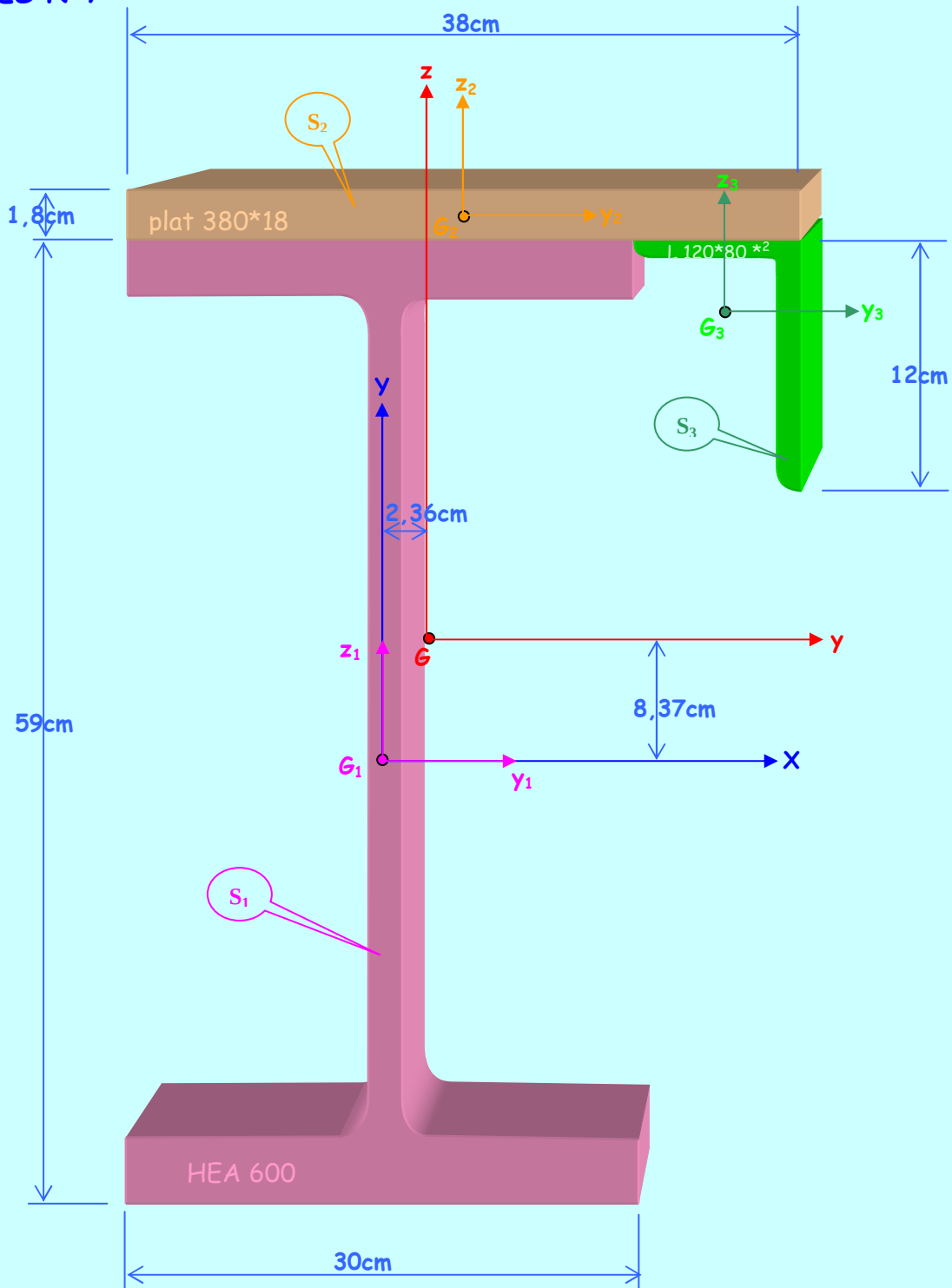
## PROBLÈME N°7



La section droite de la partie poutre de la contre flèche d'une grue à tour est représentée ci-contre. La section droite se compose d'un profilé HEA 600, d'un plat 380\*18 mm, et d'une cornière à ailes inégales 120\*80 série 2.

- 1°) Calculez les coordonnées du centre de gravité de la section droite dans le repère  $G_1, xy$ .
- 2°) Déterminez les éléments principaux des inerties.

## RÉPONSES N°7

**1) Détermination du centre de gravité  $G$  de la surface  $S$  :**

$$\begin{array}{l}
 G_{1/XY} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad G_{2/XY} \begin{vmatrix} 4\text{cm} \\ 30,4\text{cm} \end{vmatrix} \quad G_{3/XY} \begin{vmatrix} 20,97\text{cm} \\ 25,5\text{cm} \end{vmatrix} \quad A_1=226,5\text{cm}^2 \quad A_2=38,18\text{cm}^2 \\
 A_3=22,7\text{cm}^2 \\
 X_G = \frac{X_{G1}A_1 + X_{G2}A_2 + X_{G3}A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \Rightarrow \frac{38 \times 1,8 \times 4 + 22,7 \times 20,97}{226,5 + (38 \times 1,8) + 22,7} \\
 Y_G = \frac{Y_{G1}A_1 + Y_{G2}A_2 + Y_{G3}A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \Rightarrow \frac{38 \times 1,8 \times 30,4 + 22,7 \times 25,5}{226,5 + (38 \times 1,8) + 22,7}
 \end{array}$$

$$G_{/XY} \begin{vmatrix} 2,36\text{cm} \\ 8,37\text{cm} \end{vmatrix}$$

**2) Eléments principaux des inerties :**

**Préparation des calculs :** A l'aide des tableaux AFNOR fournis en annexe nous pouvons relever les caractéristiques géométriques des 3 surfaces. Résumons les dans le tableau suivant :

| $S_i$                   | $S_1$  | $S_2$               | $S_3$ |
|-------------------------|--------|---------------------|-------|
| $A_i(\text{cm}^2)$      | 226,5  | 38,1,8              | 22,7  |
| $G_i/y_z(\text{cm})$    | -2,36  | 1,64                | 18,61 |
|                         | -8,37  | 22,03               | 17,13 |
| $I_{yiyi}(\text{cm}^4)$ | 141200 | $38,1,8^3/12$       | 323   |
| $I_{zizi}(\text{cm}^4)$ | 11270  | $38^3 \cdot 1,8/12$ | 114   |
| $I_{yizi}(\text{cm}^4)$ | 0      | 0                   | ?     |

**Calcul du produit d'inertie de la cornière  $I_{y_3z_3}$  :**

$$\tan 2\varphi = \frac{-2I_{y_3z_3}}{I_{y_3y_3} - I_{z_3z_3}}$$

$$\tan \alpha = 0,431$$

$$I_{y_3z_3} = \frac{-(I_{y_3y_3} - I_{z_3z_3})}{2} \tan(2(\tan^{-1} 0,431))$$

$$I_{y_3z_3} = -110,63 \text{ cm}^4$$

**Calcul des moments et produit d'inertie de la surface dans les axes principaux y,z.**

$$I_{yy}^S = I_{yy}^{S_1} + I_{yy}^{S_2} + I_{yy}^{S_3} = I_{y_1y_1}^{S_1} + z_{G_1}^2 A + I_{y_2y_2}^{S_2} + z_{G_2}^2 A + I_{y_3y_3}^{S_3} + z_{G_3}^2 A$$

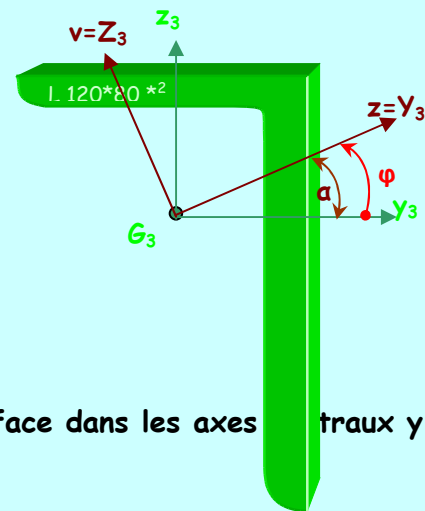
$$\begin{cases} I_{yy}^S = I_{yy}^{S_1} + I_{yy}^{S_2} + I_{yy}^{S_3} \\ I_{zz}^S = I_{zz}^{S_1} + I_{zz}^{S_2} + I_{zz}^{S_3} \\ I_{yz}^S = I_{yz}^{S_1} + I_{yz}^{S_2} + I_{yz}^{S_3} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} I_{yy}^{S_i} = I_{y_iy_i}^{S_i} + z_{G_i}^2 A \\ I_{zz}^{S_i} = I_{z_iz_i}^{S_i} + y_{G_i}^2 A \\ I_{yz}^{S_i} = I_{y_iz_i}^{S_i} + y_{G_i} z_{G_i} A_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{yy}^S = 197266,32 \text{ cm}^4 \\ I_{zz}^S = 28922,02 \text{ cm}^4 \\ I_{yz}^S = 14071,22 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

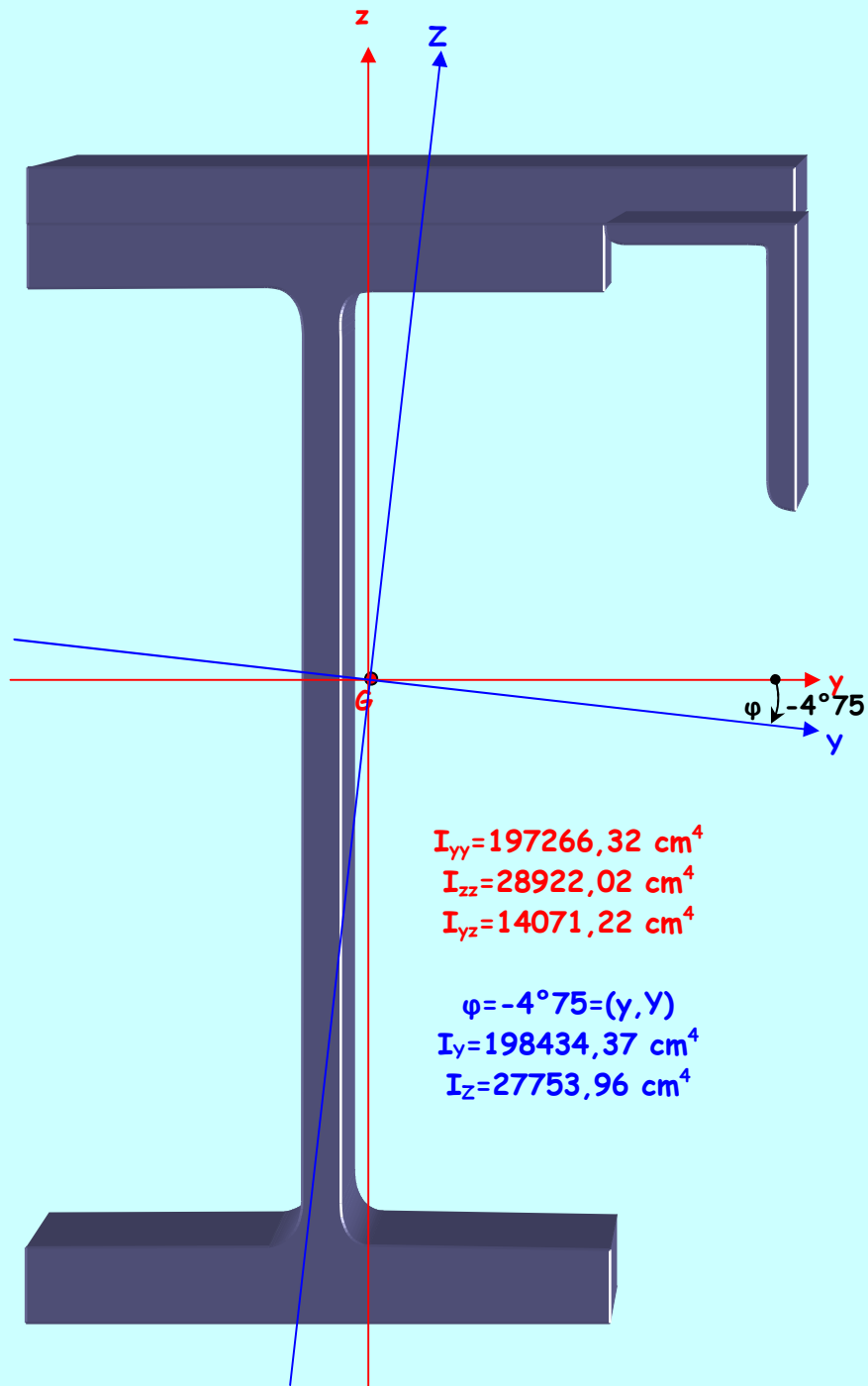
**Eléments principaux :**

$$\tan 2\varphi = \frac{-2I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}} \approx -0,1671 \quad \begin{cases} 2\varphi_1 = -9^\circ 49' \\ 2\varphi_2 = 170^\circ 51' \end{cases} \quad \cos 2\varphi > 0 \quad \hat{\varphi} = -4^\circ 75' = (\vec{y}, \vec{Y})$$

$\cos 2\varphi$  même signe que  $I_{yy} - I_{zz}$  :

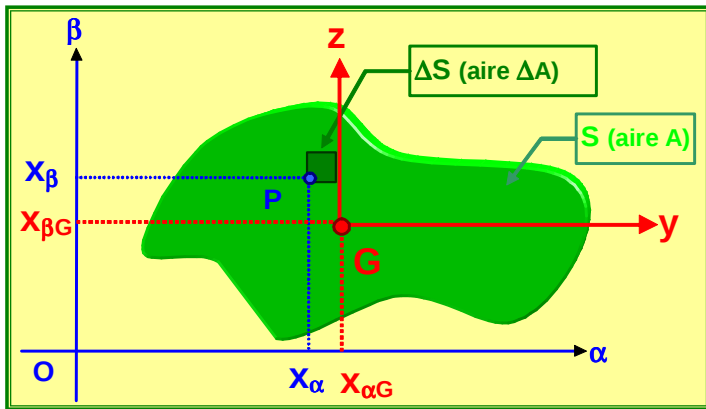
$$I_Y^Z = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4I_{yz}^2} \quad \begin{cases} I_Z = 27753,96 \text{ cm}^4 \\ I_Y = 19843,37 \text{ cm}^4 \end{cases}$$





# CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES DES SECTIONS DROITES DES POUTRES

## 1. Moments statiques. Centre de gravité:



Soient deux axes  $\alpha$  et  $\beta$ , et P un point de la section droite auquel on associe un élément de surface infiniment petit  $\Delta S$  d'aire  $\Delta A$ .

Par définition, les quantités définies par:

$$Q_\alpha = \sum_S x_\beta \Delta A = \iint_S x_\beta dA = x_{\beta_G} A$$

$$Q_\beta = \sum_S x_\alpha \Delta A = \iint_S x_\alpha dA = x_{\alpha_G} A$$

sont les moments statiques de la section droite par rapport aux axes  $\alpha$  et  $\beta$ .

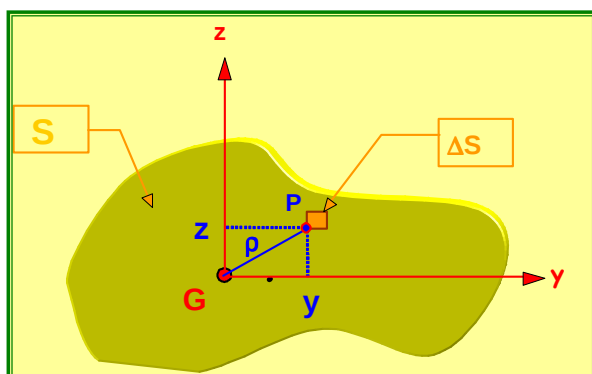
**Unité de mesure:** l'unité SI de moment statique est le  $m^3$ . On utilise plus généralement le  $cm^3$ .

**N.B. :** les moments statiques peuvent être positifs, négatifs ou nuls.

Les moments statiques sont donc nuls si les axes  $\alpha$  et  $\beta$  sont centraux (s'ils passent par le centre de gravité G de la section droite). On note y et z de tels axes dans ce qui suit.

## 2. Moments et produit d'inertie:

2.1. Moments d'inertie centraux par rapport aux axes d'un repère situé dans le plan de la section droite:



Soient deux axes centraux y et z, et P un point de la section droite auquel on associe un élément de surface infiniment petit  $\Delta S$  d'aire  $\Delta A$ .

Par définition, les quantités strictement positives définies par:

$$I_{yy} = \sum_S z^2 \Delta A = \iint_S z^2 dA$$

$$I_{zz} = \sum_S y^2 \Delta A = \iint_S y^2 dA$$

sont les moments d'inertie centraux la section droite par rapport aux axes y et z.

**Unité de mesure:** l'unité SI de moment d'inertie est le  $m^4$ . On utilise plus généralement le  $cm^4$ .

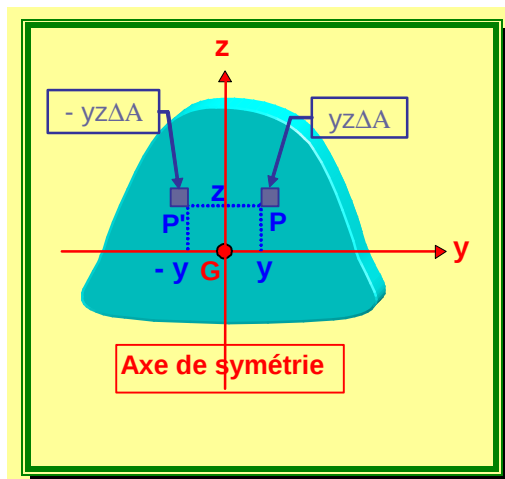
**N.B. :** les moments d'inertie sont toujours positifs, jamais négatifs ou nuls.

## 2.2. Produit d'inertie central par rapport aux axes d'un repère situé dans le plan de la section droite:

Par définition, la quantité définie par:

$$I_{yz} = \sum_S yz \Delta A = \iint_S yz dA$$

est le produit d'inertie central la section droite par rapport aux axes y et z.



**Unité de mesure:** l'unité SI de produit d'inertie est le  $m^4$ . On utilise plus généralement le  $cm^4$ .

N.B. : le produit d'inertie peut être positif, négatif ou nul.

Il est nul lorsque l'un des deux axes est axe de symétrie.

$$I_{yz} = \sum_S yz \Delta A = \iint_S yz dA = 0$$

## 2.3. Moment d'inertie polaire par rapport au centre de gravité G de la section droite:

Par définition, la quantité strictement positive définie par:

$$I_G = \sum_S \rho^2 \Delta A = \iint_S \rho^2 dA$$

est le moment d'inertie polaire de la section droite par rapport au centre de gravité G de la section droite ( $\rho$  est le rayon polaire du point P).

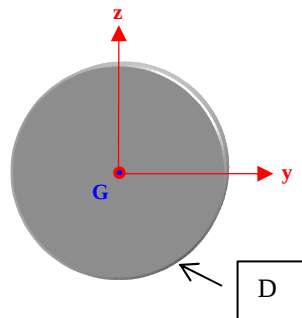
**Unité de mesure:** l'unité SI de moment d'inertie polaire est le  $m^4$ . On utilise plus généralement le  $cm^4$ .

N.B. Compte tenu de la relation:

$$\rho^2 = y^2 + z^2$$

$$I_G = I_{yy} + I_{zz}$$

**Exemples:**  
cas du cercle.



$$I_{yy} = I_{zz}$$

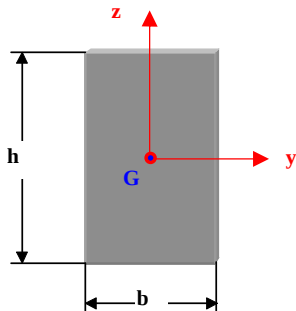
$$I_{yz} = 0$$

$$I_G = I_{yy} + I_{zz} = 2I_{yy}$$

$$I_G = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I_{yy} = \frac{\pi D^4}{64}$$

cas du rectangle.



$$I_{yz} = 0$$

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{zz} = \frac{b^3h}{12}$$

$$I_G = I_{yy} + I_{zz}$$

$$I_G = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$$

## 2.4. Translation des axes centraux: théorème d'HUYGHENS:

Soient deux repères,  $(O, \alpha \beta)$  quelconque, et  $(G, yz)$  central, tels que les axes soient parallèles, et un point P de la section droite auquel on associe un élément de surface

infiniment petit  $\Delta S$  d'aire  $\Delta A$ .

Les relations entre les coordonnées:

$$x_\alpha = x_{\alpha G} + y$$

$$x_\beta = x_{\beta G} + z$$

permettent d'écrire:

$$I_{\alpha\alpha} = \iint_S x_\beta^2 dA = \iint_S (x_{\beta G} + z)^2 dA$$

Or :

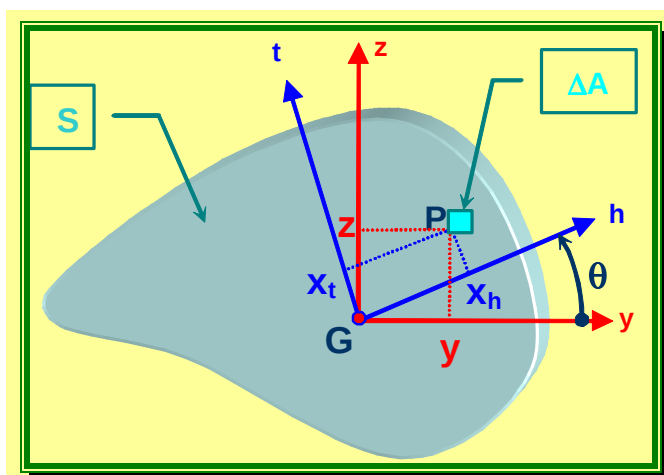
$$x_{\beta G}^2 \iint_S dA = x_{\beta G}^2 A \quad ; \quad \iint_S z^2 dA = I_{yy} \quad ; \quad 2x_{\beta G} \iint_S z dA = 2x_{\beta G} Q_y = 0$$

$$\begin{aligned} I_{\alpha\alpha} &= I_{yy} + Ax_{\beta G}^2 \\ I_{\beta\beta} &= I_{zz} + Ax_{\alpha G}^2 \\ I_{\alpha\beta} &= I_{yz} + Ax_{\alpha G} x_{\beta G} \\ I_O &= I_G + A\rho_G^2 \end{aligned}$$

Ces relations constituent le théorème d'HUYGHENS.

## 2.5. Rotation des axes centraux :

### 2.5.1. Rotation des axes centraux:



Soient deux repères,  $(G, y, z)$ , et  $(G, h, t)$  centraux, tels que le repère  $(G, h, t)$  se déduise du repère  $(G, y, z)$  par une rotation d'angle  $\theta$  et un point P de la section droite auquel on associe un élément de surface infiniment petit  $\Delta S$  d'aire  $\Delta A$ .

Les relations entre les coordonnées:

$$\begin{cases} x_h = y \cos \theta + z \sin \theta \\ x_t = -y \sin \theta + z \cos \theta \end{cases}$$

permettent d'écrire:

$$I_{hh} = \iint_S x_t^2 dA = \iint_S (-y \sin \theta + z \cos \theta)^2 dA = \iint_S (-y \sin \theta)^2 dA + \iint_S (z \cos \theta)^2 dA + \iint_S 2(-y \sin \theta \times z \cos \theta) dA$$

$$I_{hh} = (\sin \theta)^2 \iint_S y^2 dA + (\cos \theta)^2 \iint_S z^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \iint_S yz dA$$

$$\begin{aligned} I_{hh} &= I_{yy} \cos^2 \theta + I_{zz} \sin^2 \theta - 2I_{yz} \sin \theta \cos \theta \\ I_{tt} &= I_{yy} \sin^2 \theta + I_{zz} \cos^2 \theta + 2I_{yz} \sin \theta \cos \theta \\ I_{ht} &= (I_{yy} - I_{zz}) \sin \theta \cos \theta + I_{yz} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

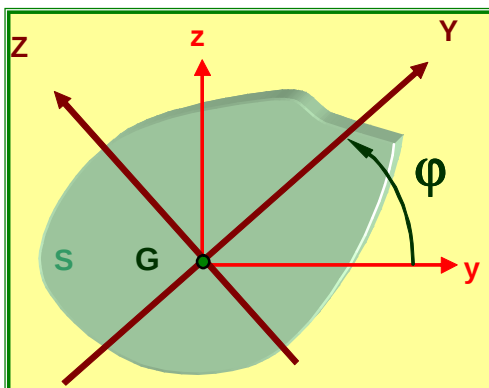
En fonction de l'arc double  $2\theta$ , les relations précédentes s'écrivent:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

$$\begin{aligned} I_{hh} &= \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2} \cos 2\theta - I_{yz} \sin 2\theta \\ I_{tt} &= \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} - \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2} \cos 2\theta + I_{yz} \sin 2\theta \\ I_{ht} &= \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2} \sin 2\theta + I_{yz} \cos 2\theta \end{aligned}$$

## 2.6. Éléments principaux des inerties de la section droite:

### a) Définition:



Il existe toujours dans le plan d'une surface plane deux axes centraux perpendiculaires (ou une infinité d'axes centraux perpendiculaires) appelés axes principaux d'inertie (notés Y et Z) suivant lesquels :

1°) Le produit d'inertie de la surface est nul.

2°) Les moments d'inertie principaux (notée  $I_Y$  et  $I_Z$ ), sont maximum et minimum (ou constants).

Soit  $\varphi$  l'angle  $\theta$  particulier tel que  $I_{ht} = 0$

$$0 = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2} \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi$$

$$\tan 2\varphi = -\frac{2I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}}$$

En fonction de l'arc simple, on obtient :

$$\tan \varphi = -\frac{I_y - I_{yy}}{I_{yz}}$$

Soit  $\varphi_1$  l'angle  $\theta$  particulier tel que  $I_{hh}$  soit maximum ou minimum. On a alors:

$$\tan 2\varphi_1 = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

Par conséquent:  $\varphi = \varphi_1$

***b) Expression des moments d'inertie principaux:***

Des expressions donnant  $I_{hh}$  et  $I_{tt}$ , on tire, compte tenu de l'expression de  $I_{yz}$  en fonction de  $\tan 2\varphi$ :

$$I_Y = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2} \cos 2\varphi - I_{yz} \sin 2\varphi = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2} \cos 2\varphi + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2} \tan 2\varphi \sin 2\varphi$$

$$I_Y = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2} \cos 2\varphi + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2} \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2} \left( \frac{1}{\cos 2\varphi} \right)$$

$$\text{Or : } \frac{1}{\cos 2\varphi} = \sqrt{1 + \tan^2 2\varphi} = \sqrt{1 + \left( -\frac{2I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}} \right)^2}$$

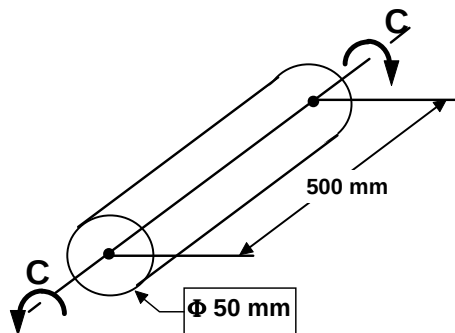
$$I_Y = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4I_{yz}^2} \quad (\text{maxi})$$

$$I_Z = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4I_{yz}^2} \quad (\text{mini})$$

$$I_Y > I_Z \Rightarrow \cos 2\varphi (I_{yy} - I_{zz}) > 0$$

# TORSION

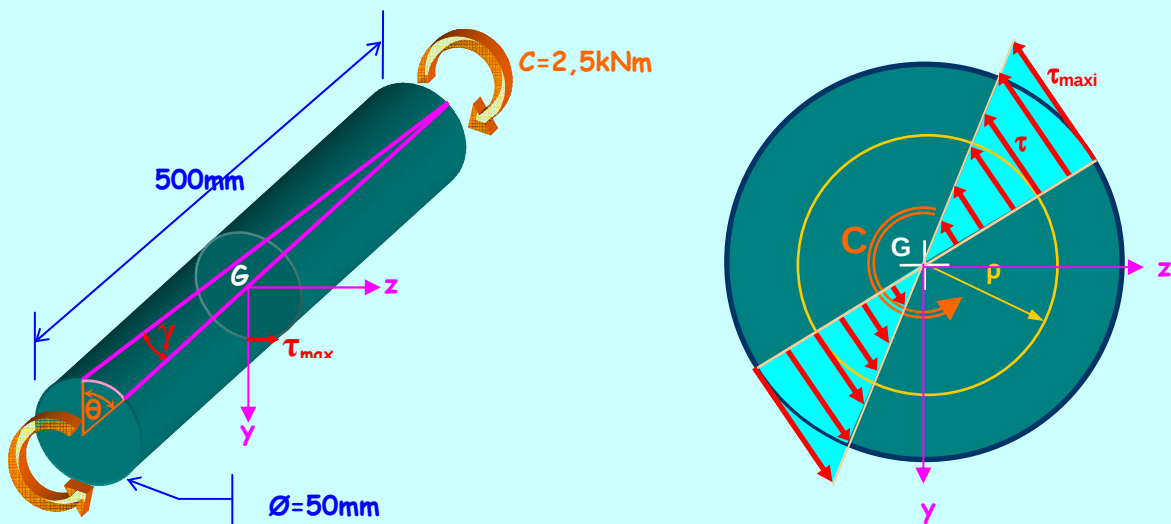
## PROBLÈME N°8



Un cylindre est soumis à un couple de torsion  $C = 2.5$  kNm. Le module de COULOMB du matériau vaut 78 GPa. Calculez:

- la contrainte tangentielle maximum dans le cylindre.
- la distorsion des génératrices en rd et en °.
- l'angle de rotation des sections extrêmes en °.

## RÉPONSES N°8



a) Le moment de torsion  $M_x$  est constant tout le long de la barre.  $M_x = C$

Considérons une section quelconque  $G$  :  $\tau_{max i} = \frac{C}{I_G} R$  avec  $I_G = \frac{\pi D^4}{32}$

$$\tau_{max i} = \frac{2,5 \cdot 10^6 \times 25 \times 32}{\pi \times 50^4} \quad \tau_{max} = 101,86 \text{ MPa}$$

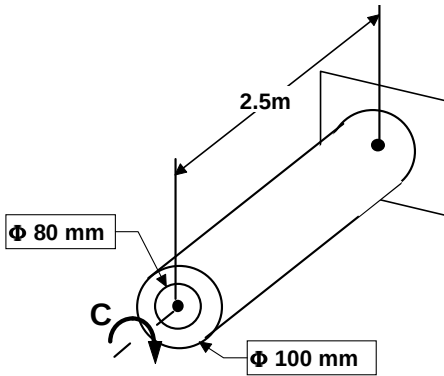
b) Appliquons la loi de Hooke en torsion :  $\tau = G\gamma$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{101,86}{78 \cdot 10^3} \quad \gamma = 1,305 \cdot 10^{-3} \text{ rd} = 0,0748^\circ$$

c) L'angle de rotation des sections extrêmes nous est donné par la relation :  $\theta_x^{max i} = \frac{M_x L}{GI_G}$

$$\theta_x = \frac{2,5 \cdot 10^6 \times 500 \times 32}{78 \cdot 10^3 \times \pi \times 50^4} \quad \theta = 0,0261 \text{ rd} = 1^\circ 50'$$

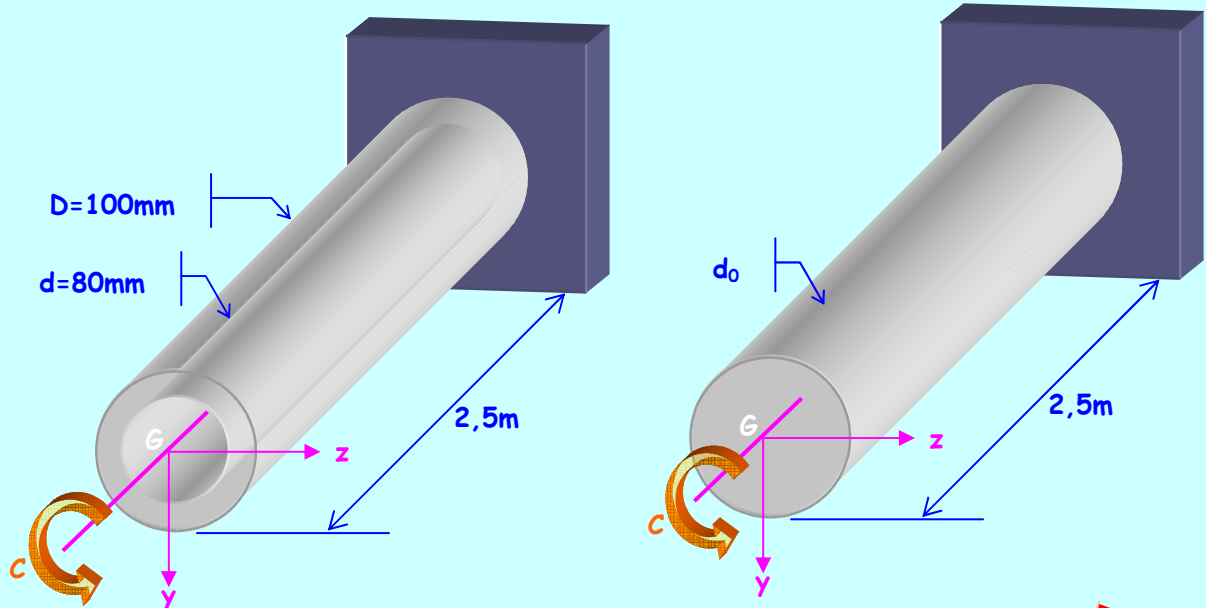
## PROBLÈME N°9



a) Calculez le couple  $C$  qui provoque une rotation des sections extrêmes du tube de  $2^\circ$  sachant que  $G = 27 \text{ GPa}$ . En déduire la contrainte tangentielle maximum.

b) Calculez, pour d'un cylindre de même poids que le tube et qui supporte le même couple, l'angle de rotation des sections extrêmes et la contrainte tangentielle maximum.

## RÉPONSES N°9



$$a) \theta_x^{\max i} = \frac{M_x L}{GI_G} \text{ avec } I_G = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} \text{ et } \theta_{rd} = \frac{\theta^\circ \times \pi}{180}$$

$$M_x = \frac{GI_G \theta_x^{\max i}}{L} = \frac{27 \cdot 10^3 \times \pi \times (100^4 - 80^4) \times 2 \times \pi}{32 \times 180 \times 2,5 \cdot 10^3} = 2185130 \text{ mmN}$$

$$C = 2185,13 \text{ mN}$$

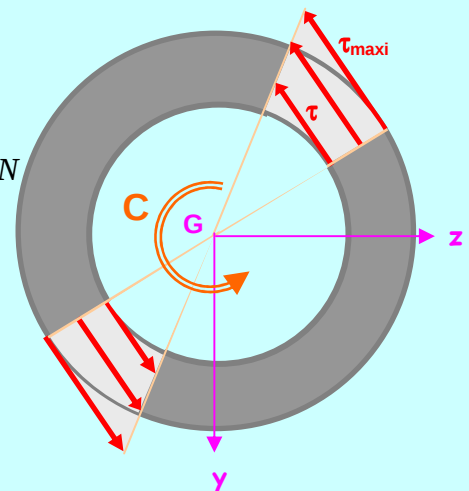
$$\tau_{\max i} = \frac{C}{I_G} R = \frac{2185,13 \cdot 10^3 \times 100 \times 32}{2 \times \pi \times (100^4 - 80^4)} \quad \tau_{\max} = 18,85 \text{ MPa}$$

b) Même poids implique même volume donc même aire

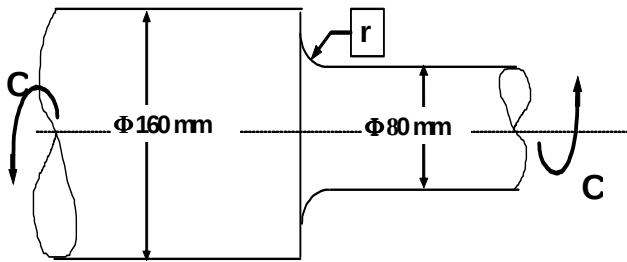
$$A = A_0 \Rightarrow \frac{\pi d_0^2}{4} = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} \Rightarrow d_0 = \sqrt{100^2 - 80^2} = 60 \text{ mm}$$

$$\theta_x^{\max i} = \frac{M_x L}{GI_G} = \frac{2185,13 \cdot 10^3 \times 2500 \times 32}{27 \cdot 10^3 \times \pi \times 60^4} \quad \theta_{\max} = 0,159 \text{ rd} = 9^\circ 11'$$

$$\tau_{\max i} = \frac{C}{I_G} R = \frac{2185,13 \cdot 10^3 \times 30 \times 32}{\pi \times 60^4} \quad \tau_{\max} = 51,52 \text{ MPa}$$



## PROBLÈME N°10



Un arbre épaulé tourne à 900 tr/mn. La contrainte tangentielle admissible vaut 55 MPa. Calculez:

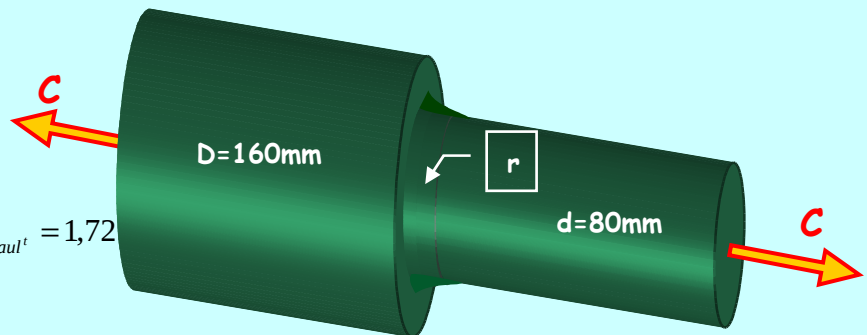
- a) la puissance transmise en kW si  $r=4\text{mm}$ .  
b) le gain de puissance si  $r=10\text{mm}$ .

## RÉPONSES N°10

a)  $r=4\text{mm}$

$$K_{\text{epaul}^t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{D}{d} = \frac{160}{80} = 2 \\ \frac{r}{d} = \frac{4}{80} = 0,05 \end{cases}$$

$$K_{\text{epaul}^t} = 1,72$$



$$\tau_{\text{max}i} = K \frac{C}{I_G} \frac{d}{2} \Rightarrow C = \frac{2\tau_{\text{max}i} I_G}{Kd} = \frac{55 \times \pi \times 80^4}{32 \times 1,72 \times 40} = 3214653 \text{ mmN}$$

$$C = 3214,65 \text{ mN}$$

$$P = C\omega \quad \text{avec } \omega = \frac{\pi N}{30}$$

La puissance s'exprimant en Watt, le couple en mN et la rotation angulaire en radian par seconde.

$$P = \frac{3214,65 \times \pi \times 900}{30} = 302974 \text{ W}$$

$$P = 303 \text{ kW}$$

b)  $r=10\text{mm}$

$$K_{\text{epaul}^t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{D}{d} = \frac{160}{80} = 2 \\ \frac{r}{d} = \frac{10}{80} = 0,125 \end{cases}$$

$$K_{\text{epaul}^t} = 1,35$$

$$P = \frac{303 \times 1,72}{1,35} = 386 \text{ kW} \Rightarrow \text{Gain} = \frac{386 - 303}{303} \times 100$$

$$G\% = 27,4\%$$

## PROBLÈME N°11

Un arbre de torsion tubulaire de diamètre extérieur  $D$ , de diamètre intérieur  $d$ , de longueur 1200mm, est sollicité par un couple de 2000 mN. Sous l'action de ce couple, l'angle de torsion total de l'une des extrémités par rapport à l'autre doit être de  $20^\circ \pm 0.5^\circ$ . La contrainte maximum admissible en torsion est de 400 MPa. Le module de COULOMB du matériau vaut 80 GPa.

- 1) Calculer la distorsion angulaire maximum en radians en appliquant la loi de HOOKE.
- 2) En déduire le diamètre extérieur  $D$  en mm (arrondir le résultat au mm).
- 3) Quel est alors le diamètre intérieur  $d$  en mm (arrondir le résultat au mm).
- 4) Avec les valeurs trouvées en 2) et 3) calculer la contrainte maximum de torsion (en MPa) et l'angle de torsion des sections extrêmes (en  $^\circ$ ).

### RÉPONSES N°11

$$1) \gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{400}{80 \cdot 10^3} \quad \gamma = 5 \cdot 10^{-3} \text{rd}$$

$$2) \gamma = \frac{\theta D}{2L} \Rightarrow D = \frac{2\gamma L}{\theta} = \frac{2 \times 5 \cdot 10^{-3} \times 1200 \times 180}{20 \times \pi} = 34,37 \text{mm}$$

En arrondissant au mm :  **$D=34\text{mm}$**

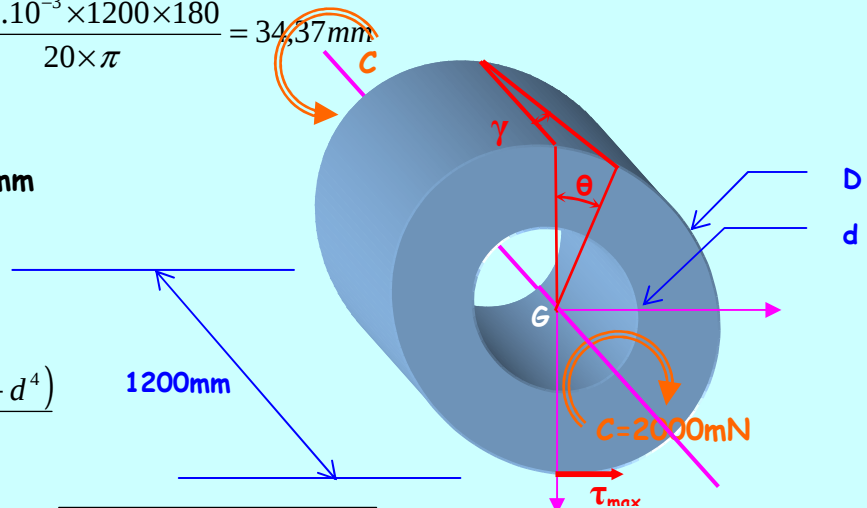
$$3) \tau_{\max i} = \frac{C}{I_G} R \text{ avec } I_G = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

$$400 = \frac{2000 \cdot 10^3 \times 17 \times 32}{\pi \times (34^4 - d^4)} \Rightarrow d = \sqrt[4]{34^4 - \frac{2000 \cdot 10^3 \times 17 \times 32}{400 \times \pi}} = 26,19 \text{mm}$$

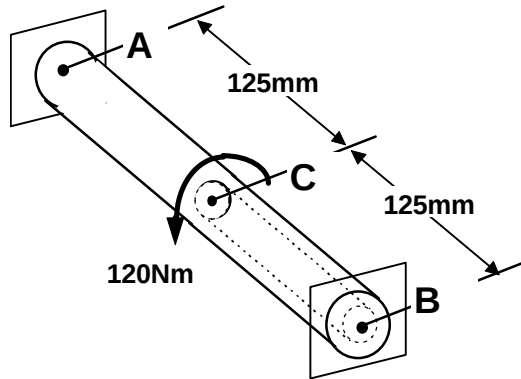
En arrondissant au mm :  **$d=26\text{mm}$**

$$4) \tau_{\max} = \frac{2000 \cdot 10^3 \times 17 \times 32}{\pi \times (34^4 - 26^4)} \quad \tau_{\max} = 393,83 \text{ MPa}$$

$$\theta_{\max} = \frac{M_x L}{GI_G} = \frac{2000 \cdot 10^3 \times 1200 \times 32}{80 \cdot 10^3 \times \pi \times (34^4 - 26^4)} \quad \theta_{\max} = 0,347 \text{rd} = 19^\circ 91$$



## PROBLÈME N°12



Le diamètre extérieur vaut 20 mm, le diamètre intérieur 16 mm. La barre AB est encastree en A et B. Calculez les moments d'encastrement en A et B.

## RÉPONSES N°12

Problème spatial :  $H=i-6n=6$  car

6 inconnues en A, 6 inconnues en B.

Compte tenue du chargement, nous pouvons réduire le degré d'hyperstaticité à 1 :

2 inconnues externes, un moment en A et un en B

Equation d'équilibre :  $M_A + M_B = C = 120 \text{ Nm}$

Equation de déformation :  $\theta_{A/B} = \theta_{AC} + \theta_{CB} = 0$

$$\theta_{AC} = \frac{M_x^{AC} L^{AC}}{GI_G^{AC}} \text{ avec } M_x^{AC} = -M_A$$

$$\theta_{CB} = \frac{M_x^{CB} L^{CB}}{GI_G^{CB}} \text{ avec } M_x^{CB} = M_B$$

$$\frac{M_x^{AC} L^{AC}}{GI_G^{AC}} + \frac{M_x^{CB} L^{CB}}{GI_G^{CB}} = \frac{-M_A}{I_G^{AC}} + \frac{M_B}{I_G^{CB}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{M_A}{M_B} = \frac{I_G^{AC}}{I_G^{CB}} = \frac{20^4}{20^4 - 16^4}$$

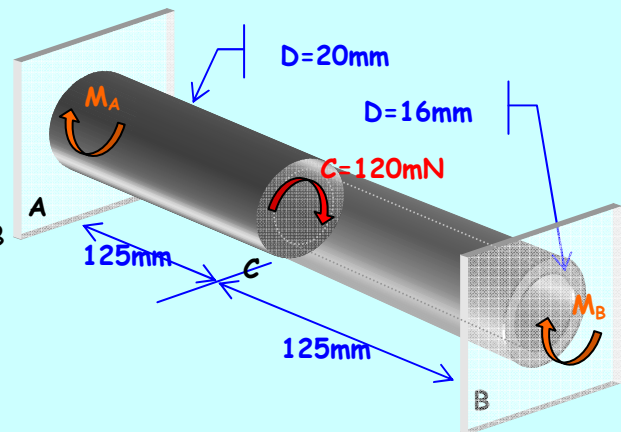
D'où le système à résoudre :

$$\begin{cases} M_A + M_B = 120 \\ \frac{M_A}{M_B} = \frac{20^4}{20^4 - 16^4} \end{cases}$$

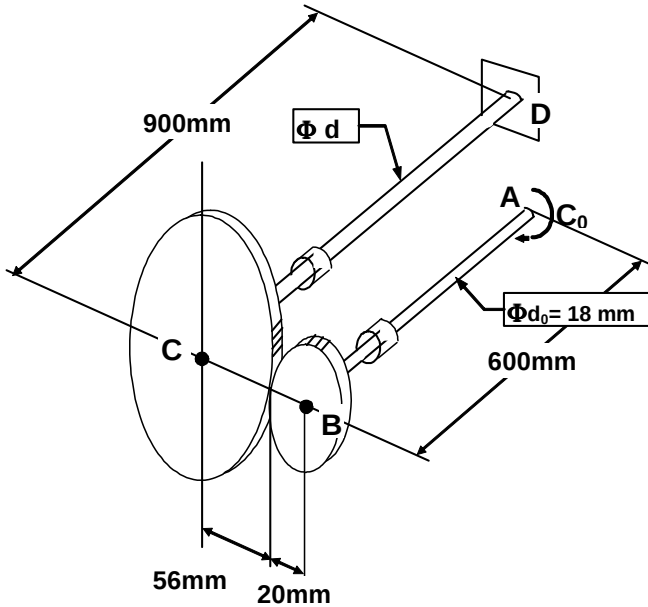
$$M_B = \frac{120}{1 + \frac{20^4}{20^4 - 16^4}} = 44,55 \quad M_A = 75,45$$

$$M_A = 75,45 \text{ Nm}$$

$$M_B = 44,55 \text{ Nm}$$



## PROBLÈME N°13



La contrainte tangentielle maximum dans les arbres AB et CD vaut 55 MPa. Calculez:

- la valeur du couple  $C_0$ .
- le diamètre  $d$ .
- la rotation de la section droite A (en °) par rapport à la section droite D sachant que  $G = 80 \text{ GPa}$ .

## RÉPONSES N°13

$$a) \tau_{\max i} = \frac{M_x^{AB}}{I_G^{AB}} \frac{d_0}{2} \text{ avec } I_G^{AB} = \frac{\pi d_0^4}{32} \text{ et } M_x^{AB} = C_0$$

$$C_0 = \frac{\tau_{\max i} I_G^{AB}}{\frac{d_0}{2}} = \frac{55 \times \pi \times 18^4}{32 \times 9} = 62981 \text{ mmN}$$

$$C_0 = 63 \text{ Nm}$$

$$b) C = C_0 \times \frac{56}{20} = 63 \times \frac{56}{20} = 176,4 \text{ Nm}$$

$$\tau_{\max i} = \frac{M_x^{CD}}{I_G^{CD}} \frac{d}{2} \text{ avec } I_G^{CD} = \frac{\pi d^4}{32} \text{ et } M_x^{CD} = C$$

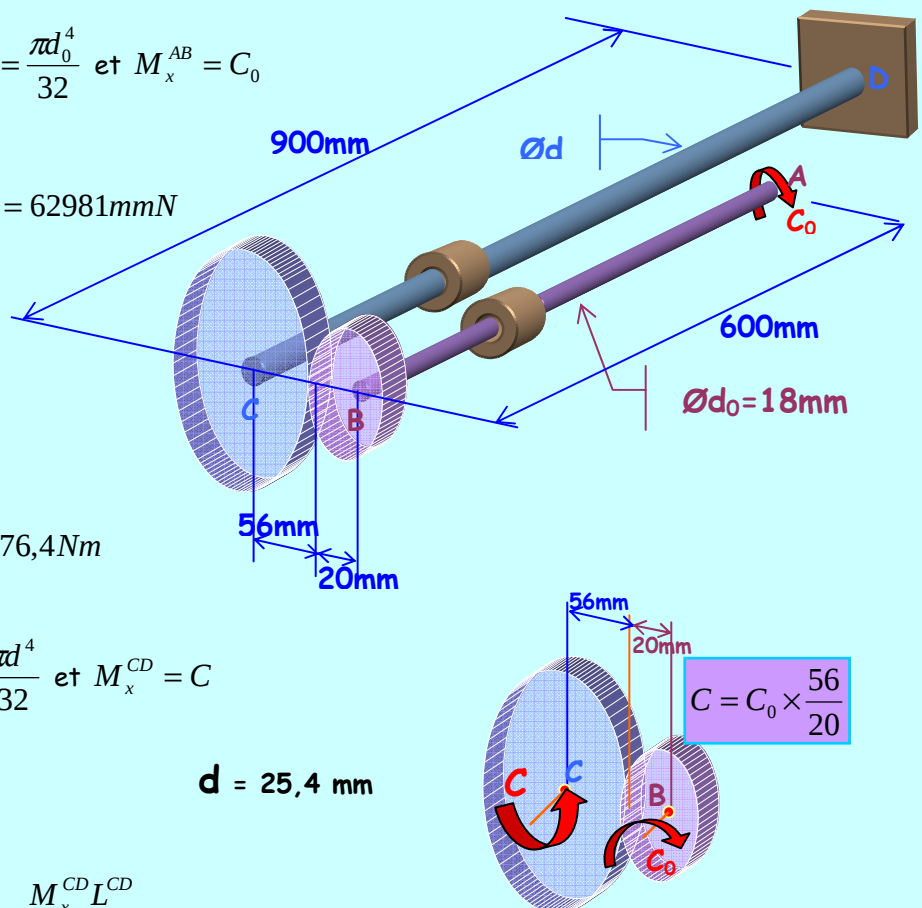
$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 176,4 \cdot 10^3}{\pi \times 55}} = 25,37$$

$$d = 25,4 \text{ mm}$$

$$c) \theta_{AB} = \frac{M_x^{AB} L^{AB}}{G I_G^{AB}} ; \theta_{CD} = \frac{M_x^{CD} L^{CD}}{G I_G^{CD}}$$

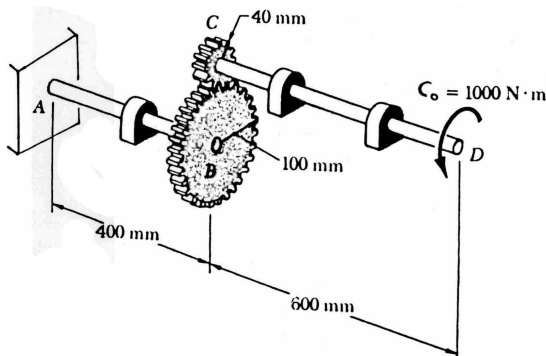
$$\theta_{A/D} = \theta_A = \theta_{CD} \times \frac{56}{20} + \theta_{AB} = \left( \frac{176,4 \cdot 10^3 \times 900 \times 32}{80 \cdot 10^3 \times \pi \times 25,4^4} \times \frac{56}{20} + \frac{63 \cdot 10^3 \times 600 \times 32}{80 \cdot 10^3 \times \pi \times 18^4} \right) = 0,1818 \text{ rd}$$

$$\theta_A = 10^\circ 42'$$



## PROBLÈME N°14

On considère l'assemblage de la figure ci-contre, constitué de deux arbres élastiques AB et CD reliés par deux engrenages. Les arbres AB et CD sont constitués du même acier de module de Coulomb : 80GPa, et ont même diamètre  $d$ . L'arbre AB a une longueur de 400mm et l'arbre CD une longueur de 600mm. Un couple  $C_0 = 1000\text{Nm}$  est appliqué à l'extrémité D de l'arbre CD. L'extrémité A de l'arbre AB est encastree.



- 1) Le point de contact des dentures des engrenages est situé sur une circonférence de rayon  $r_B = 100\text{mm}$  pour l'engrenage B et de rayon  $r_C = 40\text{mm}$  pour l'engrenage C. Calculer le moment de torsion auquel est soumis l'arbre AB.

- 2) Sachant que la rotation D par rapport à A ne peut excéder une valeur de  $1,5^\circ$  et que la contrainte tangentielle maximum admissible dans les deux arbres ne peut excéder 60 MPa, calculer le diamètre  $d$  des arbres AB et

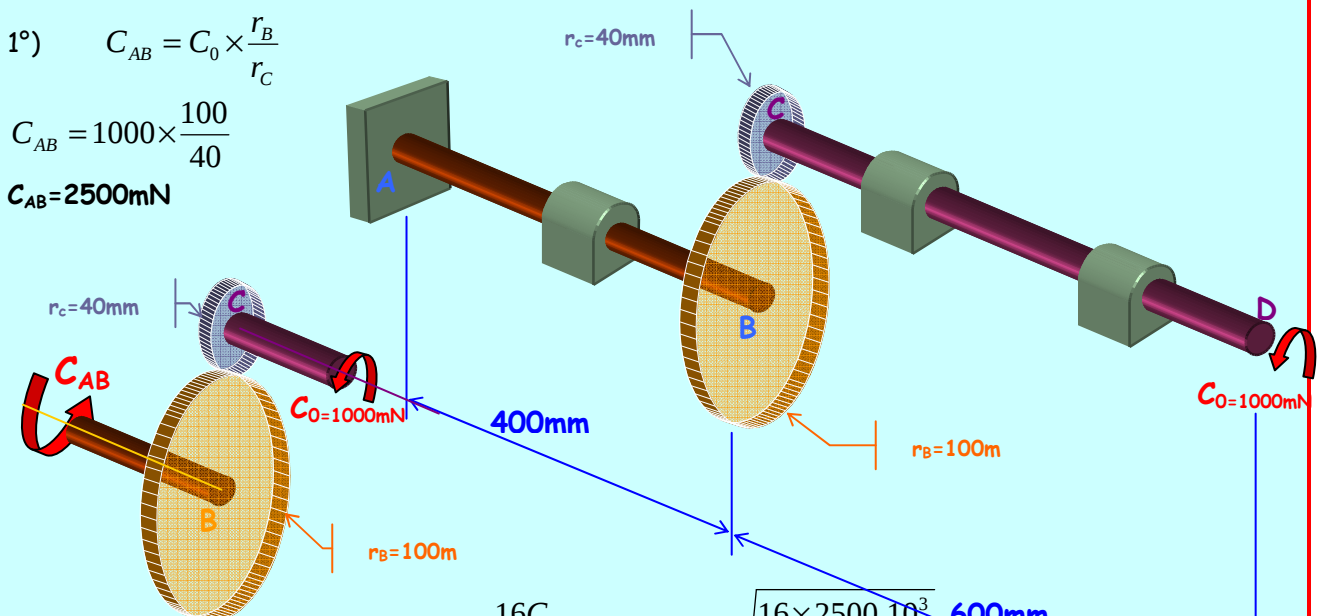
CD arrondi au mm.

### RÉPONSES N°14

$$1^\circ) \quad C_{AB} = C_0 \times \frac{r_B}{r_C}$$

$$C_{AB} = 1000 \times \frac{100}{40}$$

$$C_{AB} = 2500\text{mN}$$



$$2^\circ) \quad \text{Condition de résistance: } \tau_{\max} = \frac{16C_{AB}}{\pi d^3} \leq \tau_e \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \times 2500 \cdot 10^3}{60 \times \pi}} \quad d = 59,65\text{mm}$$

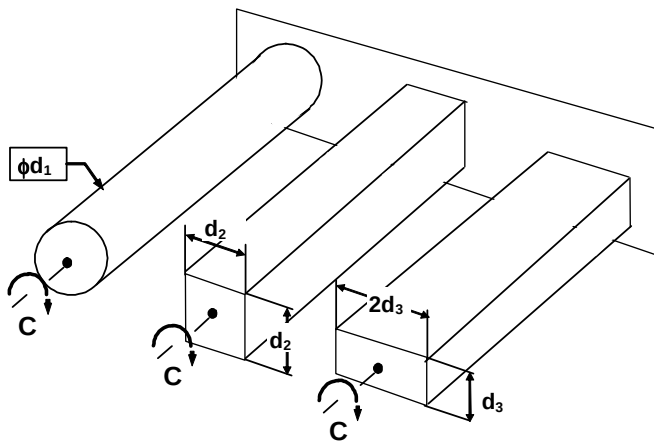
$$\text{Condition de déformation: } \theta_{A/D} \leq \theta_{\lim} ; \quad \theta_{CD} = \frac{M_x^{CD} L^{CD}}{G I_G^{CD}} ; \quad \theta_{AB} = \frac{M_x^{AB} L^{AB}}{G I_G^{AB}}$$

$$\theta_{A/D} = \theta_{AB} \times \frac{100}{40} + \theta_{CD} = \left( \frac{2500 \cdot 10^3 \times 400 \times 32}{80 \cdot 10^3 \times \pi \times d^4} \times \frac{100}{40} + \frac{1000 \cdot 10^3 \times 600 \times 32}{80 \cdot 10^3 \times \pi \times d^4} \right) \leq \frac{1,5 \times \pi}{180}$$

$$\text{D'où } d \leq \sqrt[4]{\frac{\left( \frac{2500 \cdot 10^3 \times 400 \times 32}{80 \cdot 10^3 \times \pi} \times \frac{100}{40} + \frac{1000 \cdot 10^3 \times 600 \times 32}{80 \cdot 10^3 \times \pi} \right) \times 180}{1,5 \times \pi}} = 62,31\text{mm} \quad d = 62,31\text{mm}$$

Choix du diamètre  $d = 63\text{ mm}$

## PROBLÈME N°15



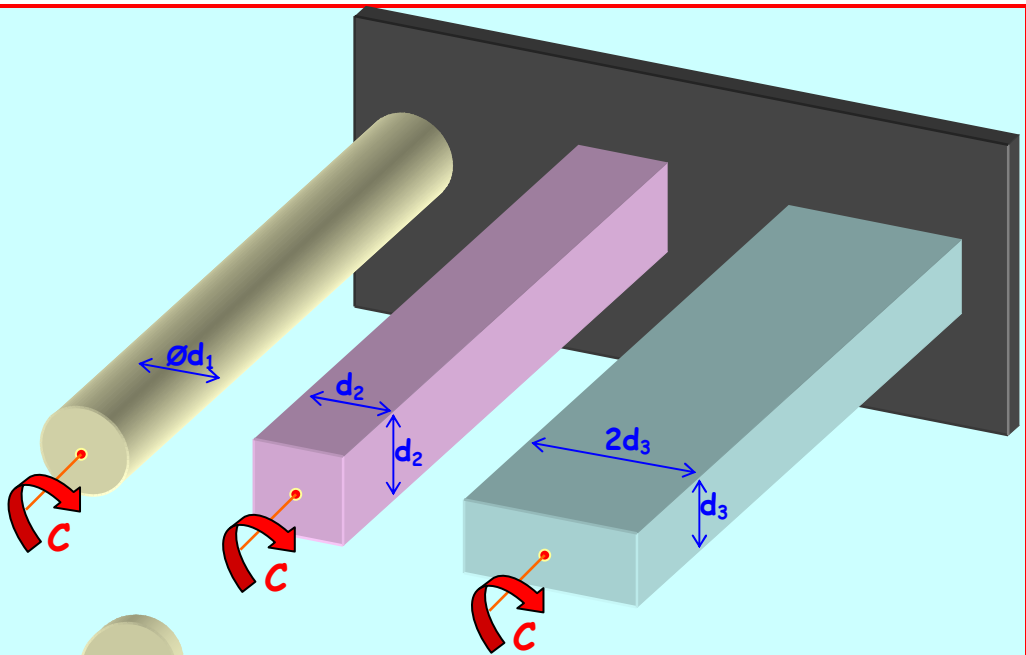
Calculez  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  dans chacun des 3 cas sachant que  $C = 300 \text{ Nm}$  et que la contrainte de cisaillement maximum vaut  $60 \text{ MPa}$ . Quelle est la section la plus rationnelle?

## RÉPONSES N°15

D'après l'annexe 4 :

$$J = k_1 e^3 h$$

$$\tau_{\max i} = \frac{|M_x|}{k_2 e^2 h}$$

**a) Section circulaire :**

$$\tau_{\max i} = \frac{|M_x|}{I_G} \frac{d_1}{2} = \frac{16|M_x|}{\pi d_1^3} \leq \tau_e \Rightarrow d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{300 \cdot 10^3 \times 16}{60 \times \pi}}$$

$$d_1 = 29,42 \text{ mm} \quad \text{Aire : } A_1 = 679,79 \text{ mm}^2$$

**b) Section carrée :**

$$\tau_{\max i} = \frac{|M_x|}{k_2 e^2 h} \quad e = h = d_2 \Rightarrow \frac{h}{e} = 1 \Rightarrow k_2 = 0,208 \quad d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{300 \cdot 10^3}{60 \times 0,208}} \quad d_2 = 28,86 \text{ mm} \quad A_2 = 832,9 \text{ mm}^2$$

**c) Section rectangulaire :**

$$\tau_{\max i} = \frac{|M_x|}{k_2 e^2 h} \quad 2e = h = d_3 \Rightarrow \frac{h}{e} = 2 \Rightarrow k_2 = 0,246 \quad d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{300 \cdot 10^3}{60 \times 0,246 \times 2}} \quad d_3 = 21,66 \text{ mm} \quad A_3 = 938,31 \text{ mm}^2$$

La section la plus rationnelle est donc circulaire

## PROBLÈME N°16

Deux barres réalisées en un même matériau ont même longueur et même poids. L'une a une section circulaire (1), l'autre carrée (2). Déterminez pour une même contrainte tangentielle maximum:

- le rapport des couples de torsion transmis.
- le rapport des angles de rotation des sections extrêmes.

### RÉPONSES N°16

D'après l'annexe 4 :

#### Section carrée

$$\tau_{\max i} = \frac{|M_x|}{k_2 e^2 h} \quad \theta'_x = \frac{M_x}{GJ}$$

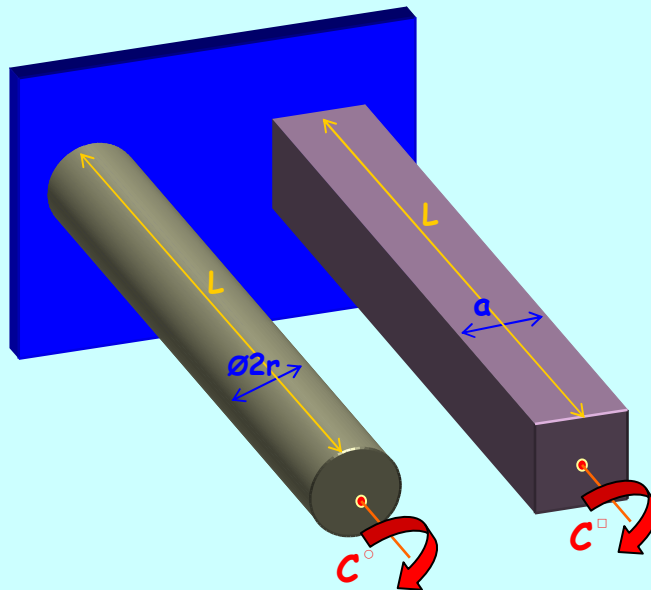
$$J = k_1 e^3 h$$

$$\frac{h}{e} = 1 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0,141 \\ k_2 = 0,208 \end{cases}$$

#### Section circulaire

$$\tau_{\max i} = \frac{|M_x|}{I_G} \frac{d_1}{2} \quad \theta'_x = \frac{M_x}{GI_G}$$

$$I_G = \frac{\pi^4}{2}$$



Même longueur, et même poids impliquent que les aires sont identiques :

$$\pi r^2 = a^2 \Rightarrow a = r\sqrt{\pi}$$

a) Rapport des couples de torsion transmis.

$$\tau_{\max i}^{\text{cercle}} = \tau_{\max i}^{\text{carré}}$$

$$\frac{C^{\text{cercle}}}{\frac{\pi^4}{2}} r = \frac{C^{\text{carré}}}{0,208 r^3 \pi \sqrt{\pi}} \Rightarrow \frac{C^{\text{cercle}}}{C^{\text{carré}}} = \frac{1}{0,208 \sqrt{\pi} 2} = 1,356 \quad C^{\circ} / C^{\square} = 1,356$$

b) Rapport des angles de rotation des sections extrêmes.

$$\theta^{\text{cercle}} = \frac{C^{\text{cercle}} L}{GI_G} \quad \theta^{\text{carré}} = \frac{C^{\text{carré}} L}{GJ} \quad \text{avec } J = k_1 r^4 \pi^2$$

$$\frac{\theta^{\text{cercle}}}{\theta^{\text{carré}}} = \frac{C^{\text{cercle}} J}{C^{\text{carré}} I_G} = 1,356 \frac{0,141 r^4 \pi^2 2}{\pi^4} = 1,356 \times 0,141 \times 2\pi = 1,201 \quad \theta^{\circ} / \theta^{\square} = 1,201$$

# TORSION

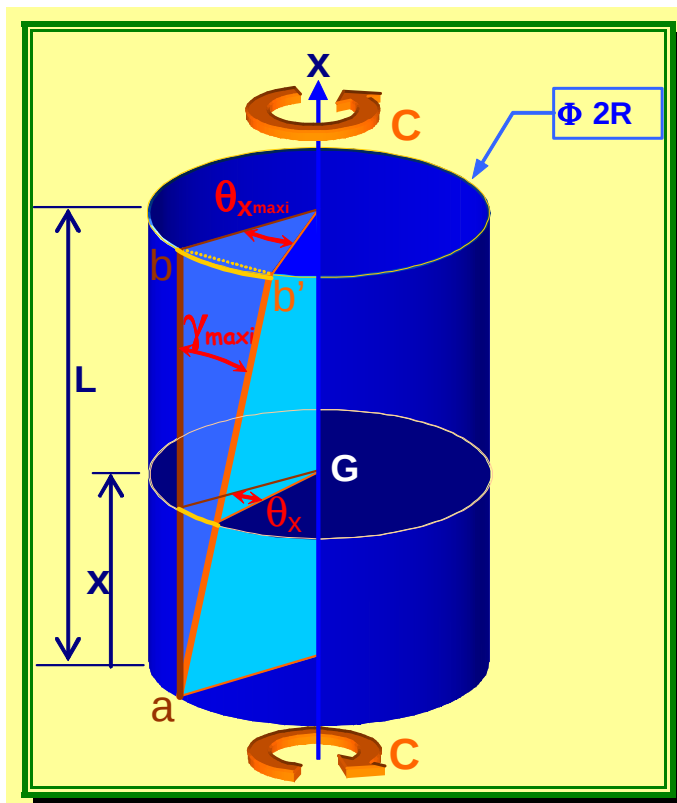
## 1. Définition :

Si, pour une poutre droite à section constante, le torseur de section se réduit à  $M_x$ , quel que soit la section droite, la poutre est soumise à de la torsion. On distingue suivant la forme de la section droite:

- ❑ La torsion de **COULOMB** pour les sections droites circulaires ou tubulaire.
- ❑ La torsion de **SAINT-VENANT** pour les sections droites non circulaires.

## 2. Torsion de COULOMB:

### 2.1. Contraintes en un point P appartenant à une section droite :

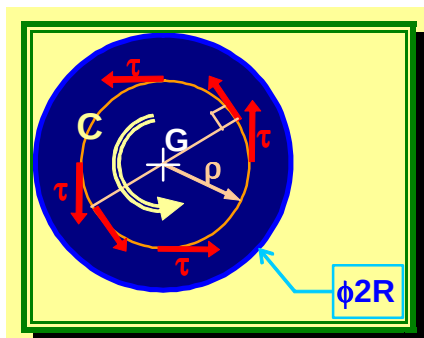


Après application du couple  $\bar{C}$  on constate que:

- ❑ La longueur et le diamètre du cylindre n'ont pas variés.
- ✚ Toutes les sections droites subissent une rotation  $\theta_x$  proportionnelle à  $x$ .
- ✚ La seule déformation est une distorsion  $\gamma$  des génératrices, tout à fait comparable à celle qu'on observe dans le cisaillement simple. On peut donc écrire, quel que soit le point de la section droite:

$$\sigma = 0$$

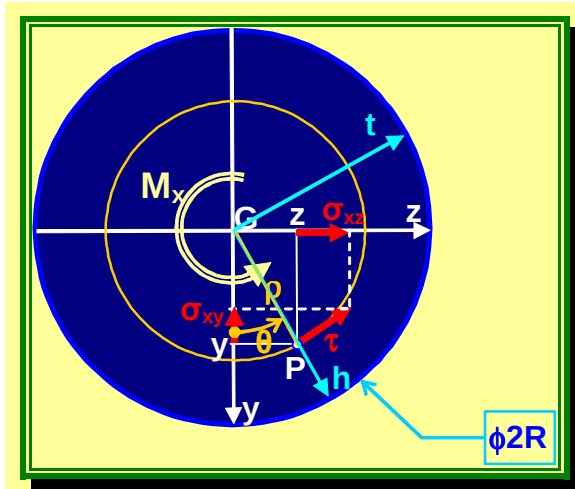
$$\tau = G\gamma \text{ d'après la loi de HOOKE}$$



Étant donnée la symétrie de révolution autour de l'axe de torsion, la contrainte tangentielle  $\tau$  est:

- 1°) tangente aux cercles de rayon polaire  $\rho$ .
- 2°) la même en des points situés sur un cercle de rayon polaire  $\rho$ .

Considérons un point P de la section droite, la contrainte  $\tau$  varie linéairement le long du rayon polaire :  $\tau = k\rho$ .



$$\begin{cases} y = \rho \cos \theta \\ z = \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = -\tau \sin \theta = -k\rho \sin \theta = -kz \\ \sigma_{xz} = \tau \cos \theta = k\rho \cos \theta = ky \end{cases}$$

Le vecteur contrainte en un point P doit satisfaire ces 6 équations (Voir cours module F112)

$$(1) \quad 0 = \iint_S \sigma_{xx} dA$$

$$(4) \quad M_x = \iint_S (y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy}) dA$$

$$(2) \quad 0 = \iint_S \sigma_{xy} dA$$

$$(5) \quad 0 = \iint_S z\sigma_{xx} dA$$

$$(3) \quad 0 = \iint_S \sigma_{xz} dA$$

$$(6) \quad 0 = -\iint_S y\sigma_{xx} dA$$

Les équations (1) (5) et (6) sont identiquement vérifiées car la composante normale  $\sigma_{xx} = \sigma = 0$

L'équation (2)  $0 = \iint_S \sigma_{xy} dA = \iint_S -kz dA = -k \iint_S z dA = -kQ_y^S = 0$  également vérifiée, de même pour (3) car le moment statique par rapport à des axes centraux est nul.

L'équation (4) nous permet de calculer la constante k :

$$M_x = \iint_S (y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy}) dA = k \iint_S (y^2 + z^2) dA = k \iint_S \rho^2 dA = kI_G \quad \Rightarrow \quad k = \frac{M_x}{I_G}$$

Le vecteur contrainte dans les axes xyz:

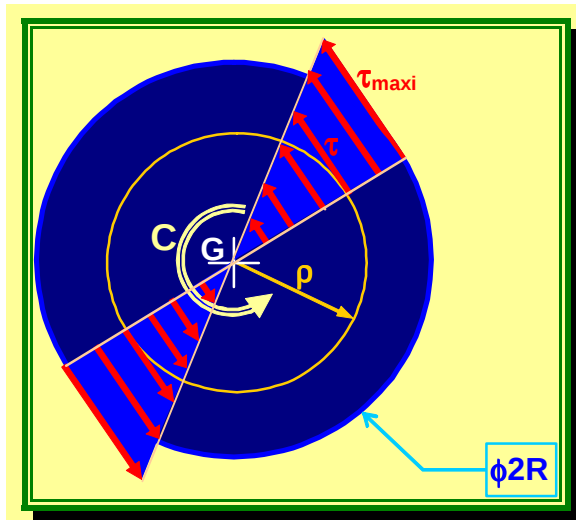
$$\vec{\Phi}_{x/xyz}^P \begin{cases} 0 \\ \sigma_{xy}^P = -\frac{M_x z^P}{I_G} \\ \sigma_{xz}^P = \frac{M_x y^P}{I_G} \end{cases}$$

s'écrit dans les axes xht:

$$\vec{\Phi}_{x/xht}^P \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \tau^P = \frac{M_x \rho^P}{I_G} \end{cases}$$

La contrainte maximum de torsion en des point P situés sur le contour de la section droite vaut:

$$\tau_{\max i} = \frac{M_x}{I_G} R$$



La distorsion maximum (à l'abscisse polaire  $\rho=R$ ) vaut:

$$\gamma_{\max i} \approx \tan \gamma_{\max i} = \frac{\widehat{bb'}}{ab} = \frac{R\theta_x^{\max i}}{L}$$

La distorsion à l'abscisse polaire  $\rho$  vaut:

$$\gamma = \frac{\rho\theta_x^{\max i}}{L}$$

Soit, en introduisant l'angle unitaire de torsion  $\theta_x' = \frac{\theta_x^{\max i}}{L}$

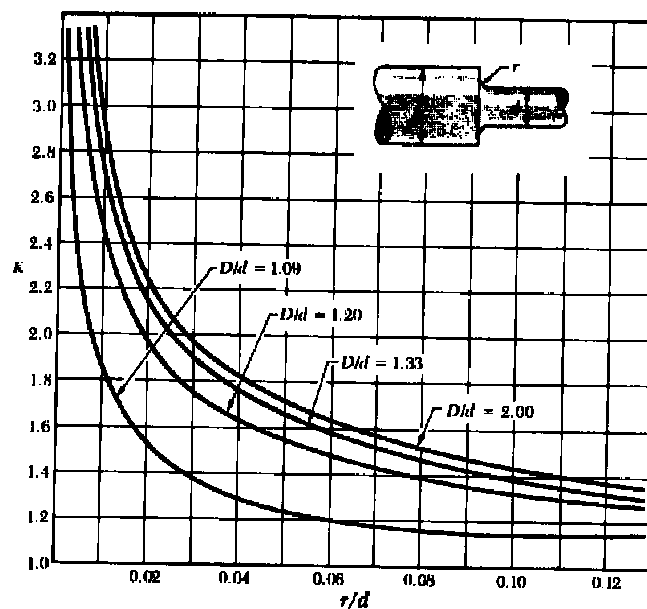
$$\gamma = \rho\theta_x'$$

La contrainte tangentielle  $\tau$  s'écrit:

$$\tau = G\theta_x'\rho$$

$$M_x = G\theta_x'I_G$$

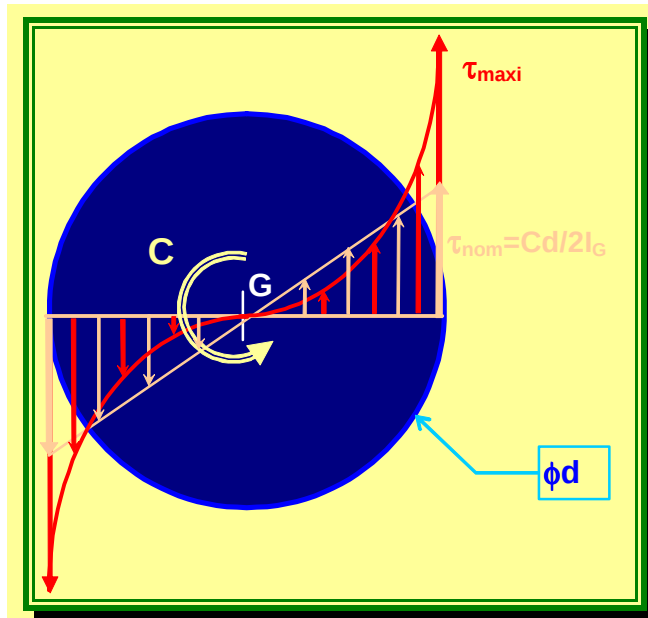
## 2.2. Concentration de contraintes. Influence de la variation brutale de la section droite:



Stress-concentration factors for fillets in circular shafts.

On constate que dans la section la plus faible et au voisinage du raccordement, la contrainte tangentielle réelle maximum de torsion subit une forte majoration par rapport à la valeur nominale fournie par la théorie des poutres.

La contrainte maximum réelle  $\tau_{\max i}$  de torsion se calcule à partir de la contrainte nominale maximum  $\frac{C}{I_G} \frac{d}{2}$  fournie par la théorie des poutres par la relation:



$$\tau_{\max i} = K \frac{C}{I_G} \frac{d}{2}$$

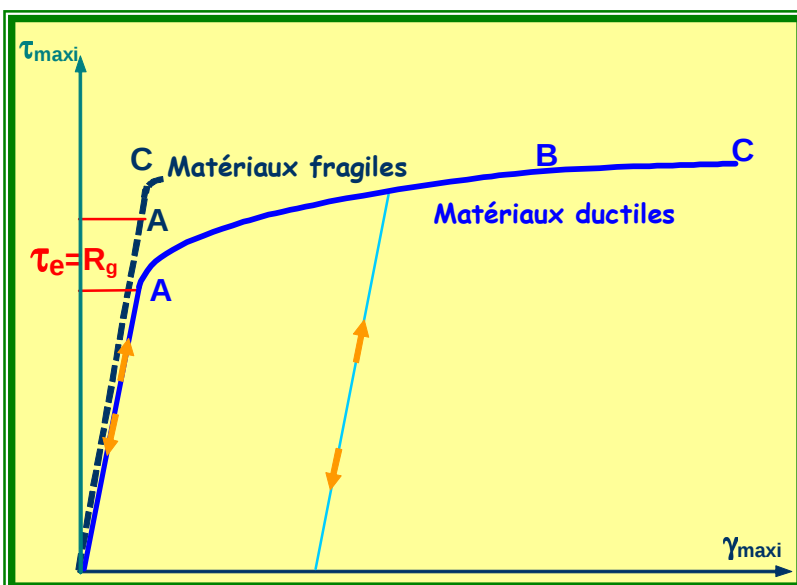
K est le facteur de concentration de contraintes.

### 2.3. Essai de torsion:

Cet essai n'est pas normalisé. On soumet une éprouvette, à section circulaire, à un couple croissant lentement jusqu'à la rupture de l'éprouvette.

On enregistre le diagramme couple C/rotation  $\theta_z$  de deux sections., que l'on rend

intrinsèque en divisant le couple par  $\frac{\pi D^3}{16}$  et la rotation par  $\frac{L}{R}$ .



Le diagramme est généralement composé d'une partie OA linéaire et réversible: la zone élastique, et d'une partie courbe ABC: la zone plastique où l'éprouvette subit des déformations irréversibles. La rupture intervenant au point C. On constate qu'il y a deux comportements très différents suivant que le matériau est **ductile** ou **fragile**.

Dans la zone élastique la

loi de proportionnalité entre la contrainte tangentielle maximum de torsion  $\tau_{\max i} = \frac{C}{I_G} R$  et

la distorsion  $\gamma_{\max i}$  des génératrices de l'éprouvette est la loi de **HOOKE** en torsion. Comme pour le cisaillement simple elle s'écrit:

$$\tau_{\max i} = G \gamma_{\max i}$$

où  $G$  est le module d'élasticité transversale ou module de **COULOMB** du matériau.

La contrainte tangentielle maximum de torsion à la fin de la zone élastique est la limite élastique au cisaillement du matériau. Elle se note  $\tau_e$  ou  $R_g$ .

N.B.

□ L'essai de torsion est le seul qui permette une détermination correcte du module de **COULOMB**  $G$  et de la limite élastique au cisaillement  $\tau_e$  du matériau.

□ On montre que le module de **YOUNG**  $E$ , le module de **COULOMB**  $G$ , et le coefficient de **POISSON**  $\nu$  sont, lorsque le matériau est isotrope, liés par la relation:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

□ On constate que pour un matériau fragile les limites élastiques en traction et cisaillement sont sensiblement les mêmes tandis que pour un matériau ductile:

$$\tau_e \approx \frac{\sigma_e}{2}$$

#### 2.4.. Rotations des sections droites:

Expression de la rotation d'une section droite d'abscisse  $z$ . De la relation  $C = G\theta'_x I_G$  on tire à abscisse  $x$ :

$$\theta_x = \frac{M_x}{GI_G} x$$

Expression de la rotation maximum (celle de la section d'abscisse  $L$ ):

$$\theta_x^{\max i} = \frac{M_x L}{GI_G}$$

#### 2.5. Coefficient de sécurité:

Il se calcule par la relation:

$$\alpha = \frac{\tau_e}{\tau_{\max i}}$$

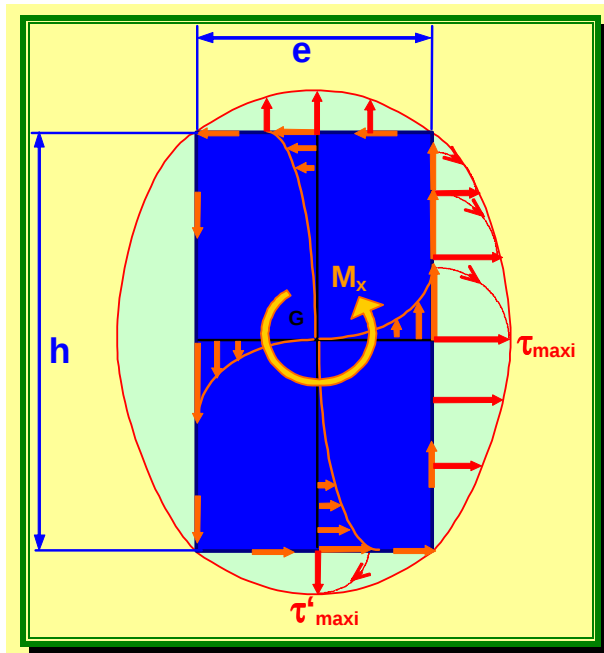
**N.B.** On impose quelquefois une condition de rigidité pour les arbres de transmission:

$$\theta'_x \leq 0.25^\circ / m$$

### 3. Torsion de SAINT-VENANT (sections droites non circulaires):

On constate expérimentalement que les sections droites ne restent pas planes après application du couple de torsion. Elles subissent un **gauchissement** axial qui peut entraîner, si celui-ci est empêché, l'apparition de contraintes normales dans la section droite. L'hypothèse de NAVIER-BERNOULLI n'est donc plus vérifiée, le principe de l'indépendance des effets des forces non plus, seule la théorie de l'élasticité peut résoudre le problème.

#### Torsion des Sections Rectangulaires :



La figure ci-contre permet de visualiser la répartition des contraintes tangentielles de torsion dans une barre à section rectangulaire.

On montre alors, en élasticité, que:

1°) La relation entre le moment de torsion et l'angle unitaire de torsion est:

$$\theta'_x = \frac{M_x}{GJ}$$

où J est le **moment d'inertie de torsion** de la section rectangulaire. Il se calcule par la relation suivante:

$$J = k_1 e^3 h$$

où  $k_1$  est une fonction du rapport  $h/e$  donné dans le tableau suivant:

| $h/e$ | 1     | 1.5   | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 8     | 10    | $\infty$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $k_1$ | 0.141 | 0.196 | 0.229 | 0.263 | 0.281 | 0.291 | 0.299 | 0.307 | 0.313 | 1/3      |
| $k_2$ | 0.208 | 0.231 | 0.246 | 0.267 | 0.282 | 0.291 | 0.299 | 0.307 | 0.313 | 1/3      |
| $k_3$ | 1.000 | 0.859 | 0.795 | 0.753 | 0.745 | 0.744 | 0.743 | 0.742 | 0.742 | 0.742    |

**N.B.** Lorsque la section droite est circulaire la relation entre le moment de torsion et l'angle unitaire de torsion est:

$$\theta'_x = \frac{M_x}{GI_G}$$

Le moment d'inertie de torsion est alors le **moment d'inertie polaire** du cercle ( $\frac{\pi D^4}{32}$ ).

2°) La contrainte maximum de torsion (au milieu des grands côtés du rectangle) vaut:

$$\tau_{\max i} = \frac{|M_x|}{k_2 e^2 h}$$

où  $k_2$  est une fonction du rapport  $h/e$  donné dans le tableau précédent.

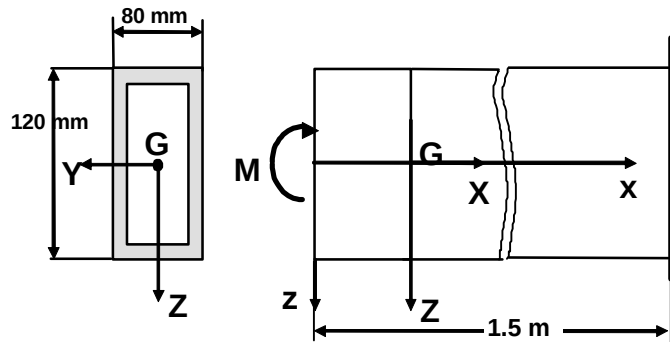
3°) La contrainte au milieu des petits côtés du rectangle vaut:

$$\tau'_{\max i} = k_3 \tau_{\max i}$$

où  $k_3$  est une fonction du rapport  $h/e$  donné dans le tableau précédent.

# FLEXION

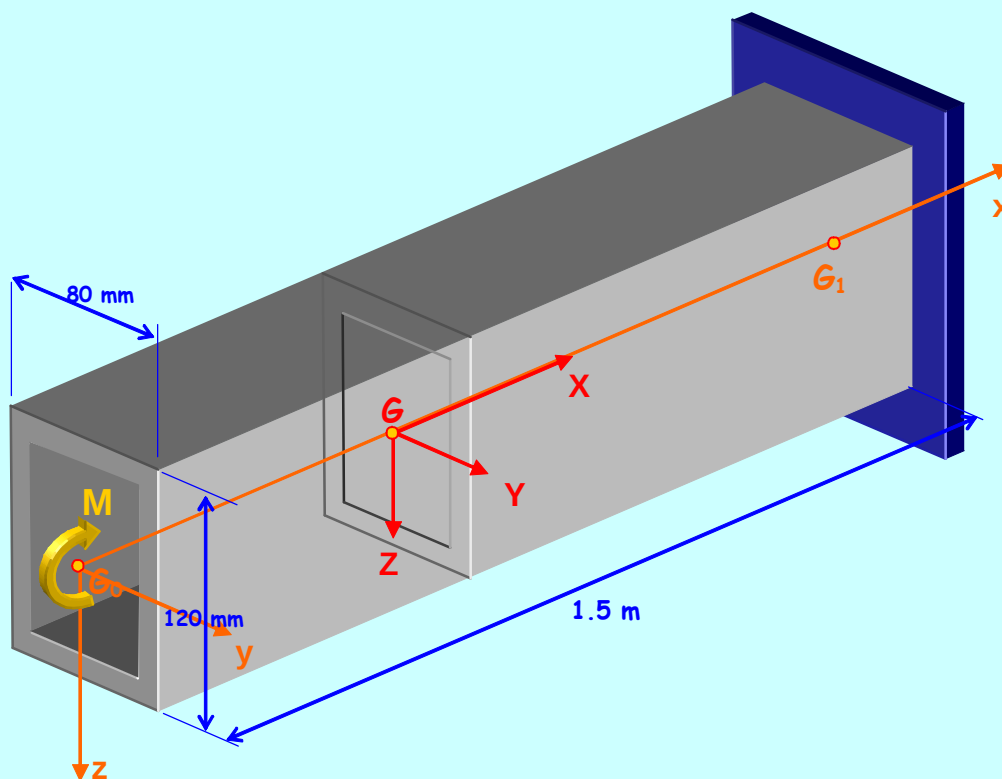
## PROBLÈME N°17



Considérons la poutre ci-contre soumise à un moment de flexion  $M$ . La section droite de la poutre est un tube rectangulaire en aluminium d'épaisseur 8 mm. Calculer la valeur du moment  $M$  que peut supporter la poutre, sachant que  $\sigma_e = \sigma'_e = 200$  MPa et que le coefficient de sécurité vaut 1.25. Calculer le rayon de courbure de la ligne moyenne sachant

que  $E=70$  GPa et la flèche maximum sachant que la longueur de la poutre est de 1.5 m.

## RÉPONSES N°17



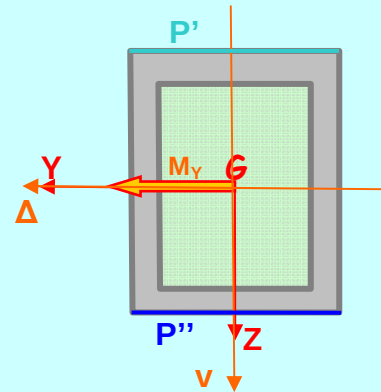
Le moment de flexion  $M_y = +M$  est constant tout au long de la poutre  $G_0G_1$ . Toutes les sections sont donc équidangereuses.

Considérons une section quelconque  $G$ . les axes  $Y$  et  $Z$  sont principaux d'inertie pour la section tubulaire  $G$  (axes de symétrie). Le moment de flexion  $M_Y = +M$  est porté par l'axe principal  $Y$  : Nous sommes donc en présence de flexion pure plane. L'axe neutre  $\Delta$  est donc confondu avec celui qui porte le moment fléchissant  $Y$ . L'ensemble des points  $P'$  et  $P''$  qui sont les plus éloignés de l'axe neutre ( $v_{\max}$ ) sont les points les plus contraints. Les points  $P'$  sont comprimés et  $P''$  tendus.

$$\sigma_{xx}^{P'} = \frac{M_Y}{I_Y} Z^{P'} = \left| \frac{M}{\frac{80 \cdot 120^3}{12} - \frac{64 \cdot 104^3}{12}} (-60) \right| \leq \frac{\sigma_e}{\alpha} ;$$

$$\sigma_{xx}^{P''} = \frac{M_Y}{I_Y} Z^{P''} = \frac{M}{\frac{80 \cdot 120^3}{12} - \frac{64 \cdot 104^3}{12}} 60 \leq \frac{\sigma_e}{\alpha}$$

$$\text{D'où : } \frac{M}{\frac{80 \cdot 120^3}{12} - \frac{64 \cdot 104^3}{12}} 60 \leq \frac{200}{1,25} \quad M \leq 14,7 \text{ kNm}$$



L'équation de la déformée est donnée par :  $w'' = -\frac{M_Y}{EI_Y} = -\frac{M}{EI_Y} \Rightarrow w''EI_Y = -M$

In tégrons 2fois :  $w''EI_Y = -M \quad w'EI_Y = -Mx + C_1$

$$wEI_Y = -\frac{Mx^2}{2} + C_1x + C_2$$

Conditions limites pour calculer les constantes d'intégration : en

$$G_1 : \begin{cases} x = l \rightarrow w = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{Ml^2}{2} \\ x = l \rightarrow w' = 0 \Rightarrow C_1 = Ml \end{cases}$$

L'équation de la déformée est donc :  $w = \frac{1}{EI_Y} \left( -\frac{Mx^2}{2} + Mlx - \frac{Ml^2}{2} \right)$

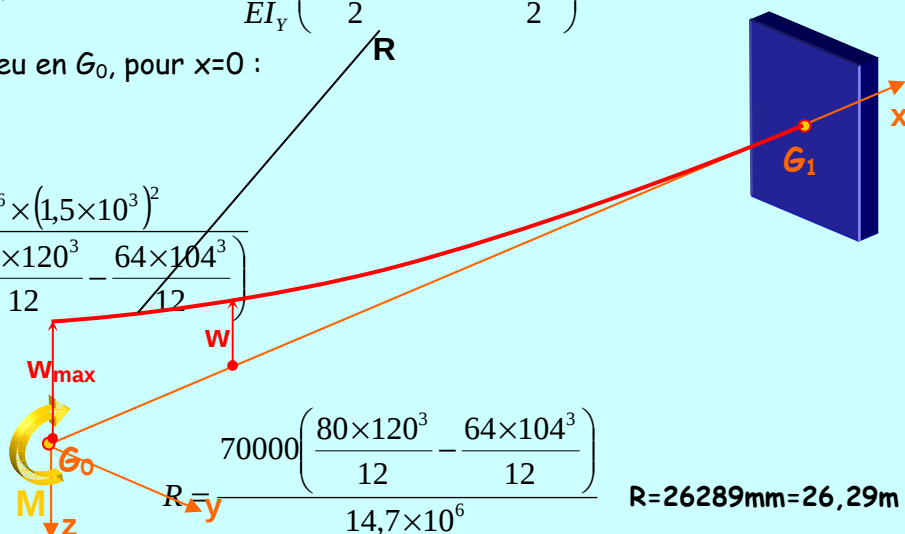
La flèche maximum a lieu en  $G_0$ , pour  $x=0$  :

$$w_{\max} = -\frac{Ml^2}{2EI_Y}$$

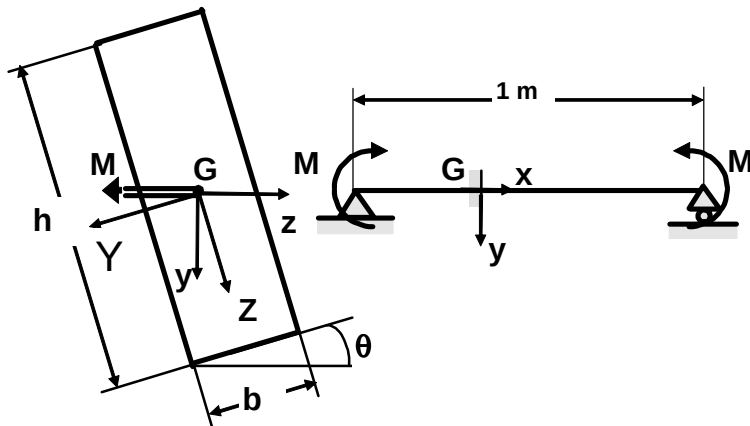
$$w_{\max} = -\frac{14,7 \times 10^6 \times (1,5 \times 10^3)^2}{2 \times 70000 \times \left( \frac{80 \times 120^3}{12} - \frac{64 \times 104^3}{12} \right)}$$

$$w_{\max} = -42,79 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{R} \approx w'' \Rightarrow R = \frac{EI_Y}{M} = \frac{70000 \left( \frac{80 \times 120^3}{12} - \frac{64 \times 104^3}{12} \right)}{14,7 \times 10^6} \quad R = 26289 \text{ mm} = 26,29 \text{ m}$$



## PROBLÈME N°18



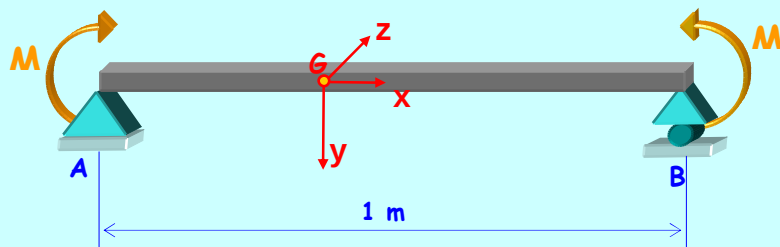
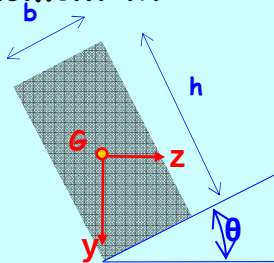
1°) La section droite de la poutre est un rectangle ( $b=30$  mm et  $h=90$  mm). La longueur de la poutre est de 1 m. Le module de YOUNG vaut 200 GPa. La contrainte normale maximum ne peut dépasser 120 MPa. Calculer :

- le moment fléchissant maximum quand  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 90^\circ$ .
- les flèches quand on

applique ces moments de flexion à chaque extrémité.

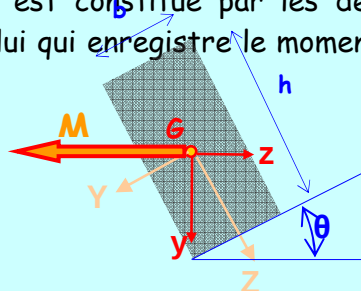
2°) La section droite est un UAP. Le moment de flexion appliqué vaut  $M = 5000$  Nm. Déterminer les dimensions du UAP qui convient dans chacun des trois cas ( $\theta=0^\circ, 30^\circ, 90^\circ$ ) si la contrainte normale maximale vaut 120 MPa.

## RÉPONSES N°18

1) Moment  $M$ 

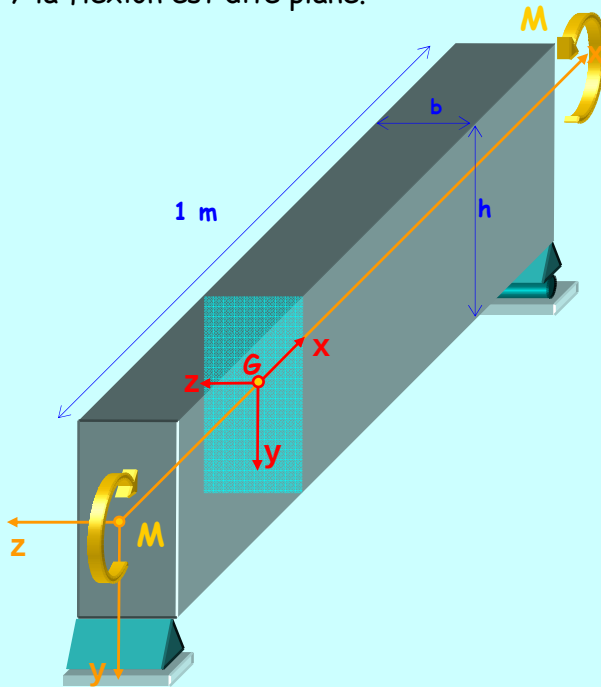
Le système est autoéquilibré, les réactions en A et B sont nulles. Dans la section G le Torseur de Section se réduit à une seule composante du moment suivant l'axe  $z$  :  $M_z = -M$ . Toutes les sections G sont donc équidangereuses. Nous sommes donc en présence de Flexion Pure.

Plaçons nous à une section quelconque G. La section étant rectangulaire, nous savons que le système d'axes principaux est constitué par les deux axes de symétrie. Orientons l'axe principal Y comme étant celui qui enregistre le moment d'inertie maximum, et déduisons l'axe Z par une rotation de  $+\pi/2$ .

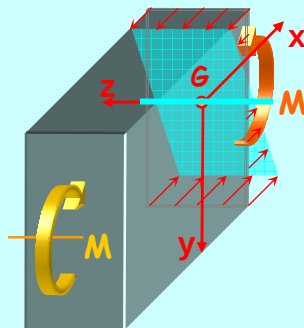


### a) $\theta = 0^\circ$

La poutre est dans ce cas placée sur champ. Le moment de flexion étant porté par l'axe principal Y la flexion est dite plane.



L'axe neutre  $\Delta$  est donc confondu avec celui qui porte le moment. C'est l'axe de rotation de la section.

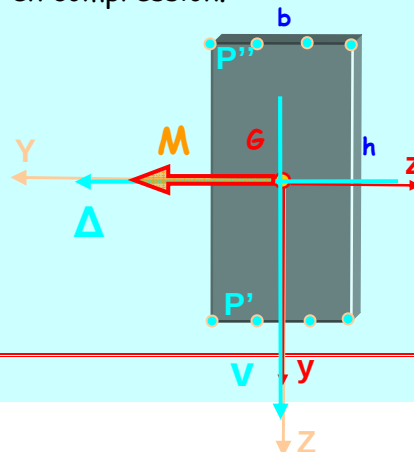


Les points les plus éloignés de l'axe neutre  $x_v^{\max i}$  sont les plus contraints.  
Les points P' sont les plus contraints en traction, et P'' en compression.

$$\sigma_{xx}^{P'} = \frac{M_Y}{I_Y} Z^{P'} = \frac{M}{b \cdot h^3} \left( \frac{h}{2} \right) \leq \sigma_e$$

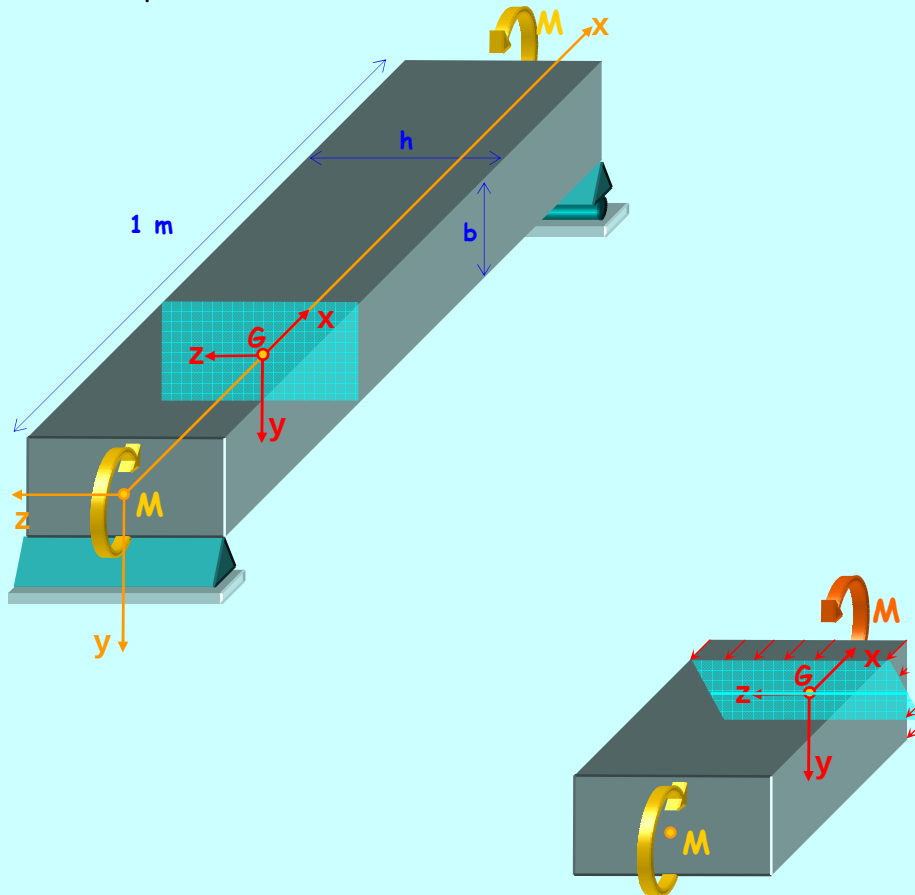
$$M \leq \frac{30 \times 90^2 \times 120}{6}$$

$$M = 4,86 \text{ kNm}$$

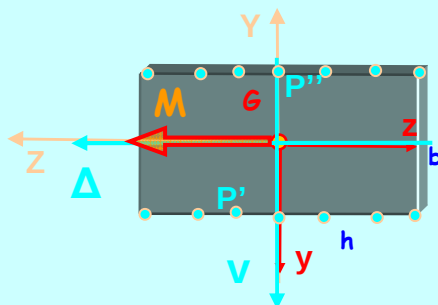


a)  $\theta = 90^\circ$ 

La poutre est dans ce cas placée sur plat. Le moment de flexion étant porté par l'axe principal Z la flexion est dite plane.



Le détail des calculs est similaire au cas précédent



$$\sigma_{xx}^{P'} = -\frac{M_z}{I_z} Y^{P'} = -\frac{M}{\frac{h.b^3}{12}} \left( -\frac{b}{2} \right) \leq \sigma_e$$

$$M \leq \frac{90 \times 30^2 \times 120}{6} \quad \mathbf{M = 1,62 \text{ kNm}}$$

**a)  $\theta = 30^\circ$** 

La poutre est maintenant inclinée de  $30^\circ$ .

Le moment de flexion  $M$  n'étant pas porté par l'axe principal  $Y$  ni par l'axe principal  $Z$  la flexion est dite déviée.

Afin de trouver les points les plus contraints, il nous faut rechercher l'axe neutre  $\Delta$ .

L'axe neutre qui est l'axe de rotation représente le lieu des points de la section où la contrainte normale  $\sigma_{xx}=0$ .

Dans les axes principaux son équation est :

$$Z = \frac{M_z I_Y}{M_Y I_Z} Y$$

Les composantes du moment sur les axes principaux sont :

$$M_Y = M \cos 30 \quad M_Z = -M \sin 30$$

D'où :

$$Z = \frac{-M \sin 30}{M \cos 30} \frac{bh^3}{hb^3} Y = -\tan 30 \left( \frac{h}{b} \right)^2 Y = -\tan 30 \left( \frac{90}{30} \right)^2 Y$$

$$\text{Equation de l'axe neutre : } Z = -5,196Y$$

$$\hat{\psi} = (\bar{Y}, \bar{\Delta}) = -79^\circ 1'$$

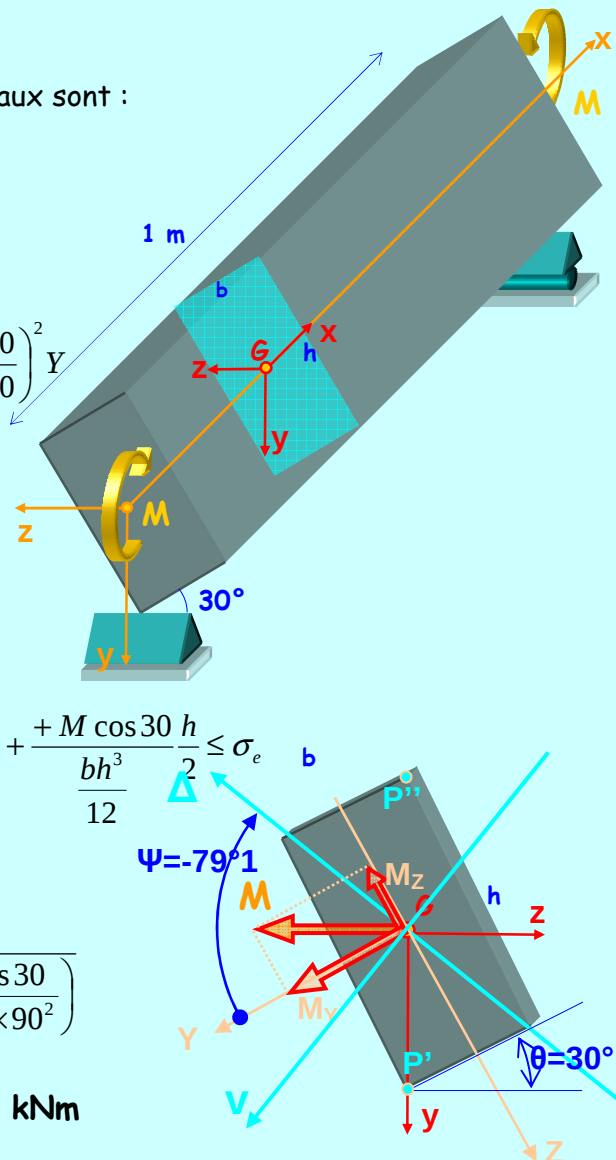
Deux points les plus contraints  $P'$ ,  $P''$ .

$$\sigma_{xx}^{P'} = -\frac{M_z}{I_z} Y^{P'} + \frac{M_y}{I_y} Z^{P'} \leq \sigma_e \quad -\frac{-M \sin 30}{\frac{hb^3}{12}} \frac{b}{2} + \frac{M \cos 30}{\frac{bh^3}{12}} \frac{h}{2} \leq \sigma_e$$

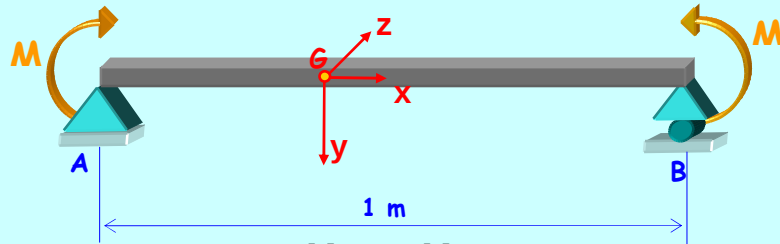
$$M \leq \frac{\sigma_e}{6 \left( \frac{\sin 30}{hb^2} + \frac{\cos 30}{bh^2} \right)} \quad M \leq \frac{120}{6 \left( \frac{\sin 30}{90 \times 30^2} + \frac{\cos 30}{30 \times 90^2} \right)}$$

$$M = 2,05 \text{ kNm}$$

C'est une valeur comprise entre les deux extremes des cas précédents.



Flèche :

b)  $\theta = 0^\circ$ 

L'équation de la déformée est donnée par :  $v'' = \frac{M_z}{EI_z} = -\frac{M}{EI_z} \Rightarrow v''EI_z = -M$

In tégrons 2 fois :  $v''EI_z = -M$

$$v'EI_z = -Mx + C_1$$

$$vEI_z = \frac{-Mx^2}{2} + C_1x + C_2$$

Conditions limites pour calculer les constantes d'intégration : en :  $\begin{cases} x = 0 \rightarrow w = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ x = l \rightarrow w = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{Ml}{2} \end{cases}$

L'équation de la déformée est donc :  $v = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{-Mx^2}{2} + \frac{Ml}{2}x \right)$

La flèche maximum a lieu en  $x = l/2$  :  $v_{\max} = \frac{Ml^2}{8EI_z} = \frac{4,86 \cdot 10^6 \times (1 \cdot 10^3)^2 \times 12}{8 \times 200 \cdot 10^3 \times 30 \times 90^3}$   **$v_{\max} = 1,67 \text{ mm}$**

b)  $\theta = 90^\circ$ 

Le calcul de la flèche est similaire au cas précédent :

$$w_{\max} = -\frac{Ml^2}{8EI_y} = -\frac{1,62 \cdot 10^6 \times (1 \cdot 10^3)^2 \times 12}{8 \times 200 \cdot 10^3 \times 90 \times 30^3}$$
  **$w_{\max} = 5 \text{ mm}$**

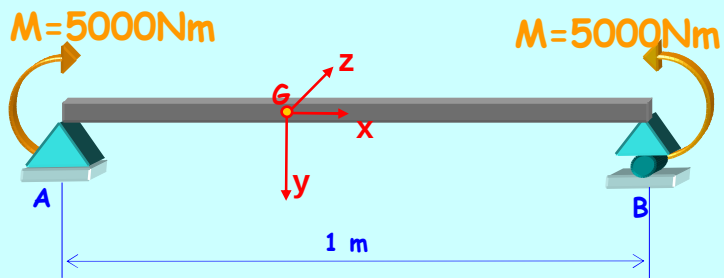
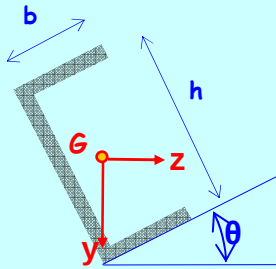
b)  $\theta = 30^\circ$ 

Nous appliquons le principe de superposition :  $f_{\max} = \sqrt{v^2 + w^2}$

$$f_{\max} = \frac{l^2}{8E} \sqrt{\left( \frac{M_y}{I_y} \right)^2 + \left( \frac{M_z}{I_z} \right)^2} \quad M_y = M \cos 30 \quad M_z = -M \sin 30$$

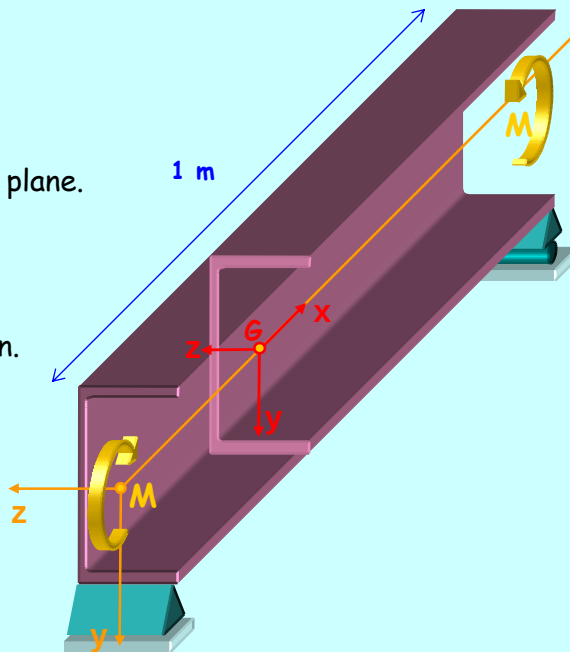
$$f_{\max} = \frac{(1 \cdot 10^3)^2}{8 \times 200 \cdot 10^3} \sqrt{\left( \frac{2,05 \cdot 10^6 \cos 30 \times 12}{30 \times 90^3} \right)^2 + \left( \frac{2,05 \cdot 10^6 \sin 30 \times 12}{90 \times 30^3} \right)^2}$$
  **$f_{\max} = 3,22 \text{ mm}$**

## 2) UAP :

a)  $\theta = 0^\circ$ 

Le moment de flexion étant porté par l'axe principal Y la flexion est plane.

L'axe neutre  $\Delta$  est donc confondu avec celui qui porte le moment. C'est l'axe de rotation de la section.

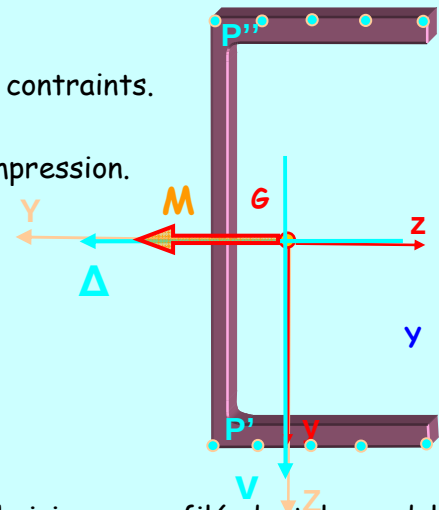


Les points les plus éloignés de l'axe neutre  $x_v^{\max}$  sont les plus contraints.

Les points P' sont les plus contraints en traction, et P'' en compression.

$$\sigma_{xx}^{P'} = \frac{M_Y}{I_Y} Z^{P'} = \frac{M}{I_Y} Z^{P'} \leq \sigma_e$$

$$\frac{I_Y}{Z^{P'}} \geq \frac{M}{\sigma_e} \quad \frac{I_Y}{Z^{P'}} \geq \frac{5000 \cdot 10^3}{120} \quad \frac{I_Y}{Z^{P'}} \geq 41,66 \text{ cm}^3$$



En se référant à l'annexe des profils UAP nous devons choisir un profilé dont le module d'inertie de flexion est supérieur à 41,66 cm<sup>3</sup>

Le choix du profilé sera **UAP100** dont le module d'inertie de flexion est 41,9 cm<sup>3</sup>.

### a) $\theta = 90^\circ$

Le moment de flexion étant porté par l'axe principal Z la flexion est plane.

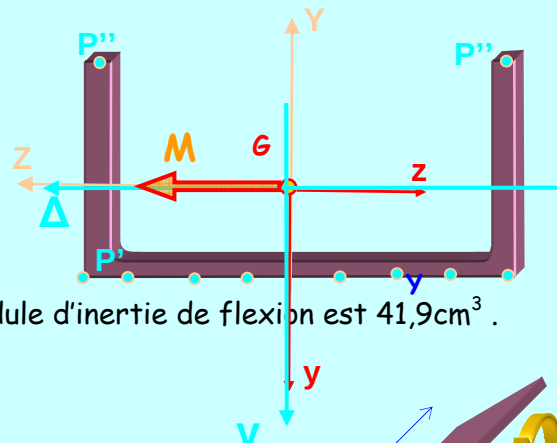
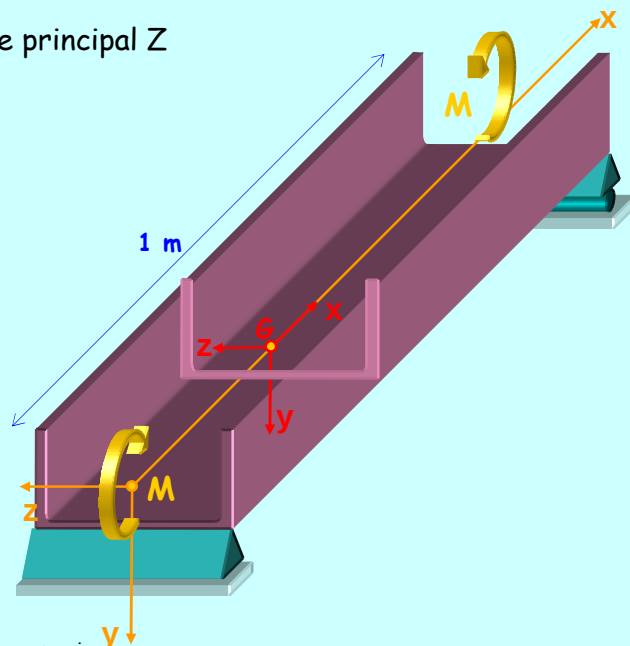
L'axe neutre  $\Delta$  est donc confondu avec celui qui porte le moment. C'est l'axe de rotation de la section.

Les points les plus éloignés de l'axe neutre  $x_v^{\max}$  sont les plus contraints. Les points P' sont les plus contraints en traction, et P'' en compression.

$$\sigma_{xx}^{P''} = -\frac{M_z}{I_z} Y^{P''} = \frac{M}{I_z} Y^{P''} \leq \sigma_e$$

$$\frac{I_z}{Z^{P''}} \geq \frac{M}{\sigma_e} \quad \frac{I_z}{Z^{P''}} \geq 41,66 \text{ cm}^3$$

Le choix du profilé sera **UAP250** dont le module d'inertie de flexion est  $41,9 \text{ cm}^3$ .

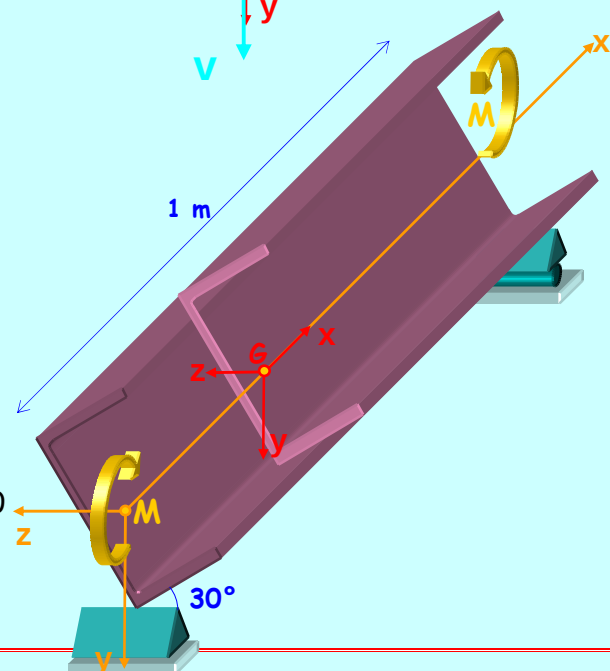


### a) $\theta = 30^\circ$

Le profilé est maintenant incliné de  $30^\circ$ .

Nous sommes en présence d'une flexion déviée car le moment n'est plus porté par un axe principal d'inertie.

Nous savons que le choix devra être compris entre les UAP100 et UAP250 compte tenu des cas étudiés précédemment.



Faisons le choix d'un UAP175 :

L'axe neutre qui est l'axe de rotation représente le lieu des points de la section où la contrainte normale  $\sigma_{xx}=0$ .

Dans les axes principaux son équation est :

$$Z = \frac{M_z}{M_y} \frac{I_y}{I_z} Y$$

Les composantes du moment sur les axes principaux sont :

$$M_y = M \cos 30 \quad M_z = -M \sin 30$$

Les valeurs des moments d'inertie principaux sont donnés en annexe.

$$Z = \frac{-M \sin 30}{M \cos 30} \frac{I_y}{I_z} Y = -\tan 30 \frac{1272}{126,4} Y$$

$$\text{Equation de l'axe neutre : } Z = -5,81Y$$

$$\hat{\psi} = (\vec{Y}, \vec{\Delta}) = -80^\circ 23$$

Deux points les plus contraints  $P'$ ,  $P''$  :

$$P'_{/YZ} \begin{cases} 21,2mm \\ 87,5mm \end{cases} \quad P''_{/YZ} \begin{cases} -48,8mm \\ -87,5mm \end{cases}$$

$P'$  est en traction, et  $P''$  en compression. Le matériau étant symétrique le point  $P''$  est le plus contraint

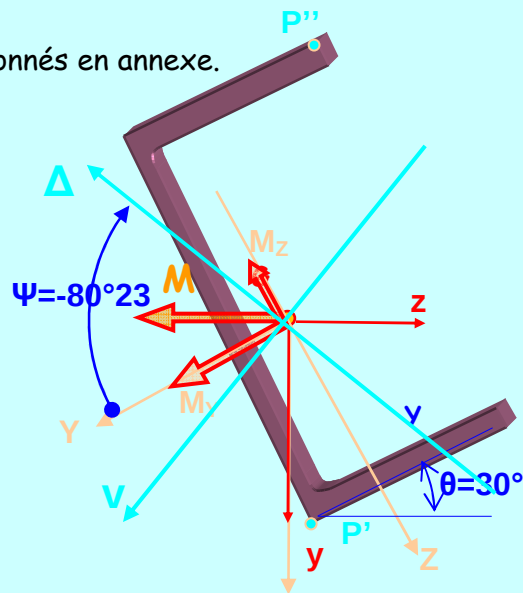
$$\sigma_{xx}^{P''} = \left| -\frac{M_z}{I_z} Y^{P''} + \frac{M_y}{I_y} Z^{P''} \right| \leq \sigma_e \quad \left| -\frac{5000 \cdot 10^3 \sin 30}{126,4 \cdot 10^4} (-48,8) + \frac{5000 \cdot 10^3 \cos 30}{1272 \cdot 10^4} (-87,5) \right| \leq 120$$

$$\sigma_{xx}^{P''} = 126 \leq 120 \quad \text{Le profilé ne convient pas.}$$

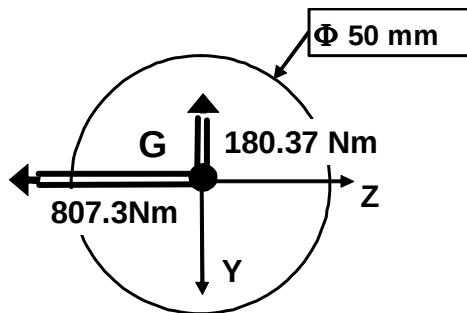
Reprenons les calculs avec le profilé UAP200. L'approche est identique :

$$\sigma_{xx}^{P''} = \left| -\frac{M_z}{I_z} Y^{P''} + \frac{M_y}{I_y} Z^{P''} \right| \leq \sigma_e \quad \left| -\frac{5000 \cdot 10^3 \sin 30}{169,7 \cdot 10^4} (-52,8) + \frac{5000 \cdot 10^3 \cos 30}{1946 \cdot 10^4} (-1005) \right| \leq 120$$

La condition est vérifiée, **Choix du profilé : UAP200**



## PROBLÈME N° 19



Un arbre de diamètre 50 mm est soumis à un moment de flexion dont les composantes dans G,I,II sont :

$$M_y = -180.37 \text{ Nm}$$

$$M_z = -807.3 \text{ Nm}$$

Calculer :

1°) la position de l'axe neutre de flexion.

2°) Les contraintes normales extrêmes.

## RÉPONSES N°19

Le moment résultant  $M_f$  est porté par un axe principal d'inertie (Pour une section circulaire, tout diamètre étant axe de symétrie est principal d'inertie). La flexion est donc plane. La position de l'axe neutre est donné par l'angle  $\alpha$  :

$$\alpha = \text{Arc tan}\left(\frac{180,37}{807,3}\right) = 12^\circ 6'$$

$$\sigma_{xx}^P = \frac{M_{\Delta}}{I_{\Delta\Delta}} x_v^P = \frac{-\sqrt{180,37^2 + 807,31^2} \cdot 10^3}{\pi \times 50^4} 64 \times x_v^P$$

$$P'_{/\Delta v} \begin{cases} 0 \\ -25\text{mm} \end{cases} \quad P''_{/\Delta v} \begin{cases} 0 \\ 25\text{mm} \end{cases}$$

Le point P' est en traction :

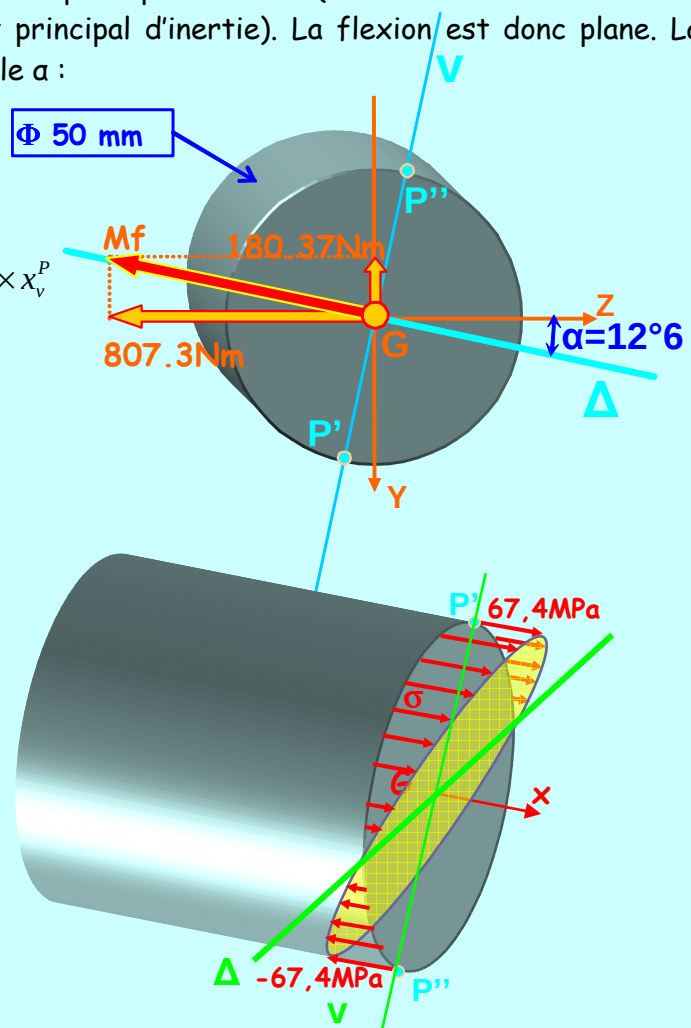
$$\sigma_{xx}^{P'} = \frac{-\sqrt{180,37^2 + 807,31^2} \cdot 10^3}{\pi \times 50^4} 64 \times (-25)$$

$$\sigma_{xx}^{P'} = 67,4 \text{ MPa}$$

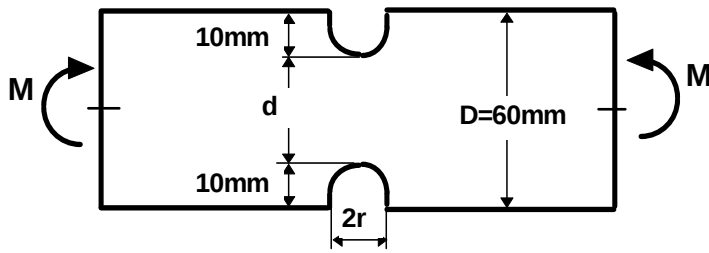
Le point P'' est en compression :

$$\sigma_{xx}^{P''} = \frac{-\sqrt{180,37^2 + 807,31^2} \cdot 10^3}{\pi \times 50^4} 64 \times (25)$$

$$\sigma_{xx}^{P''} = -67,4 \text{ MPa}$$



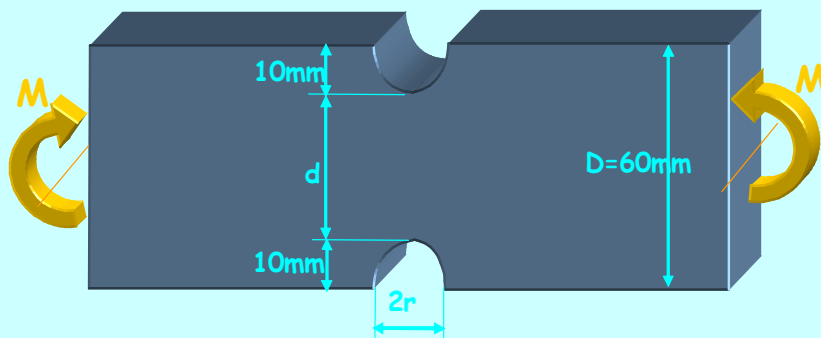
## PROBLÈME N°20



Une barre dont la largeur est de 60 mm et l'épaisseur de 9 mm est entaillée comme indiquée sur la figure ci contre. Elle est soumise à un moment de flexion de 180 Nm. Calculer le rayon r pour que la contrainte normale maximum ne

dépasse pas 150 MPa.

## RÉPONSES N°20



Il y a concentration de contraintes compte tenu du changement brusque de la section.

Nous devons chercher le facteur de concentration K à l'aide des abaques fournis en annexe.

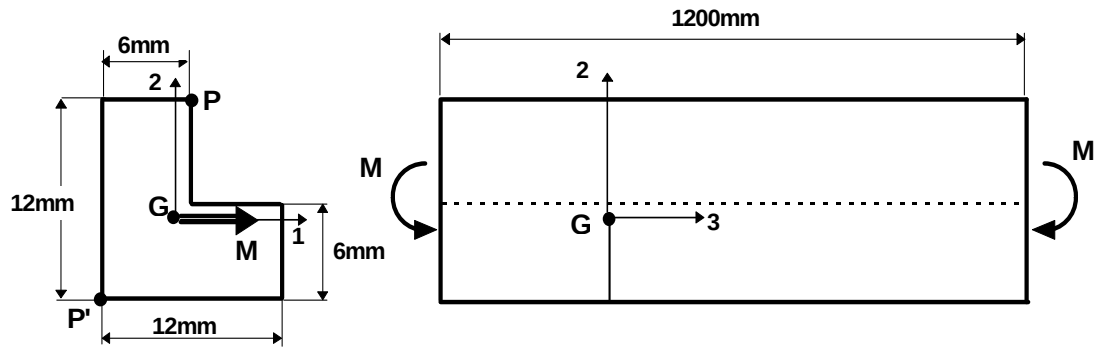
La contrainte normale maxi dans la section la plus faible, nous est donnée par :

$$\sigma_{xx} = \frac{180 \cdot 10^3}{\frac{9 \times 40^3}{12}} \times 20 = 75 \text{ MPa} = \sigma_{nom}$$

$$\sigma_{max i} = K \sigma_{nom} \quad \text{d'où la valeur de K : } K = \frac{150}{75} = 2$$

$$\text{A l'aide de l'annexe 3 : } K = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{D}{d} = \frac{60}{40} = 1,5 \\ \frac{r}{d} = 0,12 \end{cases} \quad r = 4,8 \text{ mm} \quad \mathbf{r = 4,8 \text{ mm}}$$

## PROBLÈME N°21



Une barre est soumise à deux couples de flexion  $M$  à ses extrémités.

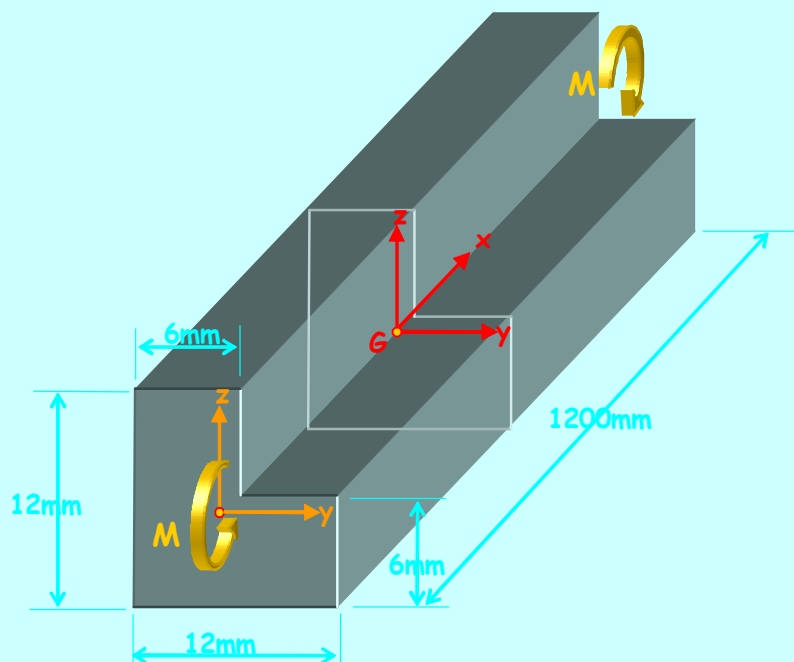
1°) Etude de la section droite. Déterminer:

- La position du centre de gravité de la section droite.
- Les moments et produit d'inertie de la section dans le repère  $(G, y, z)$ .
- Les moments d'inertie principaux et la position des axes principaux de la section.

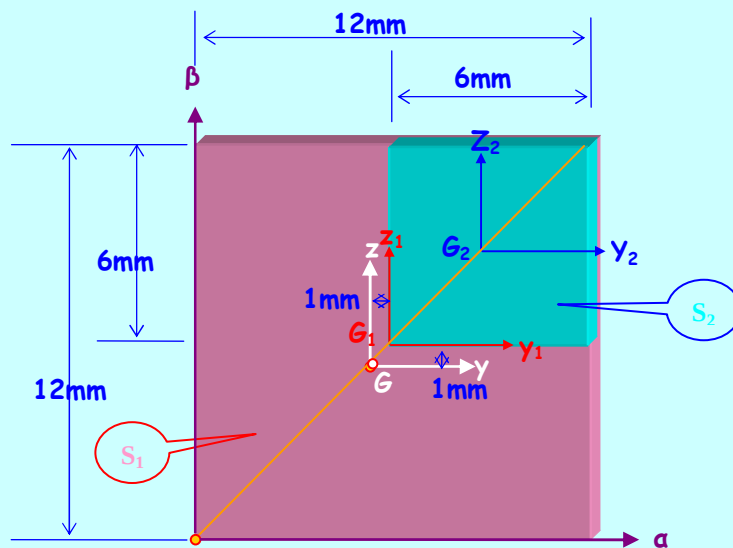
2°) Etude de la flexion.

- Déterminer la position angulaire de l'axe neutre.
- Mettre en place sur la figure le point  $P$  le plus tendu et le point  $P'$  le plus comprimé et donner leurs coordonnées dans le repère  $(G, Y, Z)$ .
- Calculer la valeur du moment  $M$  que l'on peut appliquer sans que les contraintes maximum ne dépassent  $+75$  MPa en traction (au point  $P$ ) et  $-90$  MPa en compression (au point  $P'$ ).

## RÉPONSES N°21



### 1°) Etude de la section droite



Décomposons la surface initiale  $S$  en deux surfaces carrées  $S_1, S_2$ , et remarquons que la surface  $S$  possède un axe de symétrie.

#### a) La position du centre de gravité de la section droite.

En se referent au cours sur les inerties:

$$G_{1/\alpha\beta} \begin{vmatrix} 6 \\ 6 \end{vmatrix} \quad G_{2/\alpha\beta} \begin{vmatrix} 9 \\ 9 \end{vmatrix} \quad A_1=144\text{mm}^2 \quad A_2=36\text{mm}^2$$

$$X\alpha_G = \frac{X\alpha_{G1}A_1 + X\alpha_{G2}A_2}{A_1 + A_2} \Rightarrow \frac{6 \times 144 + 9 \times 36}{144 + 36} \quad G_{/\alpha\beta} \begin{vmatrix} 5\text{mm} \\ 5\text{mm} \end{vmatrix}$$

#### b) Les moments et produit d'inertie de la section dans le repère $(G, y, z)$ .

| $S_i$                    | $S_1$  | $S_2$    |
|--------------------------|--------|----------|
| $A_i(\text{mm}^2)$       | 144    | 36       |
| $G_i/y_z(\text{mm})$     | 1      | 4        |
|                          | 1      | 4        |
| $I_{yiy_i}(\text{mm}^4)$ | $12^3$ | $6^4/12$ |
| $I_{zizi}(\text{mm}^4)$  | $12^3$ | $6^4/12$ |
| $I_{yizi}(\text{mm}^4)$  | 0      | 0        |

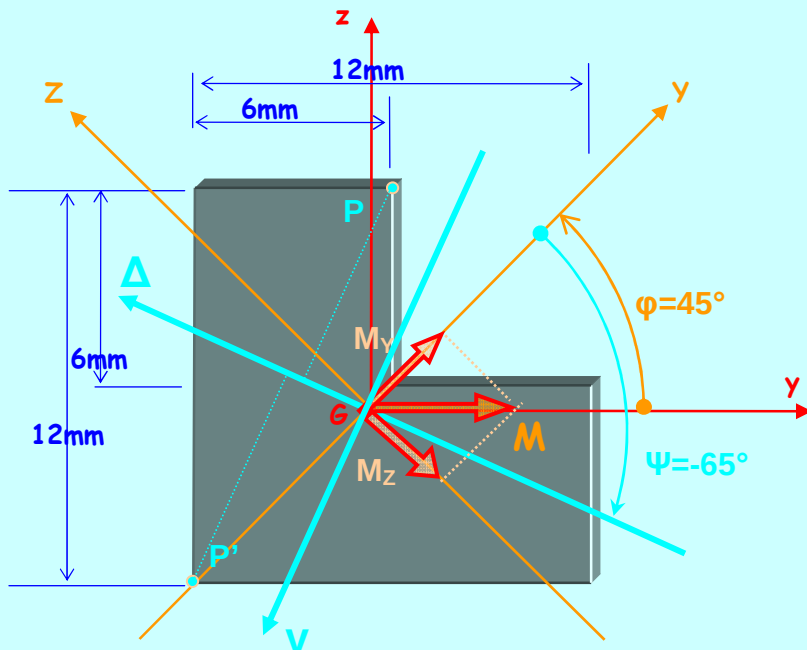
$$\begin{cases} I_{yy}^S = I_{yy}^{S_1} + I_{yy}^{S_2} \\ I_{yz}^S = I_{yz}^{S_1} + I_{yz}^{S_2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} I_{yy}^{Si} = I_{y_i y_i}^{S_i} + z_{Gi}^2 A_i \\ I_{yz}^{Si} = I_{y_i z_i}^{S_i} + y_{Gi} z_{Gi} A_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{yy}^S = 1188 \text{ mm}^4 \\ I_{zz}^S = 1188 \text{ mm}^4 \\ I_{yz}^S = -432 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

c) Les moments d'inertie principaux et la position des axes principaux de la section.

$$\hat{\varphi} = 45^\circ = (\vec{y}, \vec{Y}) \text{ car axe de symétrie}$$

$$I_Y^Z = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4I_{yz}^2} \quad \begin{cases} I_Z = 756 \text{ mm}^4 \\ I_Y = 1620 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

## 2°) Etude de la flexion.



L'axe neutre qui est l'axe de rotation représente le lieu des points de la section où la contrainte normale  $\sigma_{xx}=0$ .

Son équation est : 
$$Z = \frac{M_z}{M_y} \frac{I_y}{I_z} Y$$

Les composantes du moment sur les axes principaux sont :

$$M_Y = M \cos 45 \quad M_Z = -M \sin 45$$

Equation de l'axe neutre : 
$$Z = \frac{-M \sin 45}{M \cos 45} \frac{1620}{756} Y = -\frac{1620}{756} Y \quad Z = -2,14Y$$

$$\hat{\psi} = (\vec{Y}, \vec{\Delta}) = -65^\circ$$

Deux points les plus contraints P, P' :  $P_{/yz} \begin{cases} 1mm \\ 7mm \end{cases}$   $P'_{/yz} \begin{cases} -5mm \\ -5mm \end{cases}$

$P_{/YZ} \begin{cases} 5,66mm \\ 4,24mm \end{cases}$   $P'_{/YZ} \begin{cases} -7,07mm \\ 0 \end{cases}$  en utilisant les formules de rotation :  $\begin{cases} Y = y \cos 45 + z \sin 45 \\ Z = -y \sin 45 + z \cos 45 \end{cases}$

Le point P est le plus tendu :

$$\sigma_{xx}^P = -\frac{M_z}{I_z} Y^P + \frac{M_y}{I_y} Z^P \leq \sigma_e \quad -\frac{M \sin 45}{756} 5,66 + \frac{M \cos 45}{1620} 4,24 \leq 75$$

Donc, pour qu'en traction la contrainte ne dépasse pas 75 MPa , il faut que :

$$\mathbf{M=10497 \text{ Nmm}}$$

Le point P' est le plus comprimé :

$$\sigma_{xx}^{P'} = \left| -\frac{M_z}{I_z} Y^{P'} + \frac{M_y}{I_y} Z^{P'} \right| \leq \sigma_e \quad \left| -\frac{M \sin 45}{756} (-7,07) \right| \leq 90$$

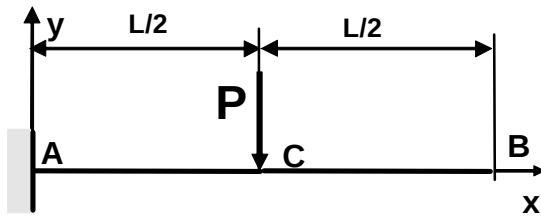
Donc, pour qu'en compression la contrainte ne dépasse pas 90 MPa , il faut que :

$$\mathbf{M=13610 \text{ Nmm}}$$

Conclusion :

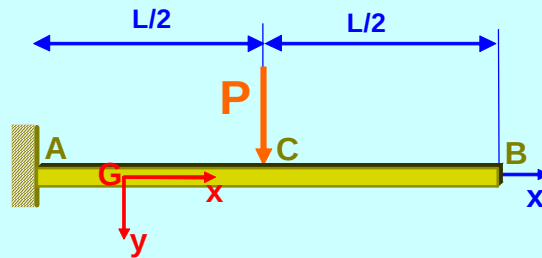
Le moment maximum que l'on peut appliquer est le moment le plus petit **M=10,5 kNm** car il respecte les conditions limites en traction et en compression alors que si on avait pris M=13,60 kNm, la condition en traction n'aurait pas été respectée.

## PROBLÈME N°22



Calculez l'équation de la déformée. En déduire la flèche maximum.

## RÉPONSES N°22



Pour calculer l'équation de la déformée, nous allons utiliser l'équation différentielle :  $v'' = \frac{M_z}{EI_z}$

Il faut donc chercher le Torseur de Section en G.

**Zone AC :**  $0 < x < \frac{L}{2}$

**Zone CB :**  $\frac{L}{2} < x < L$

$$M_z = P\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

$$M_z = 0$$

$$v''EI_z = -Px + \frac{PL}{2}$$

$$v''EI_z = 0$$

$$v'EI_z = -\frac{Px^2}{2} + \frac{PL}{2}x + C_1$$

$$v'EI_z = C_3$$

$$vEI_z = -\frac{Px^3}{6} + \frac{PLx^2}{4} + C_1x + C_2$$

$$vEI_z = C_3x + C_4$$

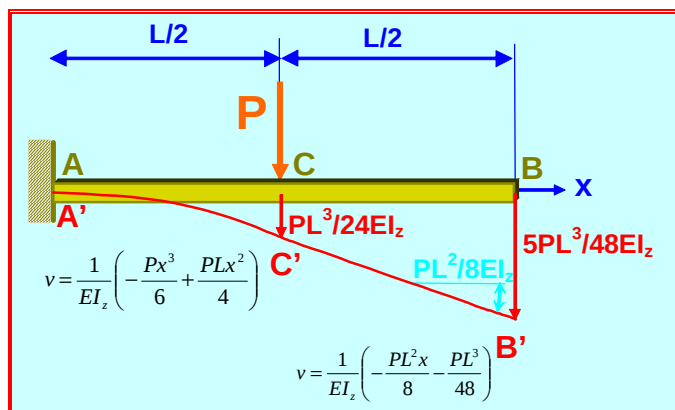
Afin de déterminer les constantes d'intégrations, écrivons les conditions aux limites en A pour la zone AC et la continuité des flèches et des pentes en C pour les 2 zones.

$$\text{En A : } \begin{cases} x=0 \rightarrow v=0 \Rightarrow C_2=0 \\ x=0 \rightarrow v'=0 \Rightarrow C_1=0 \end{cases} \quad \text{En C : } \begin{cases} x=\frac{L}{2} \rightarrow v_{\text{zoneAC}} = v_{\text{zoneCB}} \Rightarrow C_4 = -\frac{PL^3}{48} \\ x=\frac{L}{2} \rightarrow v'_{\text{zoneAC}} = v'_{\text{zoneCB}} \Rightarrow C_3 = \frac{PL^2}{8} \end{cases}$$

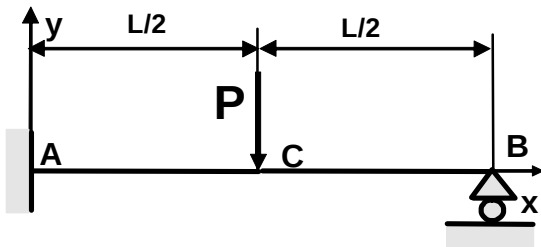
Les équations de la déformée sont donc : **Zone AC** :  $v = \frac{1}{EI_z} \left( -\frac{Px^3}{6} + \frac{PLx^2}{4} \right)$  une cubique

$$\text{Zone CB : } v = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{PL^2x}{8} - \frac{PL^3}{48} \right) \text{ une droite.}$$

La flèche maxi a lieu en B sur la zone CB pour  $x=L$  :  $v_{\text{max}}^B = \frac{5PL^3}{48EI_z}$

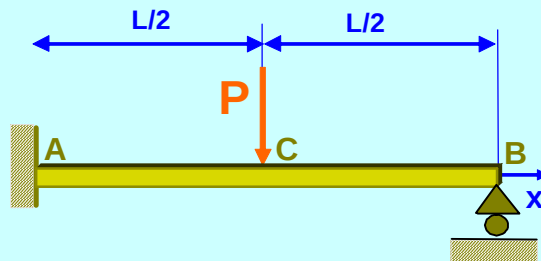


## PROBLÈME N°23



Déterminez les actions d'appuis en A et B.

## RÉPONSES N°23

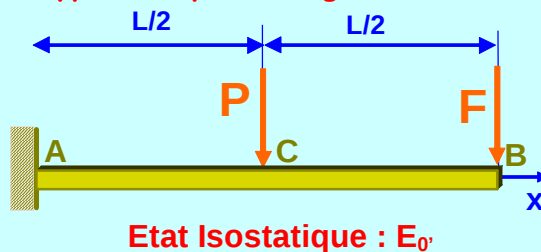
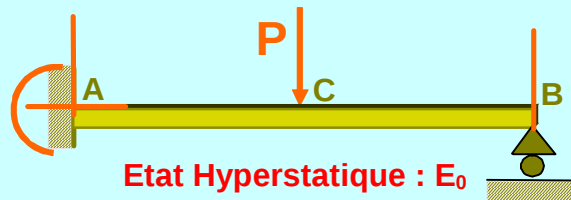


Nous sommes en présence d'un cas hyperstatique externe de degré 1, car le problème étant plan, nous disposons de 3 équations de statique et avons à déterminer 4 inconnues, 2 réactions en A ainsi qu'un moment et une réaction en B.

## Détermination de l'hyperstaticité :

- Inconnues : 4
  - 3 réactions  $F_{AH}$ ,  $F_{AV}$  et  $F_{BV}$
  - 1 inconnue moment  $M_A$

$H = i - 3n = 4 - 3 = 1 \Rightarrow$  **Hyperstatique de degré 1**



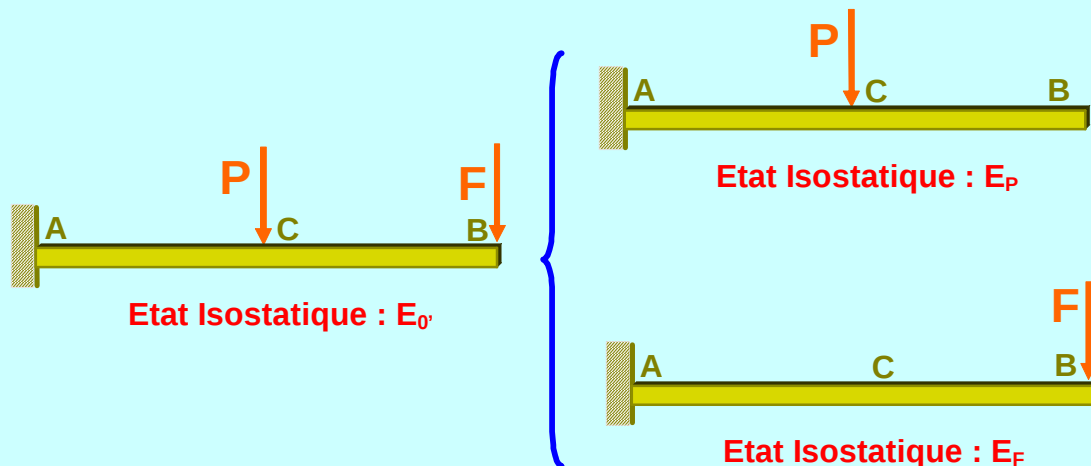
Pour lever l'indétermination provoquée par l'hyperstaticité, nous allons considérer un système équivalent isostatique.

Choisissons comme inconnue hyperstatique la réaction en B et construisons un système isostatique sans l'appui en B. Plaçons en B une force verticale F.

Les 2 Etats Isostatique et Hyperstatique sont équivalents si le déplacement vertical de la

section B dans l'état isostatique est nul.  $E_0 \equiv E_0' \Big|_{\text{lorsque}} \delta_{vB} = 0$

Calcul du déplacement vertical de B dans l'état isostatique  $E_0$  :



En appliquant le principe de superposition, l'état  $E_0$  peut être décomposé en l'état  $E_P$  et  $E_F$ .

La flèche dans l'état  $E_0$  est la superposition des flèches dans les états  $E_P$  et  $E_F$  :

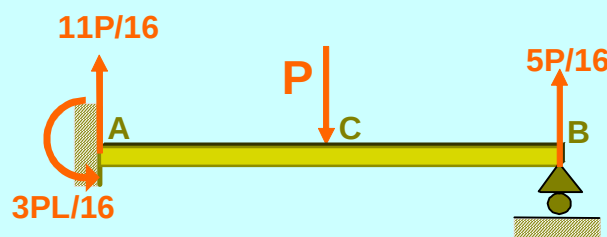
$$\delta_{vB}^{0'} = \delta_{vB}^P + \delta_{vB}^F$$

La flèche dans l'état  $E_0$  en B est la flèche nulle dans l'état  $E_0$  :  $\delta_{vB}^0 = \delta_{vB}^{0'} = 0$  équation de déplacement qui nous donne la valeur de F qui s'identifie avec la réaction en B.

$$\delta_{vB}^0 = \delta_{vB}^P + \delta_{vB}^F = 0$$

Compte tenu des résultats du problème 6 :  $\delta_{vB}^P = \frac{5PL^3}{48EI_z}$  et  $\delta_{vB}^F = \frac{FL^3}{3EI_z}$

$$\delta_{vB}^0 = \delta_{vB}^P + \delta_{vB}^F = 0 \quad \frac{5PL^3}{48EI_z} + \frac{FL^3}{3EI_z} = 0 \quad F = -\frac{5P}{16}$$



**PROBLÈME N°24**

On se propose ici d'étudier un plongoir de piscine en flexion (voir photo ci-contre).

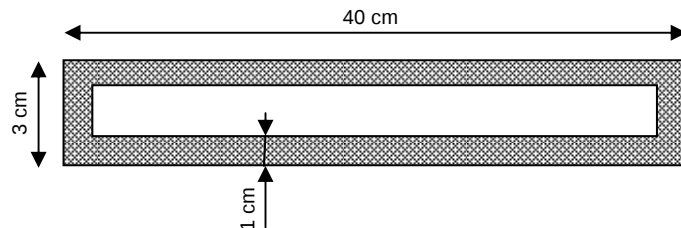
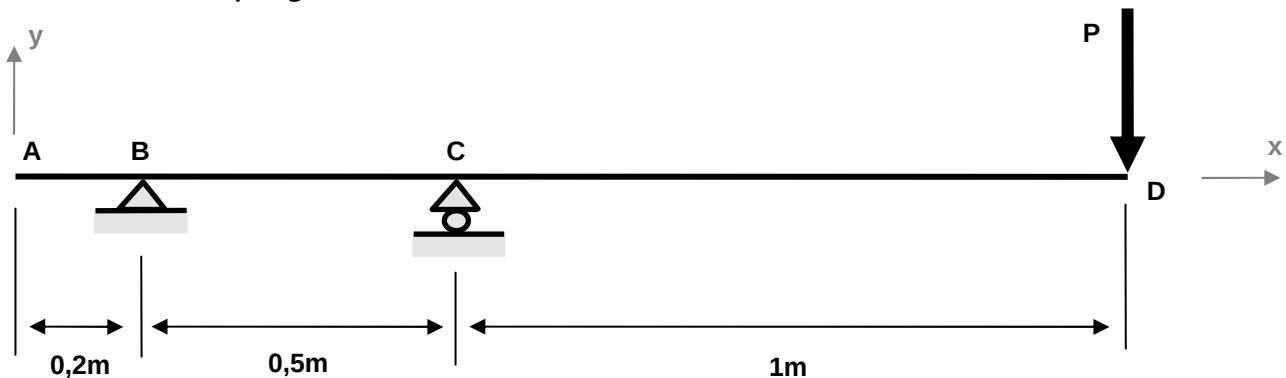
**Caractéristiques planche de plongoir :**

Matériau :

Composite verre-époxy

- $E = 21000 \text{ MPa}$
- $R_e = 200 \text{ MPa}$

Section creuse :

**Modélisation du plongoir :****Partie I : résistance**

1. Déterminer les réactions des appuis du plongoir au sol en fonction de  $P$ .
2. Exprimer littéralement le ou les torseurs de section puis tracez les diagrammes de sollicitation.
3. En déduire la section la plus sollicitée.
4. Pour cette section, déterminer l'expression de la contrainte normale maxi  $\sigma_{\max}$  en fonction de la charge  $P$ .
5. Soit  $P = 10\,000 \text{ N}$ . Faire l'application numérique de  $\sigma_{\max}$ . Quel est alors le coefficient de sécurité de tenue de la structure ?

**Partie II : déformation**

1. Tracer l'allure approximative de la déformée de la planche sous l'application de  $P$ .
2. Soit le moment de flexion entre C et D :  $M = a x + b$  où  $a$  et  $b$  sont 2 constantes. Donner littéralement l'expression de la déformée entre C et D sans résoudre les constantes d'intégration.
3. Une étude expérimentale a permis de déterminer au point C un angle d'inclinaison de la planche par rapport à sa position initiale à l'horizontal de  $-5.22^\circ$ . Déterminer alors les constantes d'intégration.
4. Que vaut alors la flèche maxi de la planche.

## RÉPONSES N°24

Inconnues de liaison :  $X_B$ ,  $Y_B$  et  $Y_C$

- Moment :  $\sum \vec{M} = \vec{0}$

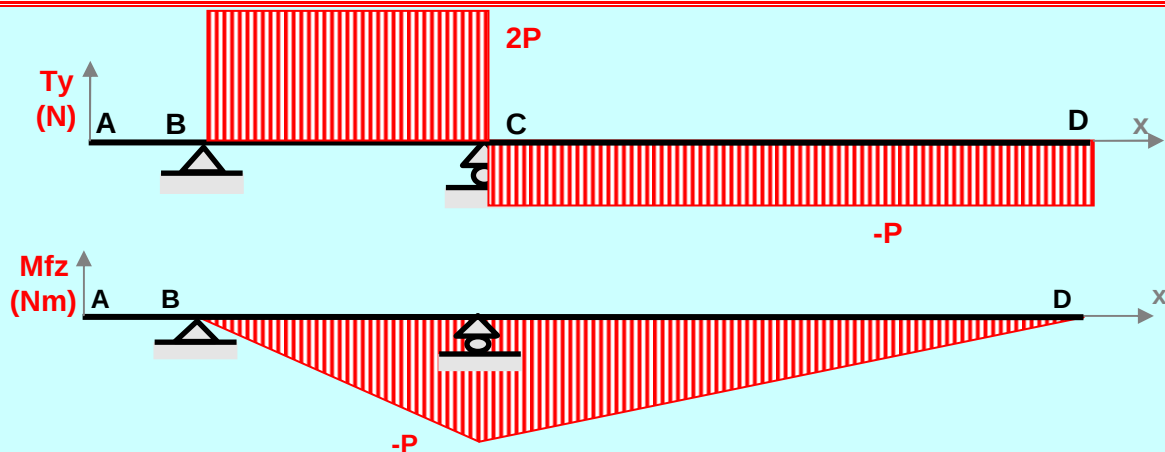
Sur z au point C (équilibre en rotation autour du point C) :  $-P \times 1 - Y_B \times 0.5 = 0 \rightarrow Y_B = -2P$

- Résultante :  $\sum \vec{F} = \vec{0}$

Sur x :  $X_B = 0$

Sur y :  $Y_B + Y_C = 0 \rightarrow Y_C = 3P$

| Entre A et B :                                                                             | Entre B et C :                                                                                       | Entre C et D :                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| en passant par l'amont                                                                     | en passant par l'amont                                                                               | en passant par l'aval                                                                               |
| $\mathfrak{I} \text{ section}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$ | $\mathfrak{I} \text{ section}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 2P & 0 \\ 0 & -2P(x-0.2) \end{Bmatrix}_G$ | $\mathfrak{I} \text{ section}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & -P(1.7-x) \end{Bmatrix}_G$ |



La section la plus sollicitée est au **point C** car les diagrammes de cisaillement et de flexion sont maxi en ce point.

$$\sigma_n = \frac{Mf_y}{I_{g_y}} z - \frac{Mf_z}{I_{g_z}} y \text{ avec :}$$

- $Mf_y = 0$  et
- $Mf_z = -1000 \times P \text{ Nmm}$  au point C
- $I_{g_z} = I_{g_{z1}} - I_{g_{z2}} = BH^3/12 - bh^3/12 = 400 \times 30^3/12 - 380 \times 10^3/12 = 868333 \text{ mm}^4$

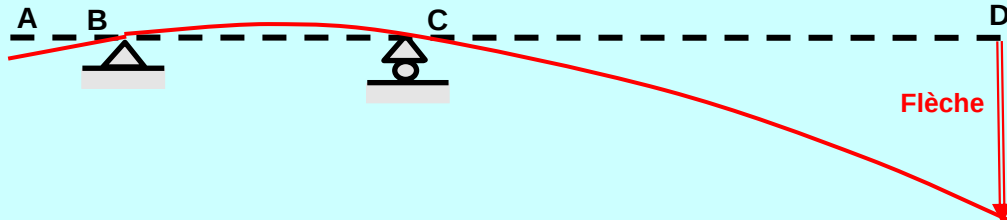
Dans la section C, la contrainte est maxi pour  $y_{\max} = 15\text{mm}$  :

$$\sigma_{\max} = \frac{1000P}{I_{g_z}} 15$$

$$\text{AN : } \sigma_{\max} = 172,74 \text{ MPa}$$

$$s = \frac{R_e}{\sigma_{\max}} = 1.16 \text{ soit } 16\% \text{ de sécurité}$$

## Partie II : déformation



$$y'' = \frac{Mf_z}{EIg_z} = \frac{1}{EIg_z}(ax + b)$$

Intégrons une première fois :  $y' = \frac{1}{EIg_z}(\frac{ax^2}{2} + bx + c)$

Intégrons une deuxième fois :  $y = \frac{1}{EIg_z}(\frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} + cx + d)$

a et b d'après la question I.2 :  $ax + b = -P(1.7 - x)$  soit  $a = P$  et  $b = -1.7P$

Pente au point C connue :  $y'(0.7) = \tan(-5.22^\circ) = -0.091$  soit  $c = -0.091EIg_z - \frac{a(0.7)^2}{2} - 0.7b$

Déplacement nul du point C (car appui) :  $y(0.7) = 0$  soit  $d = \frac{a(0.7)^3}{6} + \frac{b(0.7)^2}{2} + 0.7c$

La flèche maxi est située au point D :  $y(1.7) = \frac{1}{EIg_z}(\frac{a(1.7)^3}{6} + \frac{b(1.7)^2}{2} + c1.7 + d) = -27.2\text{mm}$

# **FLEXION PURE**

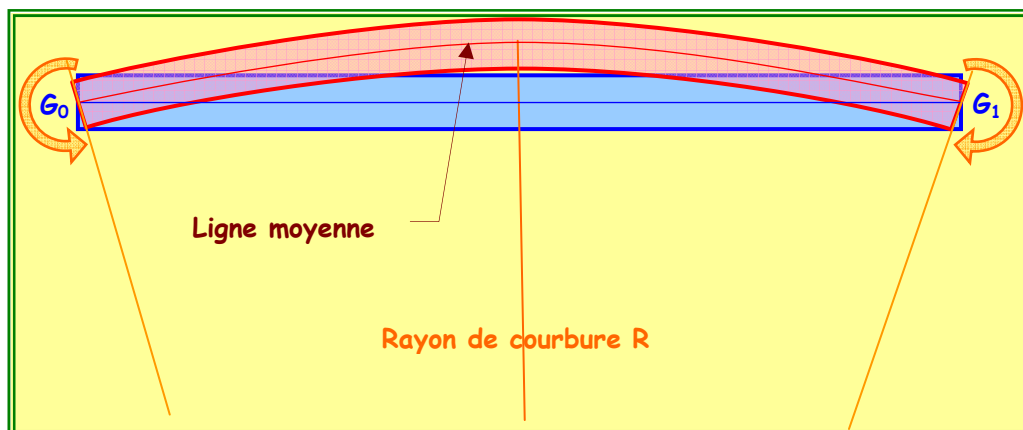
## **1. Définition:**

Si, pour une poutre droite à section constante, le torseur de section se réduit à  $M_y$ , ou  $M_z$ , ou les deux quel que soit la section droite, la poutre est soumise à de la flexion pure.

*Suivant que le moment fléchissant est confondu ou n'est pas confondu avec un axe principal d'inertie de la section droite, la flexion est dite plane (ou symétrique) ou déviée (ou non symétrique).*

### **1.1. Contraintes en un point P appartenant à une section droite:**

Considérons une poutre soumise à de la flexion pure. La figure ci-dessous la représente avant et après déformation. On constate expérimentalement que les fibres situées au dessus de la fibre moyenne s'allongent, alors que les fibres situées sous la fibre moyenne se raccourcissent. La fibre moyenne ne change pas de longueur : on l'appelle aussi fibre neutre. Toutes les sections droites subissent une rotation  $\theta_x$



Le vecteur contrainte en un point P quelconque d'une section droite S doit satisfaire ces 6 équations (Voir cours module F112)

$$(1) \quad 0 = \iint_S \sigma_{xx} dA$$

$$(2) \quad 0 = \iint_S \sigma_{xy} dA$$

$$(3) \quad 0 = \iint_S \sigma_{xz} dA$$

$$(4) \quad 0 = \iint_S (y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy}) dA$$

$$(5) \quad M_y = \iint_S z\sigma_{xx} dA$$

$$(6) \quad M_z = -\iint_S y\sigma_{xx} dA$$

Des constats précédents nous amènent à conclure que les fibres s'allongeant ou se raccourcissant, ne sont donc soumises qu'à des contraintes normales dont la variation doit être linéaire

$\sigma_{xx} = ay + bz + c$  et que les contraintes tangentielles sont nulles :

$$\vec{\Phi}_{x/xyz}^P \begin{cases} \sigma_{xx}^P \neq 0 = ay + bz + c \\ \sigma_{xy}^P = 0 \\ \sigma_{xz}^P = 0 \end{cases}$$

Les équations (2) (3) et (4) sont identiquement vérifiées car les composantes tangentielles  $\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$

L' équation

$$(1) \quad 0 = \iint_S \sigma_{xx} dA = \iint_S (ay + bz + c) dA = a \iint_S y dA + b \iint_S z dA + c \iint_S dA = aQ_z^S + bQ_y^S + cA$$

implique que  $c=0$  car les moments statiques par rapport à des axes centraux sont nuls.

Les équations (5) et (6) nous permettent de calculer les constantes  $a$  et  $b$  :

$$\begin{cases} (5) & M_y = \iint_S z \sigma_{xx} dA = \iint_S (ayz + bz^2) dA = a \iint_S yz dA + b \iint_S z^2 dA = aI_{yz} + bI_{yy} \\ (6) & -M_z = \iint_S y \sigma_{xx} dA = \iint_S (ay^2 + byz) dA = a \iint_S y^2 dA + b \iint_S yz dA = aI_{zz} + bI_{yz} \end{cases}$$

D' ou le système à résoudre en  $a$  et  $b$  :

$$\begin{cases} M_y = aI_{yz} + bI_{yy} \\ -M_z = aI_{zz} + bI_{yz} \end{cases}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} M_y & I_{yy} \\ -M_z & I_{yz} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_{yz} & I_{yy} \\ I_{zz} & I_{yz} \end{vmatrix}} = -\frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{-I_{yz}^2 + I_{yy} I_{zz}} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} I_{yz} & M_y \\ I_{zz} & -M_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_{yz} & I_{yy} \\ I_{zz} & I_{yz} \end{vmatrix}} = \frac{M_z I_{yz} + M_y I_{zz}}{-I_{yz}^2 + I_{yy} I_{zz}}$$

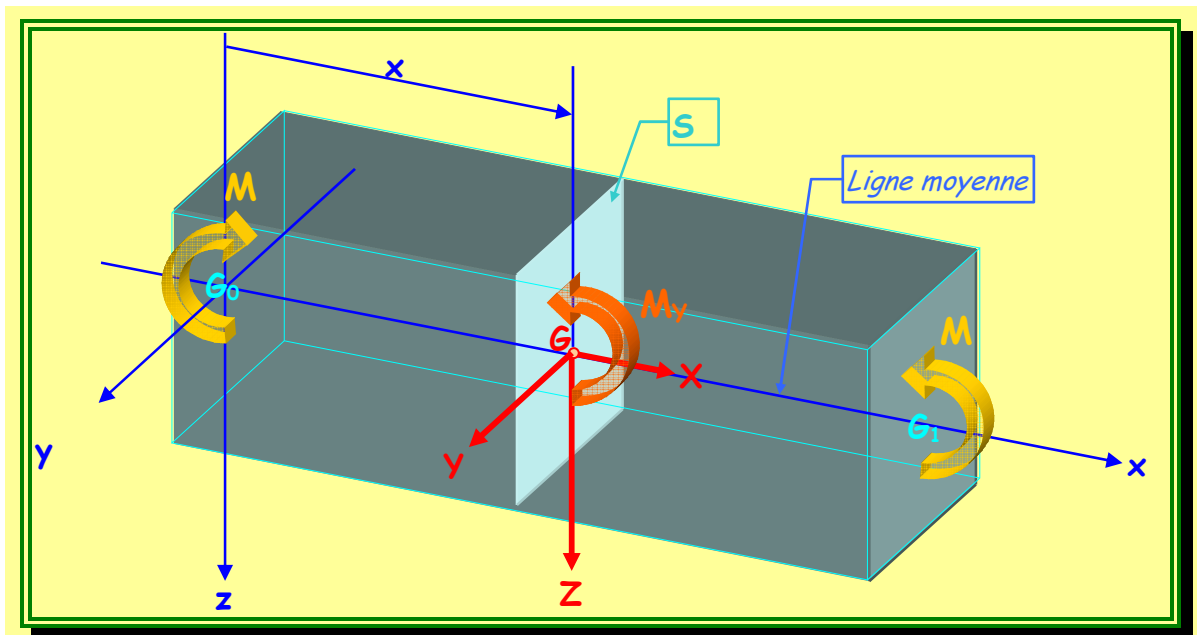
$$\sigma_{xx}^P = -\frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y^P + \frac{M_z I_{yz} + M_y I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z^P$$

Si le système d'axes  $yz$  est principal d'inertie  $YZ$ , le produit d'inertie étant nul, l'expression devient :

$$\sigma_{xx}^P = -\frac{M_z}{I_z} Y^P + \frac{M_y}{I_y} Z^P$$

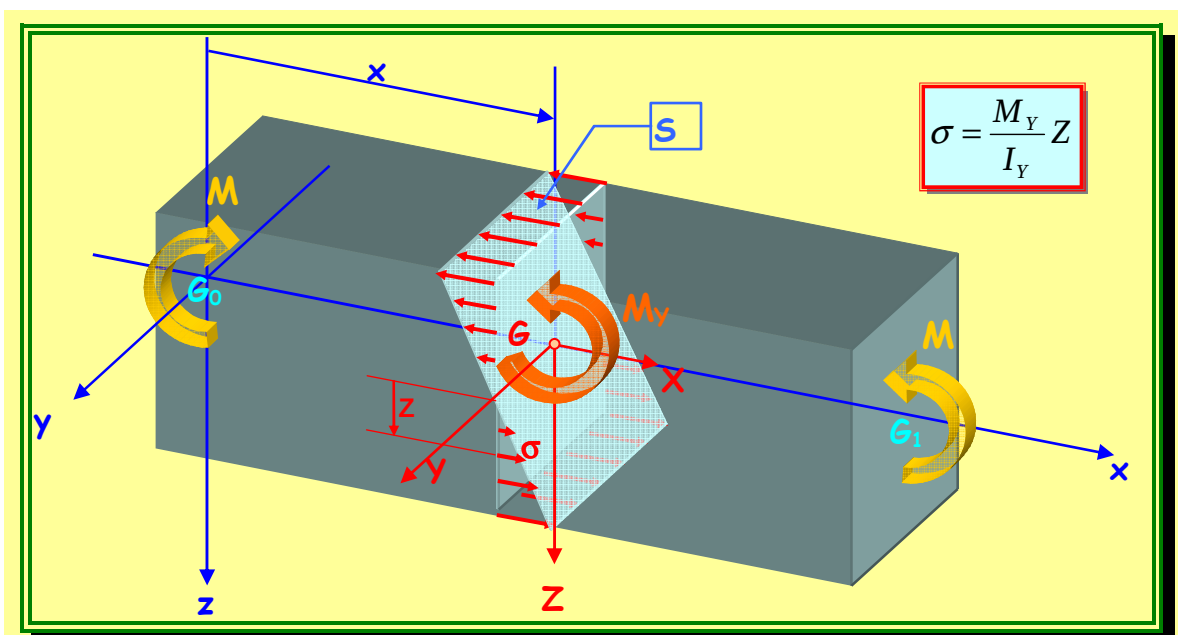
## 2. Flexion plane:

Considérons la poutre ci-dessous soumise à un moment fléchissant  $M_y$ .



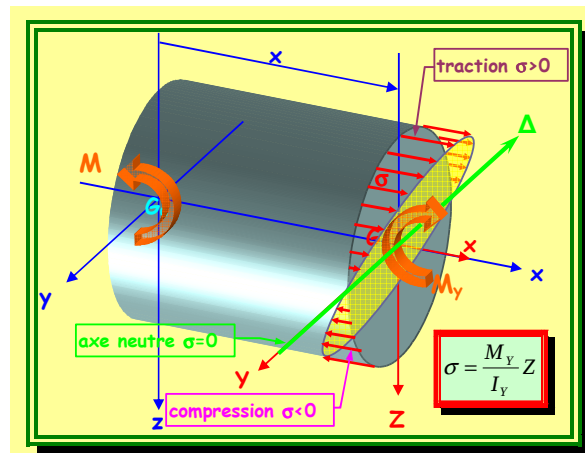
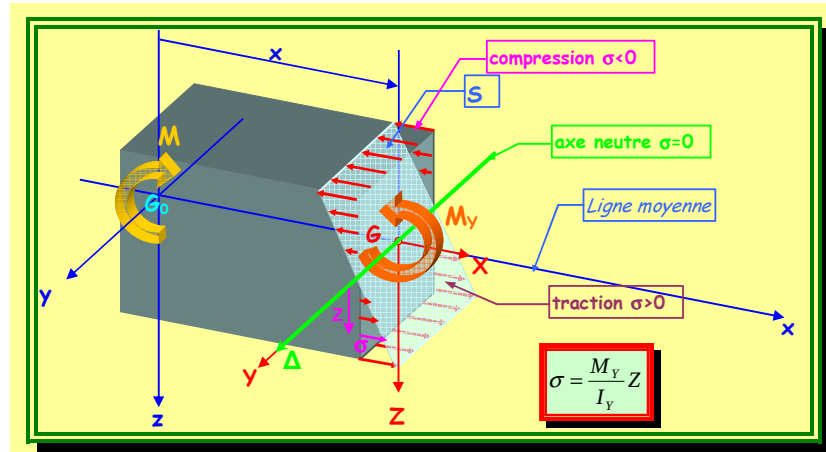
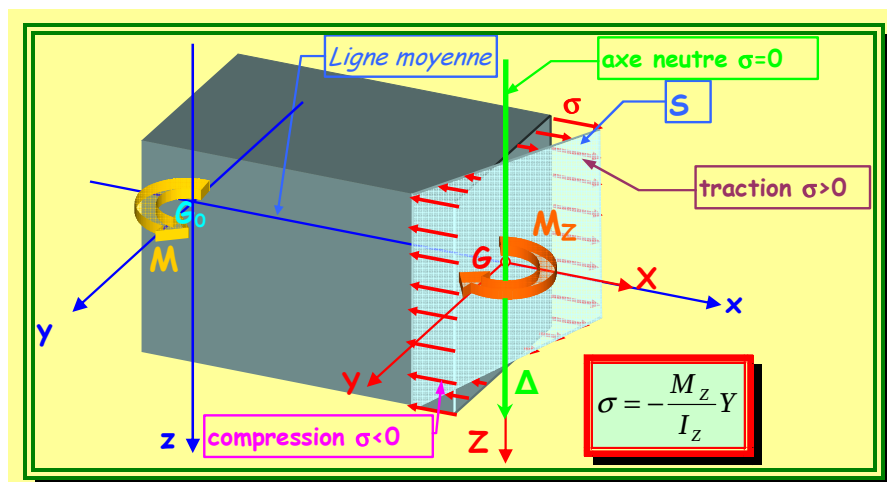
Après application des couples  $\vec{M}$  aux extrémités on constate que:

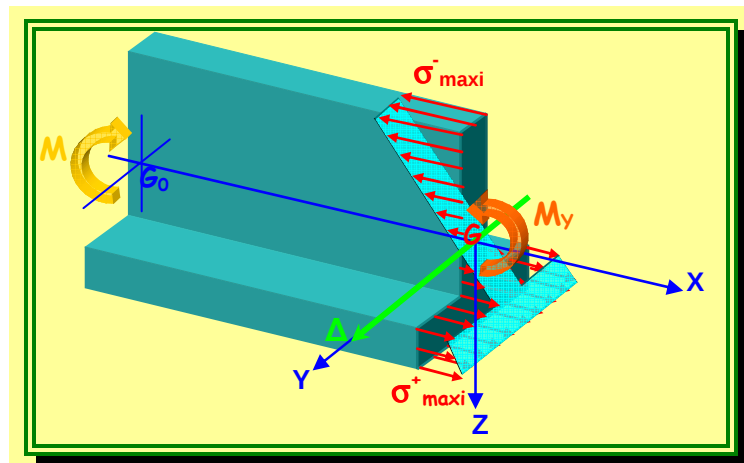
- Toutes les sections droites subissent une rotation  $\theta_y$  autour de l'axe  $y$  parallèle à l'axe principal d'inertie  $y$  portant le moment fléchissant et une flèche verticale  $w$ .
- Toutes les fibres contenues dans le plan  $xy$  (contenant la ligne moyenne) ne subissent aucune déformation, tandis que les fibres situées au-dessus du plan  $xy$  subissent un raccourcissement proportionnel à la distance par rapport à ce plan. De même les fibres situées au-dessous du plan  $xy$  subissent un allongement proportionnel à la distance par rapport à ce plan.



**2.2. Axe neutre :**

Le lieu des points où  $\sigma=0$  dans la section droite, est l'axe neutre  $\Delta$ . Il est confondu avec l'axe qui porte le moment fléchissant dans le cas de la flexion plane. C'est l'axe de rotation autour duquel tournent les sections droites.

**1°) Le moment est porté par l'axe principal Y:****2°) Le moment est porté par l'axe principal Z:**

2.3. Coefficient de sécurité:1°)Matériaux symétriques ou ductiles ( $\sigma_e = \sigma'_e$ ):

On calcule la plus grande contrainte normale en valeur absolue puis le coefficient de sécurité par la relation:

$$\alpha = \frac{\sigma_e \text{ (ou } \sigma'_e \text{)}}{|\sigma_{\max i}|}$$

2°) Matériaux dissymétriques ou fragiles ( $\sigma'_e > \sigma_e$ ):

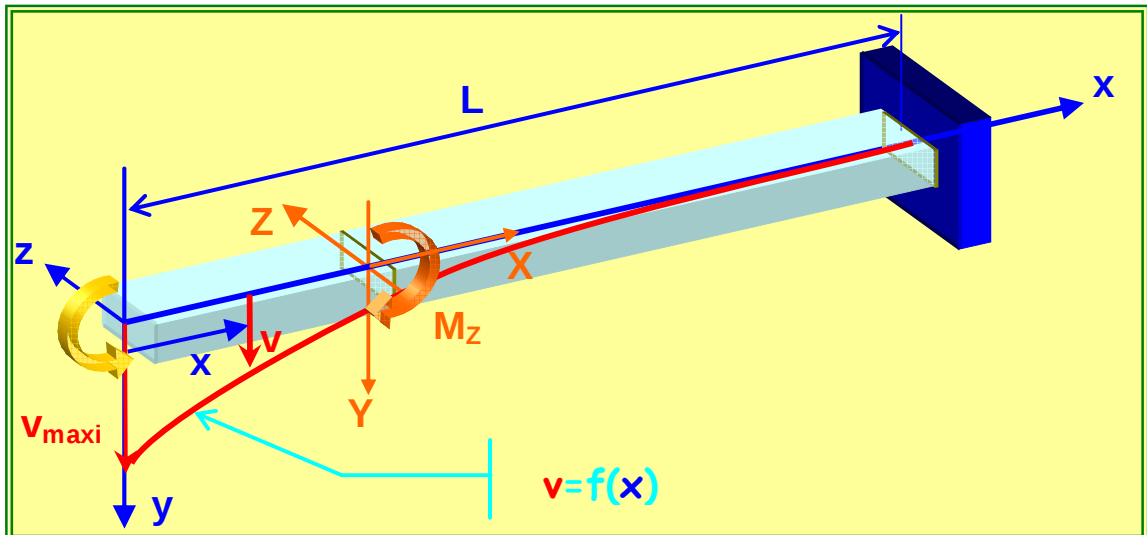
On calcule les deux contraintes extrêmes  $\sigma_{\max i}^+$  et  $\sigma_{\max i}^-$ , puis les deux coefficients:

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{\sigma_{\max i}^+}$$

$$\alpha' = \frac{\sigma'_e}{|\sigma_{\max i}^-|}$$

Le coefficient de sécurité est le plus petit des deux.

2.4. Equation de la déformée:1°) Le moment est porté par l'axe principal Z:

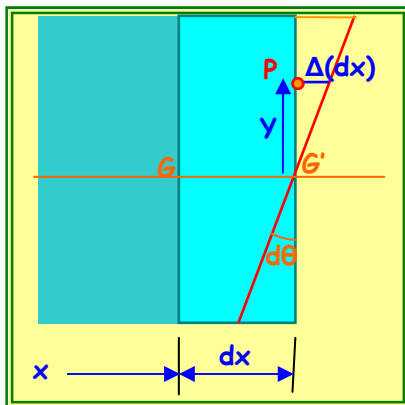


Sous l'effet du moment  $M_z$  la ligne moyenne de la poutre se déforme. Son équation après déformation  $v=f(x)$  est aussi appelée déformée et la valeur de la déformée en un point d'abscisse  $x$  est appelée la flèche  $v$ .

L'expression du rayon de courbure  $R$  d'une équation d'une courbe en coordonnées

cartésiennes est donnée par :  $\frac{1}{R} = \frac{v''}{(1+v')^{\frac{3}{2}}} \approx v''$  compte tenu de nos hypothèses petites

déformations et du développement du binôme de Newton  $(1+v')^{\frac{3}{2}} \approx 1$ .



En considérant un tronçon de poutre  $GG'$  de longueur  $dx$  la contrainte normale en un point  $P$  d'ordonnée  $y$  est donnée

par  $\sigma_{xx}^P = -\frac{M_z}{I_z} Y$  et vaut d'après la loi de Hooke en

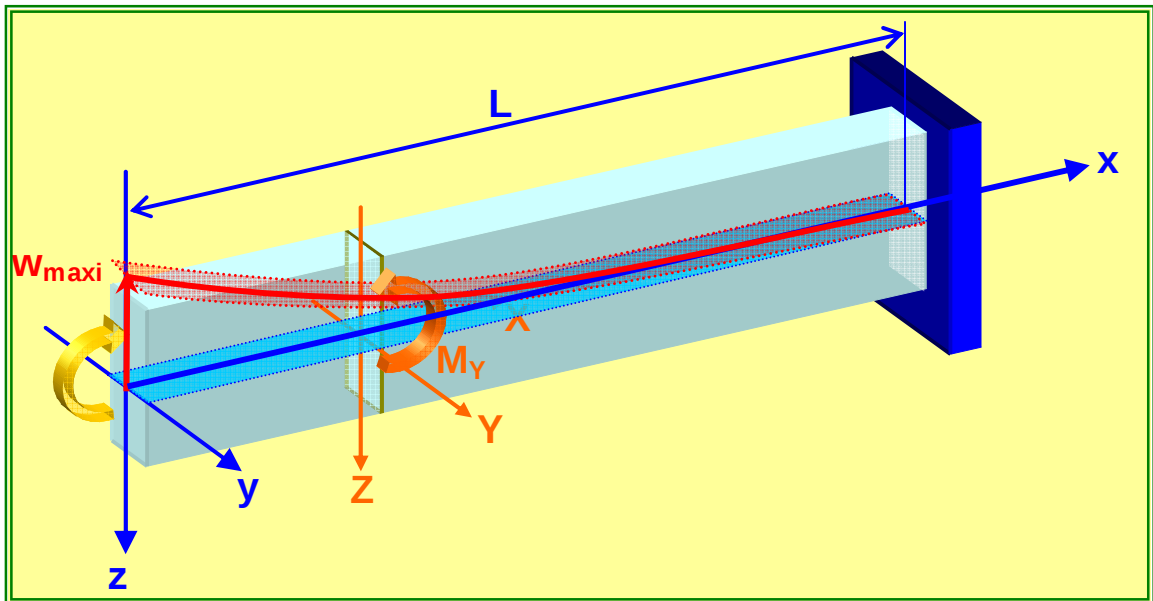
$$\text{traction } \sigma_{xx}^P = E \varepsilon_{xx}^P = E \frac{\Delta(dx)}{dx} = E \frac{(Y d\theta)}{dx} = -\frac{EY}{R}.$$

En identifiant les deux expressions l'équation différentielle de la déformée est donnée par :

$$v'' = \frac{M_z}{EI_z}$$

Après deux intégrations on obtient l'équation de la déformée en fonction de  $x$ , puis la flèche maximum.

**2°) Le moment est porté par l'axe principal Y:**



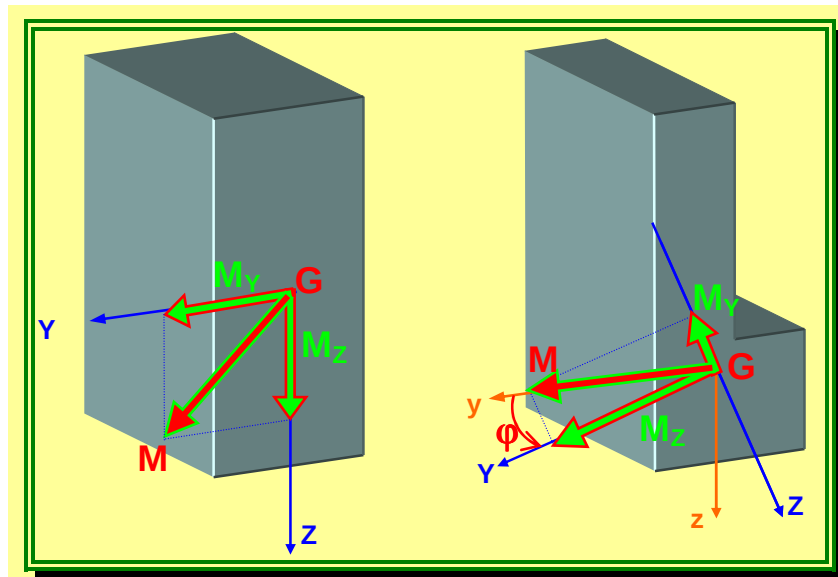
Une démarche similaire au cas précédent montre que l'équation différentielle de la déformée est donnée par :

$$w'' = -\frac{M_y}{EI_y}$$

Après deux intégrations on obtient l'équation de la déformée en fonction de  $x$ , puis la flèche maximum.

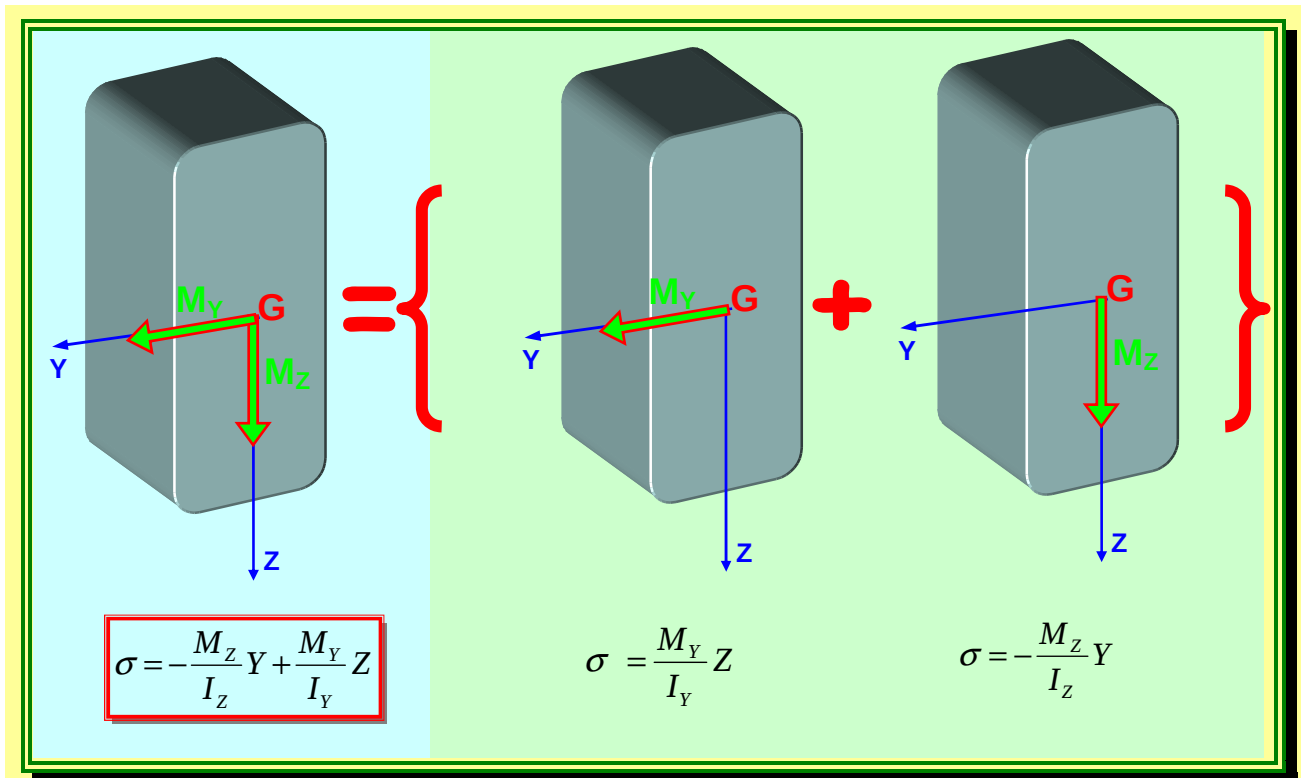
### 3. Flexion déviée:

Le moment de flexion n'est plus porté par l'un des deux axes principaux d'inertie de la section droite.



#### 3.1. Contraintes en un point P de la section droite:

On applique le principe de superposition.



### 3.2. Axe neutre:

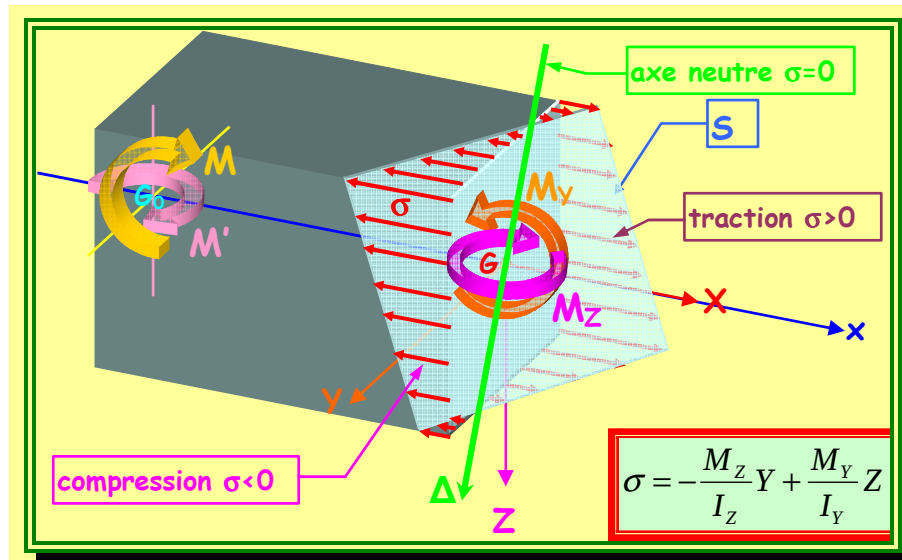
*Le lieu des points où  $\sigma = 0$  dans la section droite, est l'axe neutre  $\Delta$ .* Il est confondu avec l'axe qui porte le moment fléchissant dans le cas de la flexion plane. C'est l'axe de rotation autour duquel tournent les sections droites.

De la relation donnant l'expression de la contrainte, on en déduit l'équation de l'axe neutre dans des axes quelconques :

$$0 = -\frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y^P + \frac{M_z I_{yz} + M_y I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z^P \Rightarrow z = \frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{M_z I_{yz} + M_y I_{zz}} y$$

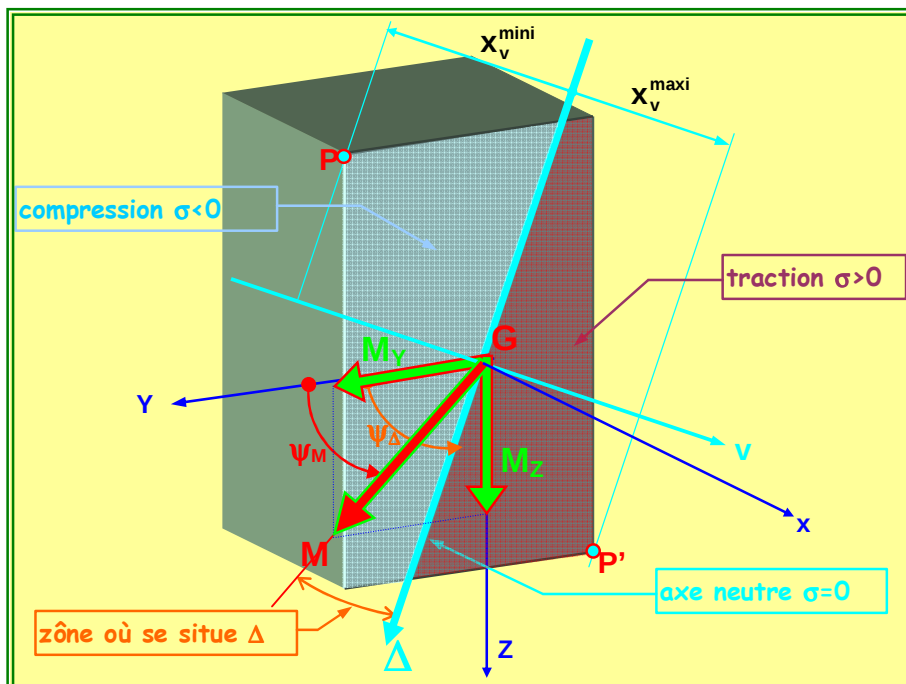
Qui devient dans des axes principaux d'inerties :

$$Z = \frac{M_z I_y}{M_y I_z} Y$$



Comme l'axe neutre est dévié par rapport au moment de flexion résultant (contrairement à la flexion plane où l'axe neutre et le moment de flexion sont confondus), la flexion est dite déviée.

### 3.3. Expression de la contrainte de flexion dans un repère qui contient l'axe neutre:



Soit  $v$  un axe perpendiculaire à l'axe neutre  $\Delta$ , tel que le repère  $\Delta, v, X$  soit direct. On montre que dans ce repère la contrainte de flexion se calcule par:

$$\sigma = \frac{M_{\Delta}}{I_{\Delta\Delta}} x_v$$

$$\text{avec: } I_{\Delta\Delta} = \frac{I_Y + I_Z}{2} + \frac{I_Y - I_Z}{2} \cos 2\psi_{\Delta}$$

Les points les plus sollicités sont ceux qui sont les plus éloignés de l'axe neutre  $\Delta$ .

**3.4. Equation de la déformée :**

On applique le principe de superposition. Compte tenu des expressions de  $v$  et  $w$  obtenu au paragraphe 10.2.4. La flèche résultante à l'abscisse  $x$  s'obtient par :

$$f = \sqrt{v^2 + w^2}$$

**3.5. Coefficient de sécurité:**

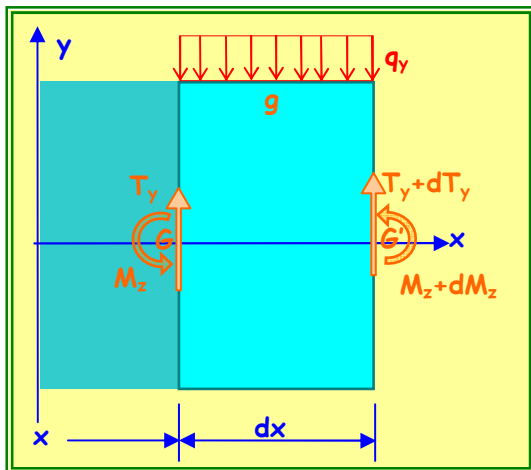
Il faut tout d'abord rechercher l'axe neutre  $\Delta$ , afin de déterminer la position des points soumis aux contraintes maximum de traction et de compression. La démarche est ensuite la même que pour la flexion plane.

# **FLEXION SIMPLE (CISAILLEMENT-FLEXION)**

## **1. Définition:**

Si, pour une poutre droite à section constante, le torseur de section se réduit à  $T_y$ , ou  $T_z$  et  $M_y$ , ou  $M_z$ , (ou les deux) quel que soit la section droite, la poutre est soumise à de la flexion simple.

### **1.1. Relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant:**



Considérons le tronçon de poutre  $GG'$ , et supposons que les seules actions extérieures qui s'exercent sur ce tronçon sont une charge linéique uniforme  $q$  (Pour simplifier la démonstration considérons uniquement la composante suivant  $y$  :  $q_y$ ).

$$\begin{cases} \vec{R}_{G'} = \vec{R}_G - \vec{q}dx \\ \vec{M}_{G'} = \vec{M}_G + \vec{G}'G \wedge \vec{R}_G - \vec{G}'G \wedge \vec{q}dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_y + dT_y = T_y + q_y dx \\ M_z + dM_z = M_z - T_y dx - q_y \frac{dx^2}{2} \end{cases}$$

En négligeant les termes du second ordre :

$$q_y = \frac{dT_y}{dx} \quad T_y = -\frac{dM_z}{dx}$$

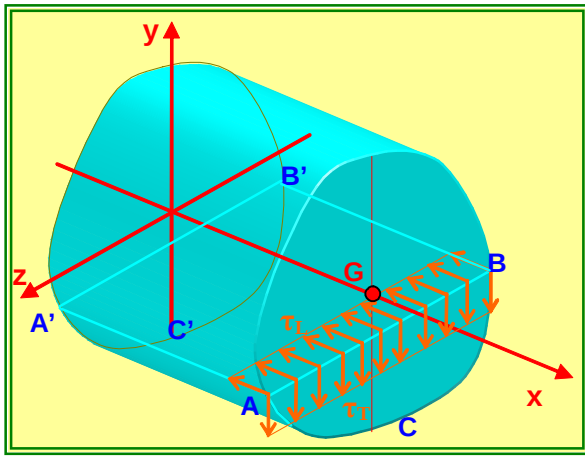
En considérant la composante  $z$  :  $q_z$  :

$$q_z = \frac{dT_z}{dx} \quad T_z = \frac{dM_y}{dx}$$

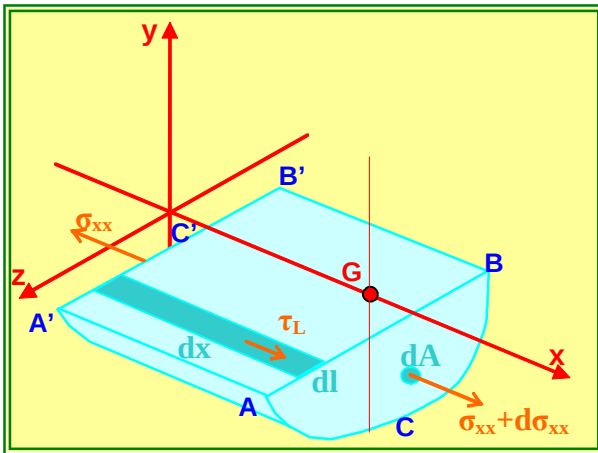
### **Contraintes en un point P appartenant à une section droite:**

On constate expérimentalement comme dans la flexion pure que les fibres situées au dessus de la fibre moyenne s'allongent, alors que les fibres situées sous la fibre moyenne se raccourcissent

La relation  $\sigma_{xx}^P = -\frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y^P + \frac{M_z I_{yz} + M_y I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z^P$  reste valable car l'effort tranchant perturbe peu les contraintes normales, de même pour la courbure.



Entre chaque fibre, on enregistre des variations de longueur qui impliquent l'existence de contraintes tangentielles longitudinales  $\tau_L$  dans le plan  $zx$ , et compte tenu de la réciprocité des contraintes tangentielles transversales  $\tau_T$  dans le plan  $xy$ .



Isolons le bout de poutre délimité par A'B'C'ABC :

Ecrivons l'équilibre statique de ce tronçon, en considérant la composante suivant l'axe  $x$  :

$$-\iint_{A'B'C'} \sigma_{xx} dA + \iint_{ABC} (\sigma_{xx} + d\sigma_{xx}) dA + \iint_{A'B'AB} \tau_L dl dx = 0$$

$$\iint_{ABC} \frac{d\sigma_{xx}}{dx} dA + \iint_{AB} \tau_L dl = 0$$

La contrainte normale vaut :

$$\sigma_{xx}^P = -\frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y^P + \frac{M_z I_{yz} + M_y I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z^P$$

Donc :  $\frac{d\sigma_{xx}^P}{dx} = -\frac{T_z I_{yz} - T_y I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y^P + \frac{-T_y I_{yz} + T_z I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z^P$  compte tenu que  $T_y = -\frac{dM_z}{dx}$  et

$$T_z = \frac{dM_y}{dx}$$

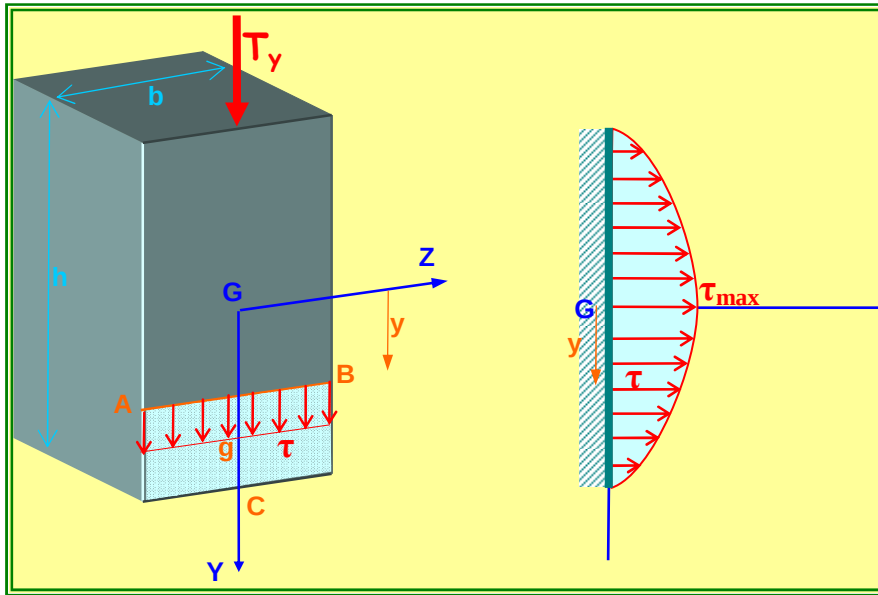
$$\iint_{AB} \tau_L dl = \iint_{ABC} \left( -\frac{T_z I_{yz} - T_y I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y^P + \frac{-T_y I_{yz} + T_z I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z^P \right) dA = -\frac{T_z I_{yz} - T_y I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \iint_{ABC} y^P dA + \frac{-T_y I_{yz} + T_z I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \iint_{ABC} z^P dA$$

Avec les définitions des moments statiques :  $\iint_{ABC} y^P dA = Q_z^{ABC}$  et  $\iint_{ABC} z^P dA = Q_y^{ABC}$

$$\tau_L = \frac{1}{L_{AB}} \left( -\frac{T_z I_{yz} - T_y I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} Q_z^{ABC} + \frac{-T_y I_{yz} + T_z I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} Q_y^{ABC} \right)$$

Si le système d'axe  $yz$  est principal d'inertie (le produit d'inertie étant nul) :

$$|\tau_L| = \frac{1}{L_{AB}} \left( \frac{T_y}{I_z} Q_z^{ABC} + \frac{T_z}{I_y} Q_y^{ABC} \right)$$

Contraintes tangentielles pour des sections épaisses rectangulaires:

$$|\tau_L| = \frac{1}{L_{AB}} \frac{T_Y}{I_Z} Q_Z^{ABC}$$

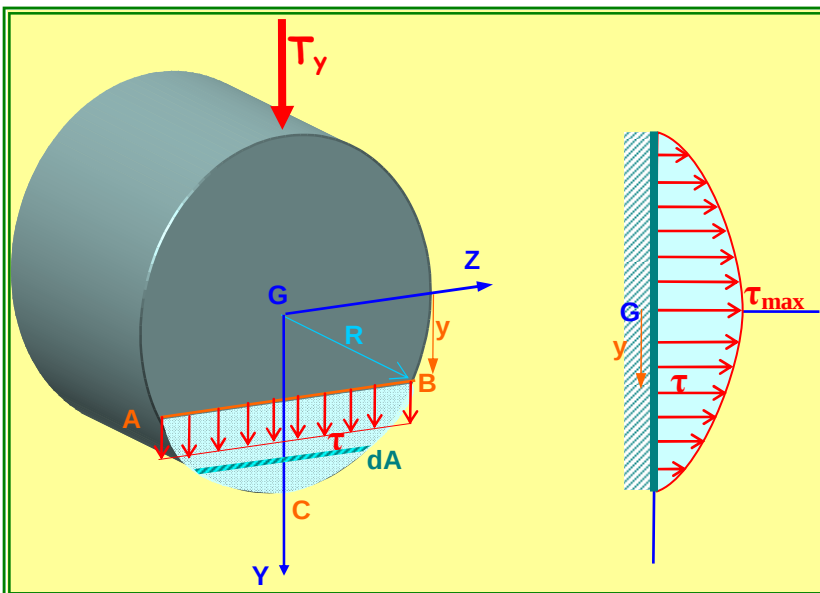
$$L_{AB} = b$$

$$I_Z = \frac{bh^3}{12}$$

$$Q_Z^{ABC} = Y_g \times A_{ABC} = \frac{b}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \left( \frac{h}{2} + y \right)$$

$$\tau = \frac{3T_Y}{2A} \left( 1 - \frac{y^2}{\frac{h^2}{4}} \right)$$

$$\tau_{\max} = \frac{3T_Y}{2A}$$

Contraintes tangentielles pour des sections épaisses circulaires:

$$|\tau_L| = \frac{1}{L_{AB}} \frac{T_Y}{I_Z} Q_Z^{ABC}$$

$$L_{AB} = 2\sqrt{R^2 - y^2}$$

$$I_Z = \frac{\pi R^4}{4}$$

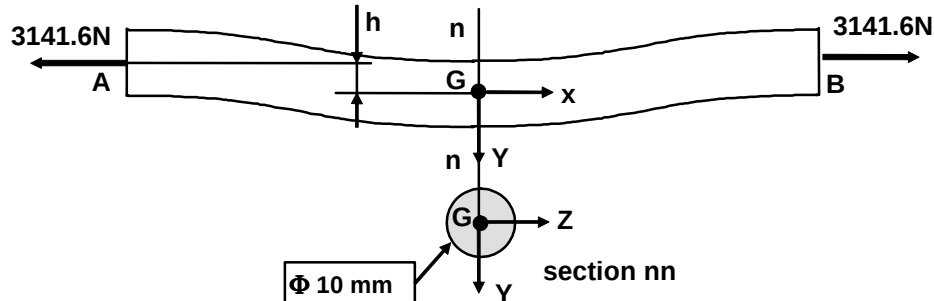
$$Q_Z^{ABC} = \iint_{ABC} Y dA = \int_y^R y 2\sqrt{R^2 - y^2} dy = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\tau = \frac{4T_Y}{3A} \left( 1 - \frac{y^2}{R^2} \right)$$

$$\tau_{\max} = \frac{4T_Y}{3A}$$

# SOLLICITATIONS COMPOSEES

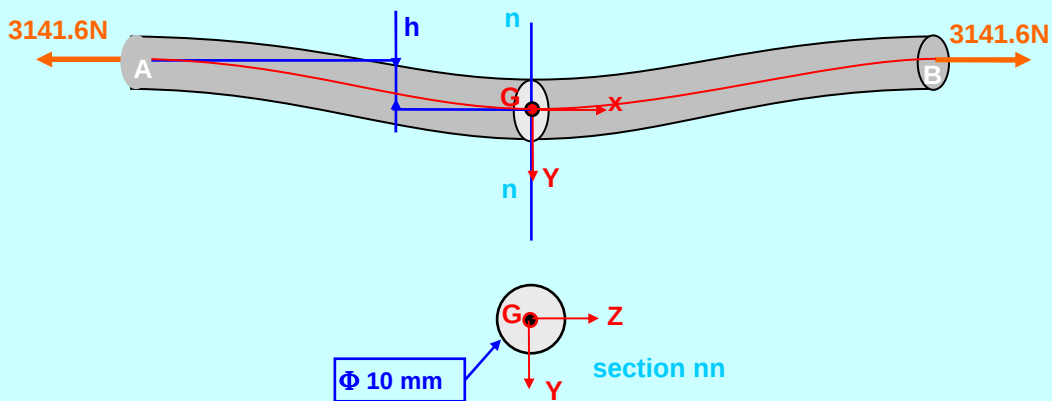
## PROBLÈME N°25



Considérons la barre de la figure ci-dessus. Elle est soumise à deux forces égales et opposées de 3141,6 N. La section droite est circulaire de diamètre 10 mm.

- 1°) Déterminer les éléments de réduction du torseur de section au centre de gravité  $G$  de la section droite  $nn$ .
- 2°) Déterminer l'expression de la contrainte normale maximum ( $>0$ ) dans la section droite  $nn$  (la mettre sous la forme  $a + b \cdot h$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles).
- 3°) La contrainte maximum ne pouvant excéder 232 MPa, en déduire la valeur de  $h$ .
- 4°) Déterminer alors la position de l'axe neutre.

## RÉPONSES N°25

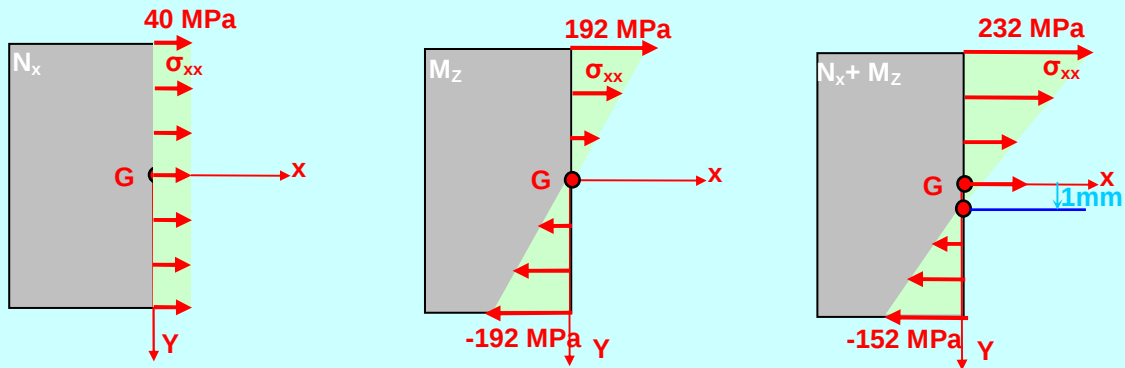


Torseur de section en  $G$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_G = \vec{F}_B \Rightarrow \begin{cases} N_x = 3141,6\text{N} \\ 0 \\ 0 \end{cases} \\ \vec{M}_G = \vec{GB} \wedge \vec{F}_B \Rightarrow \begin{cases} 0 \\ 0 \\ M_z = 3141,6h \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{Sollicitation : Traction-Flexion}$$

Contrainte de traction :  $\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} = \frac{3141,6}{\pi \times 5^2} = 40 \text{ MPa}$

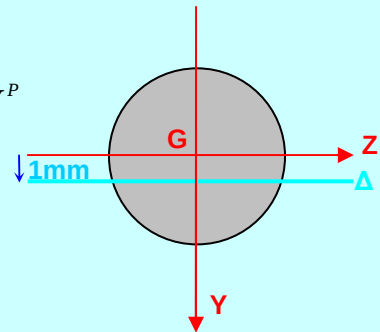
Contrainte de flexion :  $\sigma_{xx}^P = -\frac{M_z}{I_z} Y^P = \frac{3141,6h}{\pi \cdot 10^4} 64,5 = 32h$



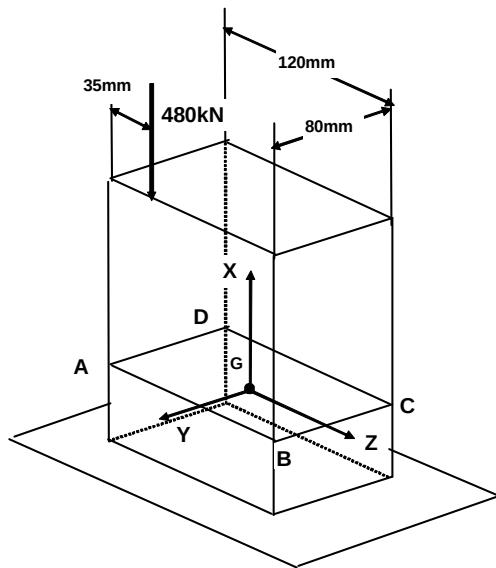
Contrainte de traction -flexion:  $\sigma_{xx} = 40 + 32h$

La contrainte maximum admissible étant de 232 MPa :  $232 \geq 40 + 32h$  d'où  $h = 6 \text{ mm}$

$\forall P \in \Delta \quad \sigma_{xx} = 0 \Rightarrow 0 = 40 - \frac{3141,6 \times 6}{\pi \cdot 10^4} \times 64 \times Y^P = 40 - 38,4 Y^P$   
 $Y^P = 1,04 \text{ mm}$

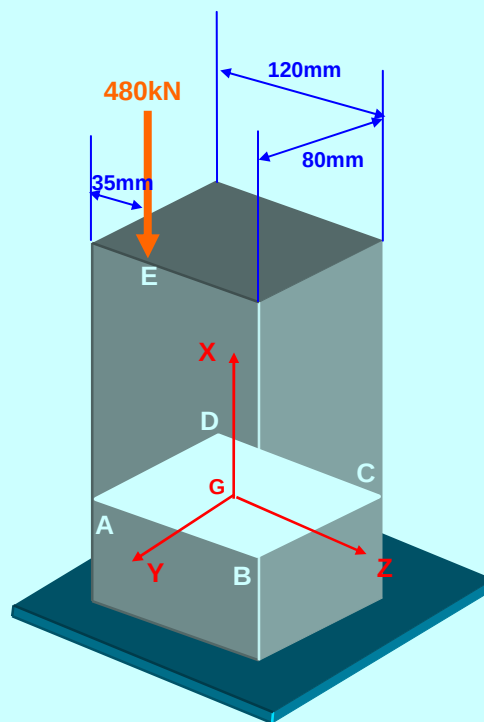


## PROBLÈME N°26



Calculer les contraintes normales aux points A, B, C et D et localiser l'axe neutre.

## RÉPONSES N°26



Torseur de section en G :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_G = \vec{F}_E \Rightarrow \begin{cases} N_x = -480kN \\ 0 \\ 0 \end{cases} \\ \vec{M}_G = \vec{GE} \wedge \vec{F}_E \Rightarrow \begin{cases} M_y = 12000kNmm \\ M_z = 19200kNmm \end{cases} \end{array} \right.$$

Sollicitation : Traction-Flexion

La contrainte normale en un point P quelconque :

$$\sigma_{xx}^P = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} Y^P + \frac{+M_y}{I_y} Z^P$$

$$\sigma_{xx}^P = -\frac{480.10^3}{120 \times 80} - \frac{19200.10^3 \times 12}{120 \times 80^3} Y^P + \frac{12000.10^3 \times 12}{80 \times 120^3} Z^P$$

$$\sigma_{xx}^P = -50 - 3,75 \times Y^P + 1,0417 \times Z^P$$

Contrainte en A :

$$\sigma_{xx}^A = -50 - 3,75 \times 40 + 1,0417 \times (-60) \quad \sigma_{xx}^A = -262,5 \text{ MPa}$$

Les calculs sont identiques pour les points B, C, D :

$$\sigma_{xx}^B = -137,5 \text{ MPa} \quad \sigma_{xx}^C = 162,5 \text{ MPa} \quad \sigma_{xx}^D = 37,5 \text{ MPa}$$

$$\text{Equation de l'axe neutre : } \sigma_{xx}^P = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} Y^P + \frac{+M_y}{I_y} Z^P = 0$$

$$\sigma_{xx}^P = -50 - 3,75 \times Y^P + 1,0417 \times Z^P = 0$$

$$-50 - 3,75 \times Y^P + 1,0417 \times Z^P = \frac{500 + 3,75 Y^P}{1,0417} \quad Z = 3,6 Y + 48$$

## PROBLÈME N°27

Un arbre cylindrique de diamètre  $d$ , de longueur  $L=1\text{m}$ , est sollicité par un effort  $F=19635\text{ N}$ , et un couple  $C$  longitudinaux comme indiqué sur la figure ci-contre.

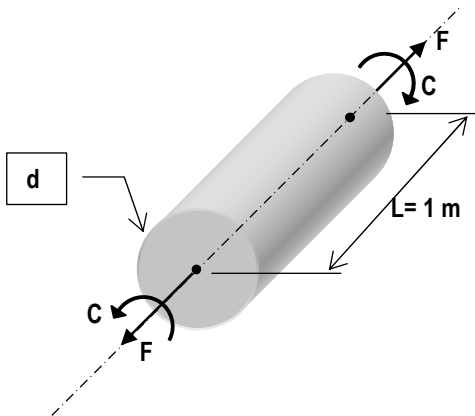
Il est constitué d'un matériau ayant comme

- Module de Young :  $200\text{ GPa}$ .
- Coefficient de Poisson :  $1/3$ .

Des mesures expérimentales ont permis d'enregistrer l'allongement longitudinal du cylindre  $0,2\text{ mm}$ , ainsi que la rotation des sections extrêmes  $1,25^\circ$ .

Calculer :

- 1) Le diamètre  $d$  du cylindre en mm.
- 2) Le rétrécissement du diamètre  $d$  en mm
- 3) La contrainte normale maximale en MPa.
- 4) Le module de Coulomb du matériau.
- 5) Le couple  $C$  appliqué en mN.
- 6) La contrainte tangentielle maximum en MPa.



## RÉPONSES N°27

1°)  $\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$

$$d = \sqrt{\frac{4FL}{\pi E \Delta L}} = 25\text{mm}$$

2°)  $\varepsilon_{yy} = -\nu \varepsilon_{xx}$

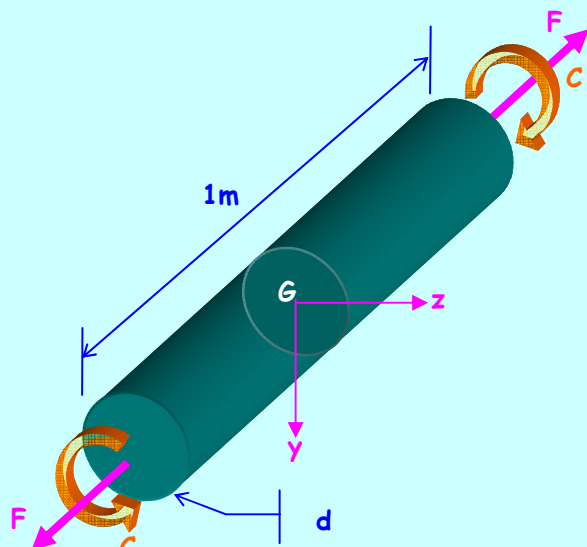
$$\Delta d = -\frac{\nu d \Delta L}{L} = -1,6 \cdot 10^{-3}\text{mm}$$

3°)  $\sigma = 40\text{MPa}$

4°)  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$   $G = \frac{3E}{8} = 75000\text{MPa}$

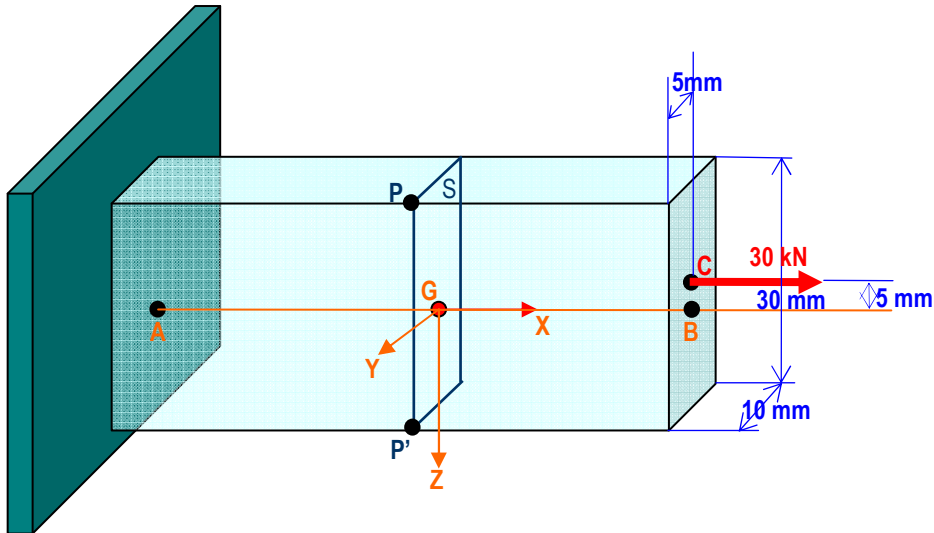
5°)  $\varphi = \frac{CL}{GI_G}$   $I_G = \frac{\pi d^4}{32}$   $C = 62,75\text{mN}$

6°)  $\tau = G \gamma$   $\tau = 20,45\text{MPa}$



## PROBLÈME N°28

Une poutre à section rectangulaire (30\*10) , est encastrée à son extrémité A, et soumise à l'autre extrémité B à une force de 30 kN appliquée en C comme indiqué sur la figure ci-contre.



- 1) Déterminer les composantes du torseur de section au centre de gravité G de la section droite S.
- 2) Calculer les contraintes normales aux points P et P' de la section droite S.
- 3) Tracer le diagramme représentant les variations de la contrainte normale dans la section droite S.
- 4) Désirant un coefficient de sécurité de 2, quelle est la limite élastique du matériau qu'il faut choisir.

## RÉPONSES N°28

$$1^{\circ}) \quad [T_G]_{Y,Z,3} \begin{cases} \vec{R}_G = \vec{F}_C \\ \vec{M}_G = \vec{GC} \wedge \vec{F}_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_x = 30kN \\ M_y = -150mN \end{cases}$$

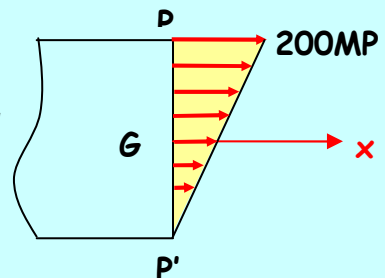
$$2^{\circ}) \quad \sigma_{xx}^P = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} Z^P$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^P = 200MPa \\ \sigma_{xx}^{P'} = 0 \end{cases}$$

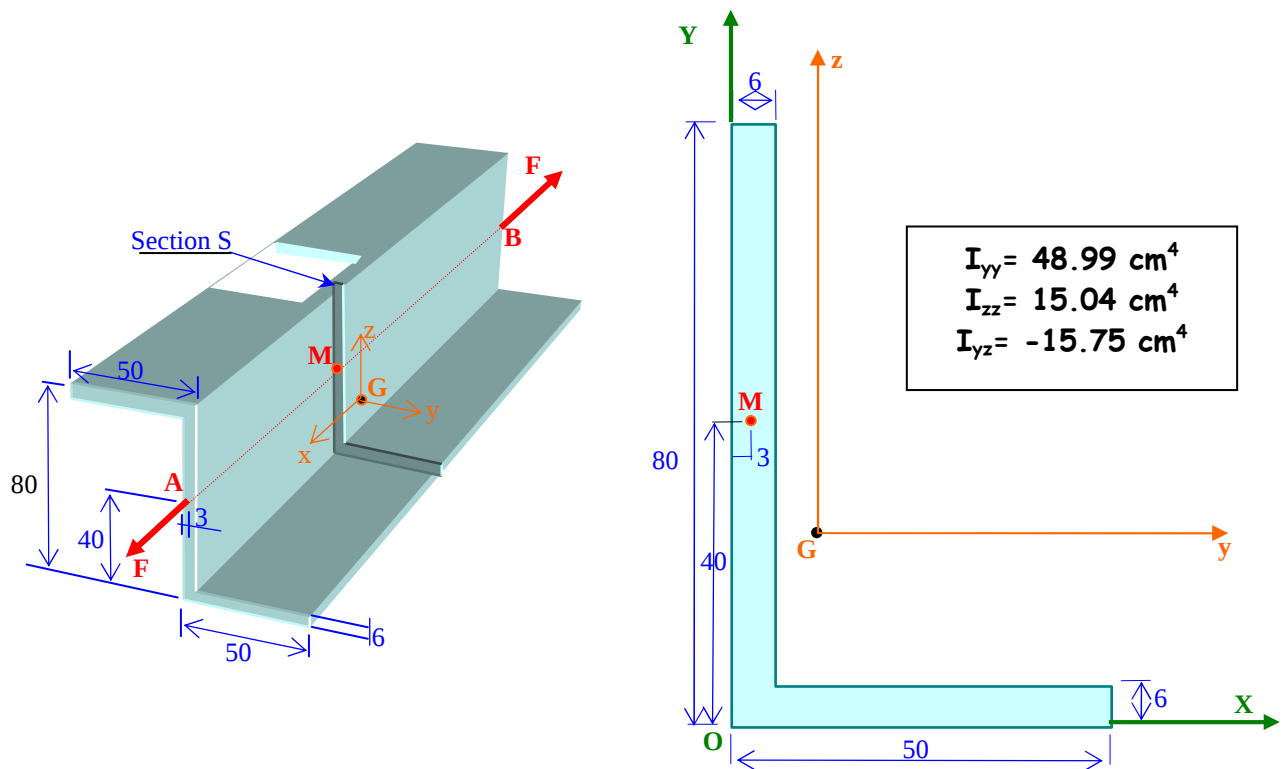
3°)

$$4^{\circ}) \quad \sigma_e = 400MPa$$



## PROBLÈME N°29

Une poutre de section en forme de Z (50\*80\*50) d'épaisseur 6 mm, a été entaillée comme l'indique la figure ci-dessous. Elle est soumise à deux efforts de traction  $F = 10$  kN à ses extrémités A et B. La ligne d'action des forces F est AMB



La section droite S de la poutre est représentée sur la figure ci-contre à l'échelle 1. Les cotes sont en mm.

Le centre de gravité est noté G et les axes centraux y et z sont donnés sur la figure ainsi que les moments d'inerties et produit d'inertie par rapport à ces axes

- 1°) Déterminez les coordonnées de G dans le repère (O;X,Y).
- 2°) Déterminez, dans le repère (G,x,y,z), les composantes du torseur de section au centre de gravité G de la section droite S (les forces en N, les moments en mmN).
- 3°) Déterminez l'équation de l'axe neutre global de la section S dans le repère (G,y,z) en la mettant sous la forme  $z=ay+b$  et représentez cet axe sur la figure.
- 4°) Mettez en place sur la figure le point P le plus tendu.
- 5°) Calculez la valeur de la contrainte normale globale au point P en MPa.

## RÉPONSES N°29

1°)  $X_G = 11,87\text{mm}$  ;  $Y_G = 26,87\text{mm}$

2°)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_G = \vec{F}_A \Rightarrow \begin{cases} N_x = 10^4 \text{ N} \\ 0 \\ 0 \end{cases} \\ \vec{M}_G = \vec{GA} \wedge \vec{F}_A \Rightarrow \begin{cases} 0 \\ M_Y = 1,313 \cdot 10^5 \text{ Nmm} \\ M_Z = 0,887 \cdot 10^5 \text{ Nmm} \end{cases} \end{array} \right.$$

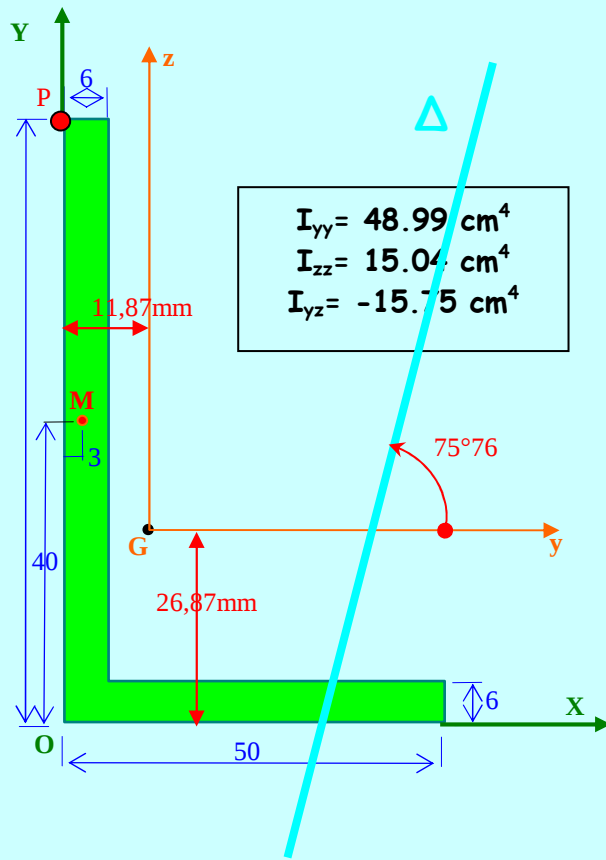
3°)

$$\sigma_{xx}^P = \frac{N_x}{A} - \frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y^P + \frac{M_z I_{yz} + M_y I_{zz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z^P = 0$$

$$z = 3,942y - 113,07$$

4°) point P le + contrainte  $P_{/yz} \begin{cases} -11,87\text{mm} \\ 53,13\text{mm} \end{cases}$

5°)  $\sigma_{xx}^{P, \text{traction}} = 13,44\text{MPa}$      $\sigma_{xx}^{P, \text{flexion}} = 11,81\text{MPa}$      $\sigma_{xx}^P = 25,25\text{MPa}$

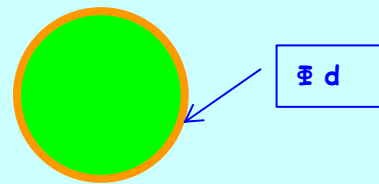
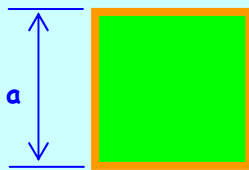


# FLAMBEMENT

## PROBLÈME N°30

A aires égales, quelle est la section, carrée ou circulaire, qui résiste le mieux au flambement?  
(Calculer les élancements des deux barres).

### RÉPONSES N°30



$$A = a^2$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

Même aire  $d = \frac{2a}{\sqrt{\pi}}$

$$I_{vv} = \frac{a^4}{12}$$

$$I_{vv} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$\rho_v = \sqrt{\frac{I_{vv}}{A_0}} = \sqrt{\frac{a^4}{12a^2}}$$

$$\rho_v = \sqrt{\frac{I_{vv}}{A_0}} = \sqrt{\frac{a^4}{4\pi a^2}}$$

$$\lambda = \frac{L_F}{\rho_v} = \frac{L_F \sqrt{12}}{a}$$

$$\lambda = \frac{L_F}{\rho_v} = \frac{L_F \sqrt{4\pi}}{a}$$

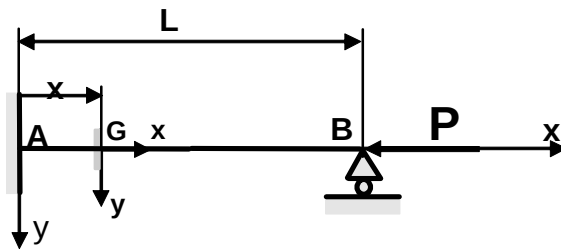
$$P_c = \frac{\pi^2 EI_{vv}}{L_F^2}$$

$$(\sigma_c)_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$\frac{P_c^{\text{carré}}}{P_c^{\text{cercle}}} = \frac{\pi}{3}$$

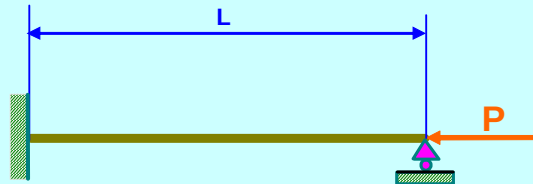
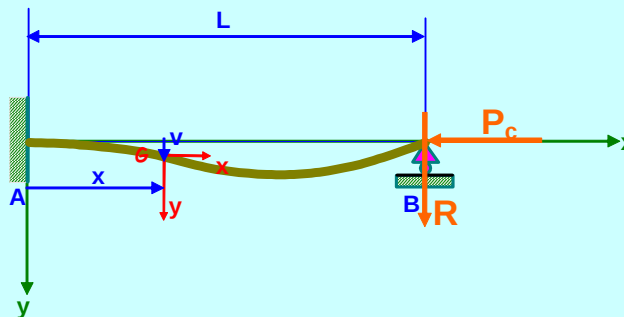
Conclusion : La section carré résiste mieux.

## PROBLÈME N°31



Calculer la charge critique d'EULER de la poutre ci-contre. En déduire la valeur du coefficient  $\mu$ .

## RÉPONSES N°31

Avant déformationAprès déformation

$$M_z = -P_c v + R(L - x)$$

$$v'' = \frac{M_z}{EI_z}$$

$$EI_z v'' + P_c v = R(L - x)$$

Posons :  $\omega^2 = \frac{P_c}{EI_z}$

$$v'' + \omega^2 v = \frac{R}{EI_z}(L - x)$$

Equation différentielle du second ordre avec second membre.

$$v = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x) + \frac{R}{EI_z \omega^2}(L - x)$$

Ecrivons les conditions limites en A et B :

$$\begin{array}{l|l}
 & \text{Encastrement A: } v(0)=0 \Rightarrow 0 = B + \frac{RL}{EI_z \omega^2} \\
 C.L. & \text{Encastrement A: } v'(0)=0 \Rightarrow 0 = A\omega - \frac{R}{EI_z \omega^2} \\
 & \text{Appui B: } v(L)=0 \Rightarrow 0 = A \sin \omega L + B \cos \omega L
 \end{array}$$

D'où le système à résoudre :

$$\begin{array}{l}
 0 = B + \frac{RL}{EI_z \omega^2} \\
 0 = A\omega - \frac{R}{EI_z \omega^2} \\
 0 = A \sin \omega L + B \cos \omega L
 \end{array}$$

Pour que ce système admette des solutions autres que la solution banale tout égal à zéro, écrivons que le déterminant des coefficients des inconnues est nul.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{L}{EI_z \omega^2} \\ \omega & 0 & -\frac{1}{EI_z \omega^2} \\ \sin \omega L & \cos \omega L & 0 \end{vmatrix} = 0$$

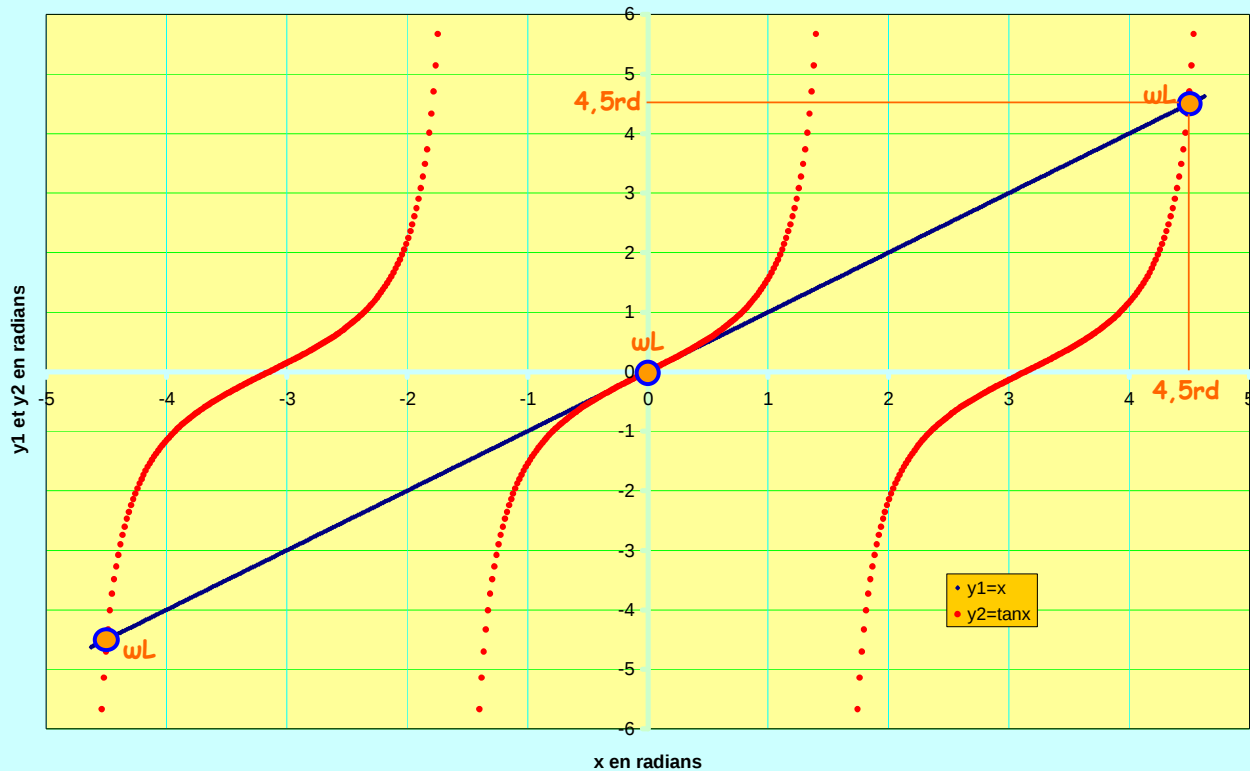
En développant le déterminant, nous obtenons :

$$\tan \omega L = \omega L$$

Equation transcendante dont la résolution ne peut être que graphique ou numérique.

Approchons la solution graphiquement. Traçons la fonction  $y_1 = \omega L$  et  $y_2 = \tan \omega L$ . Les points d'intersection nous donnent les solutions. Nous retenons la plus petite racine non nulle :

$$\omega L = 4,5$$



En utilisant une calculatrice, il est possible d'affiner la solution en utilisant un processus d'encadrement par dichotomie.

$$\omega L = 4,4934 \text{rd}$$

$$\omega^2 = \left( \frac{4,4934}{L} \right)^2 = \frac{P_c}{EI_z}$$

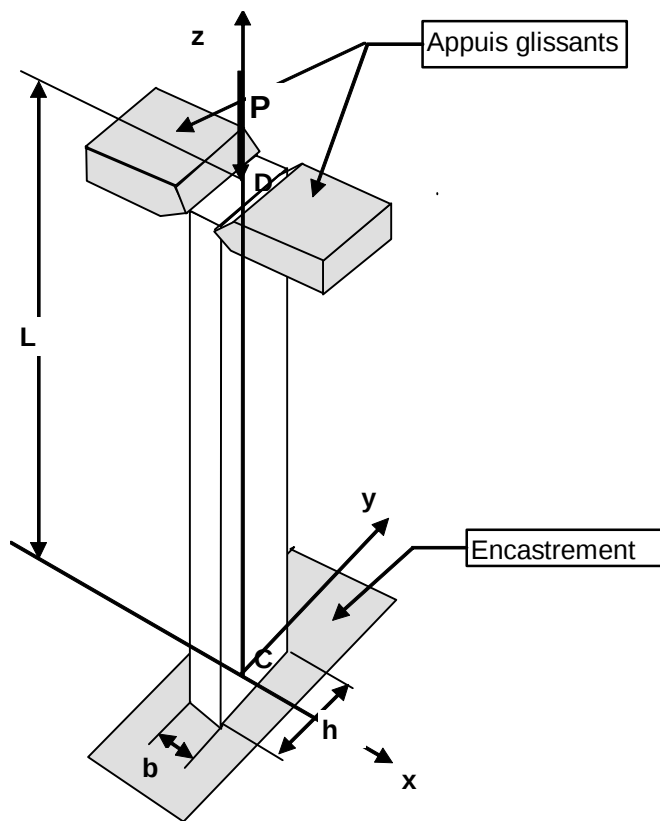
$$P_c = \frac{\pi^2 EI_{vv}}{L_F^2}$$

$$P_c = \frac{4,4934^2 EI_z}{L^2}$$

$$L_F = \mu L$$

$$\mu = \frac{\pi}{4,4934} = 0,7$$

## PROBLÈME N°32



Une barre en acier de longueur  $L$  et de section droite rectangulaire est encastree à l'extrémité C et supporte une force centrée de compression  $P$  à l'autre extrémité D. Deux plaques en vé sont fixées à l'extrémité D permettant à la barre de flamber dans le plan  $xz$  **et aussi** dans le plan  $zy$ .

1°) Déterminer le rapport  $b/h$  pour que les contraintes critiques d'EULER soient égales dans les deux cas.

2°) Sachant que:

$$L = 600 \text{ mm}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$P = 60 \text{ kN}$$

déterminer les dimensions  $b$  et  $h$  de la section droite pour avoir un coefficient de sécurité de 2.5 en appliquant la théorie d'EULER. Vérifier que pour ces dimensions on peut effectivement appliquer la théorie d'EULER sachant

que la limite élastique en compression du matériau vaut 240 MPa.

3°) Calculer le coefficient de sécurité en appliquant la théorie de DUTHEIL.

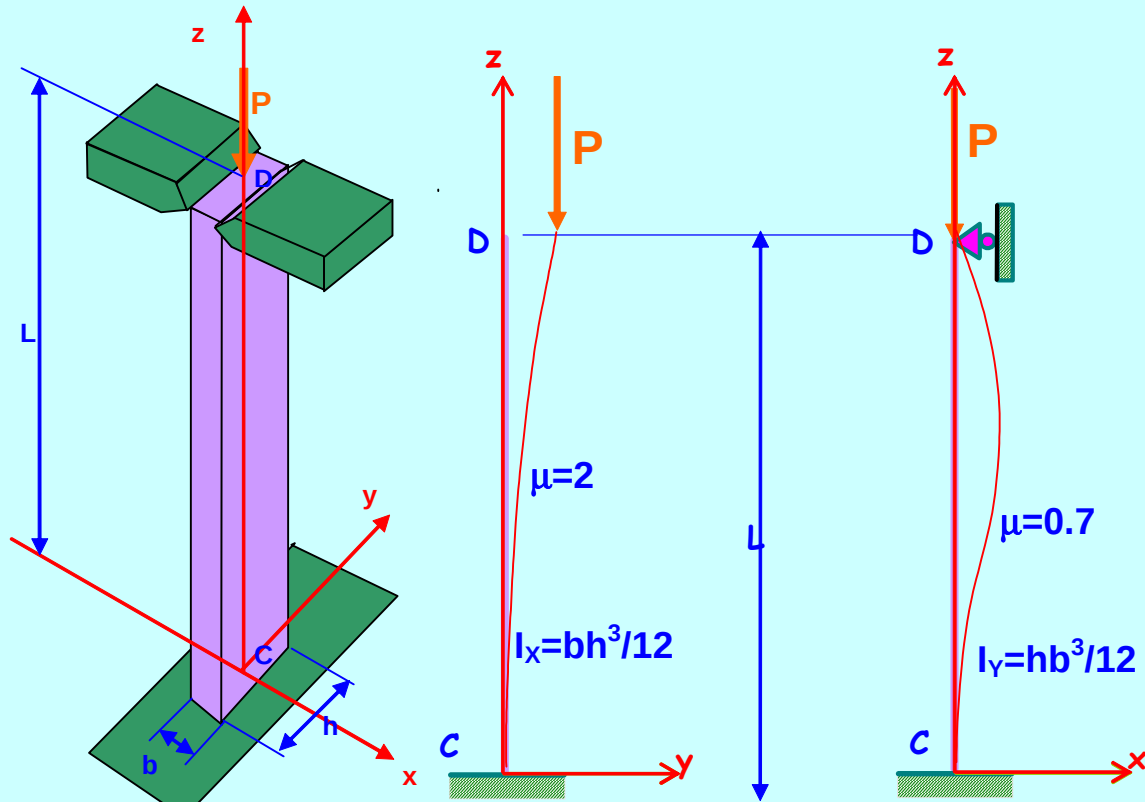
## RÉPONSES N°32

1)

Même contrainte critique d'Euler  $\sigma_c$  implique même élanement  $\lambda$ .

$$\lambda_x = \frac{\mu L}{\rho_x} = \frac{\mu L}{\sqrt{\frac{I_x}{A}}} = \frac{2L}{\sqrt{\frac{bh^3}{12bh}}} = \frac{4L\sqrt{3}}{h}$$

$$\lambda_y = \frac{\mu L}{\rho_y} = \frac{\mu L}{\sqrt{\frac{I_y}{A}}} = \frac{0,7L\sqrt{12}}{b} = \frac{1,4L\sqrt{3}}{b}$$



$$\lambda_x = \frac{\mu L}{\rho_x} = \frac{\mu L}{\sqrt{\frac{I_x}{A}}} = \frac{2L}{\sqrt{\frac{bh^3}{12bh}}} = \frac{4L\sqrt{3}}{h}$$

$$\lambda_x = \lambda_y = \frac{4L\sqrt{3}}{h} = \frac{1,4L\sqrt{3}}{b} \Rightarrow \frac{b}{h} = 0,35$$

2)

$$(\sigma_c)_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \sigma = \frac{P}{A} \quad \alpha = \frac{(\sigma_c)_E}{\sigma} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda_x P} = \frac{\pi^2 E \times 0,35 h^4}{48 L^2 P}$$

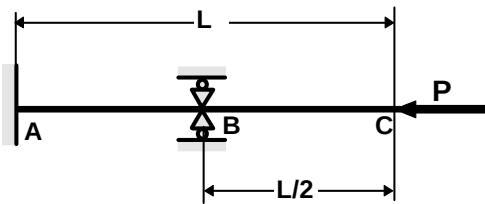
$$h^4 = \frac{48 P L^2 \alpha}{0,35 \pi^2 E} \Rightarrow h = \sqrt[4]{\frac{48 \times 60 \cdot 10^3 \times 600^2 \times 2,5}{0,35 \pi^2 \times 210 \cdot 10^3}} \quad h = 43,48 \text{ mm} \quad b = 0,35 h = 15,22 \text{ mm}$$

Euler est applicable si  $\lambda > \lambda_{\text{lim}}$

$$\lambda_{\text{lim}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{e'}}} = \pi \sqrt{\frac{210 \cdot 10^3}{240}} = 92,9$$

$$\lambda_x = \lambda_y = \frac{4L\sqrt{3}}{h} = \frac{4 \times 600 \sqrt{3}}{43,48} = 95,6$$

## PROBLÈME N°33



On veut vérifier au flambement la barre ABC ci-contre (de diamètre  $d$  et de longueur  $L$ ). La liaison en A est un encastrement, la liaison en B un contact ponctuel sans frottement.

$$P = 110 \text{ kN} \quad d = 30 \text{ mm} \quad L = 0.6 \text{ m.}$$

On utilise un acier de limite élastique  $\sigma_e = 240 \text{ MPa}$  et de module de YOUNG  $E = 210 \text{ GPa}$ .

La charge critique d'EULER vaut:  $P_{CE} = \frac{5,415EI}{L^2}$ . On utilise la théorie de DUTHEIL.

1°) Calculez:

- $\mu$  (on rappelle que, quelles que soient les liaisons, la charge critique d'Euler peut se mettre sous la forme:  $P_{CE} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2}$ ).
- le rayon de giration  $\rho$  de la section (en mm).
- l'élancement  $\lambda$  de la barre.

2°) La barre flambe-t-elle? (Justifiez votre réponse).

a) Si non, calculez le coefficient de sécurité.

b) Si oui, calculez le diamètre  $d$  (en mm) à donner à la barre (les diamètres varient de 2mm en 2mm).

## RÉPONSES N°33

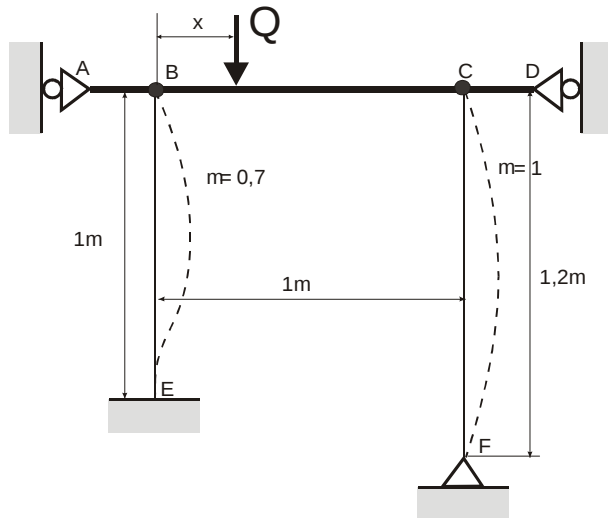
$$P_c = \frac{\pi^2 EI_{vv}}{L_F^2} \quad P_c = \frac{5,415EI_z}{L^2} \quad L_F = \mu L \quad \mu = \frac{\pi}{\sqrt{5,415}} = 1,35$$

$$\rho_v = \sqrt{\frac{I_{vv}}{A_0}} = \frac{d}{4} = 7,5 \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{L_F}{\rho_v} = \frac{\mu L}{\rho_v} = 108$$

$$\lambda_{\text{lim}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} = \pi \sqrt{\frac{210 \cdot 10^3}{240}} = 92,93$$

## PROBLÈME N°34



La barre rigide ABCD est supportée par deux colonnes BE et CF susceptibles de flamber (voir figure ci-contre). Les liaisons ponctuelles en A et D empêchent les déplacements latéraux des points B et C. Les liaisons en B, C et F sont des verrous, la liaison en E est un encastrement. Les deux colonnes BE et CF ont une section droite carrée de 16 mm de côté. Le module de YOUNG du matériau vaut 210 GPa, ses limites élastiques en traction et compression sont identiques et valent 240

MPa.

1°) Montrer que l'on peut appliquer la théorie d'EULER pour calculer les charges critiques qui font flamber les colonnes BE et CF. Calculer alors ces charges critiques (en kN), en appliquant la théorie d'EULER.

2°) Une force verticale Q agit sur la barre rigide ABCD à une distance x de la colonne BE.

a) La distance x vaut 0.4 m.

Calculer (en kN) la valeur critique de la charge Q qui fait flamber l'une des deux colonnes, en précisant la colonne concernée.

b) La distance x peut varier de 0 à 1 m.

Pour quelle valeur de x (en mm) la valeur critique de Q est-elle maximum? En déduire (en kN) la valeur critique maximum de Q.

## RÉPONSES N°34

1)

$$\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} = \pi \sqrt{\frac{210 \cdot 10^3}{240}} = 92,93$$

$$\rho_v = \sqrt{\frac{I_{vv}}{A_0}} = \sqrt{\frac{a^4}{12a^2}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

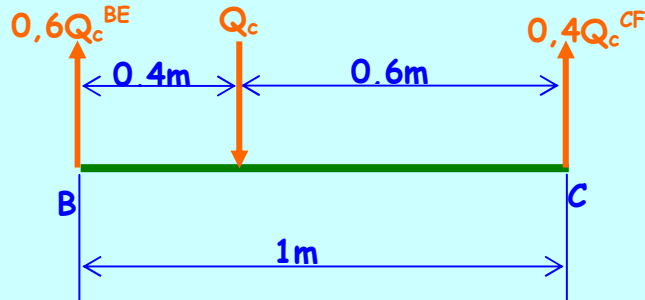
$$\lambda = \frac{L_F}{\rho_v} \begin{cases} \lambda_{BE} = \frac{0,7 \times 1000}{16} = 151,55 \\ \lambda_{CF} = \frac{1200}{16} = 259,8 \end{cases}$$

$$\lambda_{CF} > \lambda_{BE} > \lambda_{lim} \quad \text{Euler est applicable}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI_{vv}}{L_F^2} = \frac{\pi^2 EI_{vv}}{(\mu L)^2} \begin{cases} P_c^{BE} = \frac{\pi^2 \times 210.10^3 \times 16^4}{(0,7 \times 1000)^2 \times 12} = 23,1kN \\ P_c^{CF} = \frac{\pi^2 \times 210.10^3 \times 16^4}{1200^2 \times 12} = 7,86kN \end{cases}$$

2)

a)

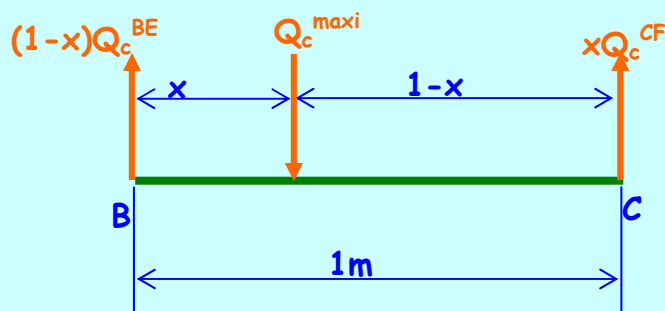


$$P_c^{BE} = 23,1kN = 0,6Q_c^{BE} \Rightarrow Q_c^{BE} = 38,5kN$$

$$P_c^{CF} = 7,86kN = 0,4Q_c^{CF} \Rightarrow Q_c^{CF} = 19,65kN$$

Donc  $Q_c = 18,7kN$  et c'est la colonne CF qui flambe

b)



Lorsque les deux barres flambent en même temps  $Q_c$  est alors maxi.

$$P_c^{BE} = (1-x) \times Q_c^{BE}$$

$$P_c^{CF} = x \times Q_c^{CF}$$

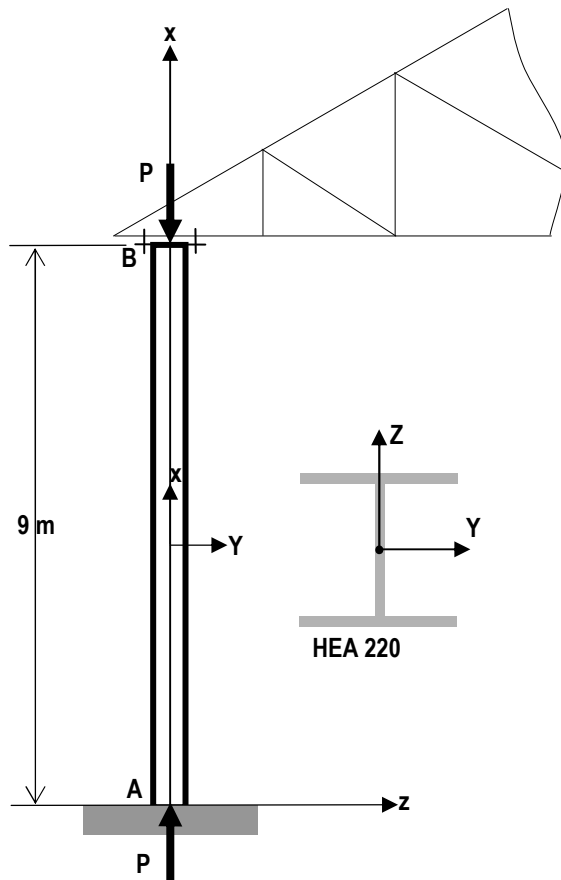
$$Q_c^{\max i} = Q_c^{BE} = Q_c^{CF}$$

$$\frac{P_c^{BE}}{1-x} = \frac{P_c^{CF}}{x}$$

$$\frac{23,1}{1-x} = \frac{7,86}{x} \Rightarrow x = 0,254m$$

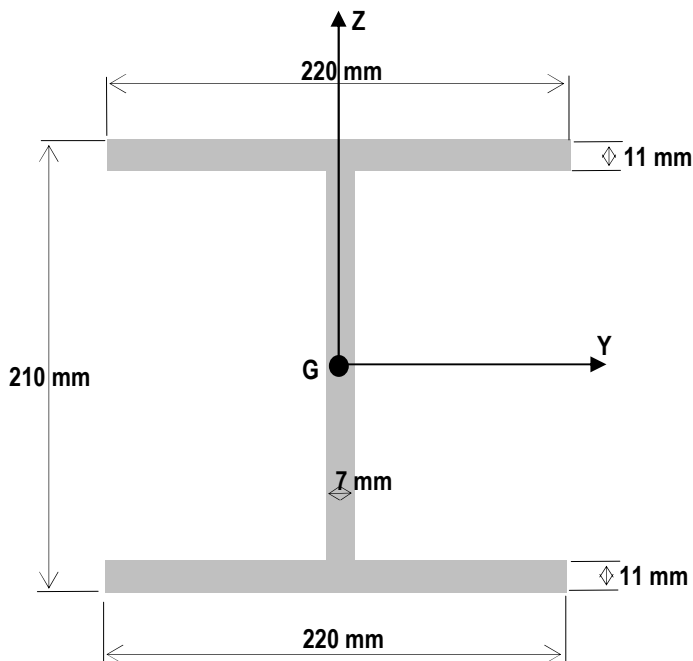
$$Q_c^{\max i} = \frac{P_c^{CF}}{x} = \frac{7,86}{0,254} = 31kN$$

## PROBLÈME N°35



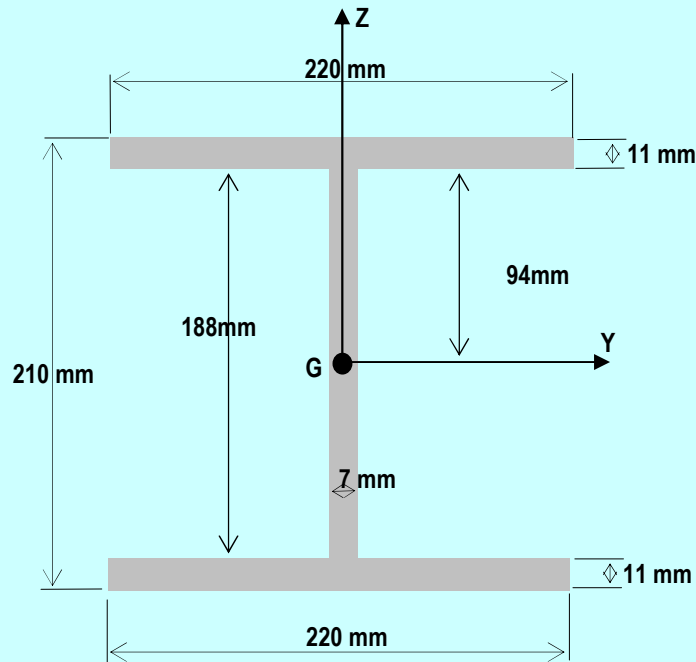
Considérons la structure représentée sur la figure ci-dessous. Le poteau AB de longueur 9m, dont la section droite est un profilé HEA 220 est soumis à un effort de compression  $P$ . Il est encasturé à son extrémité A, la liaison en B est considérée comme une articulation dans le plan  $xz$  (rotation possible autour de  $y$  soit  $\mu=0,7$ ) et comme un encastrement dans le plan  $yz$  (rotation empêchée autour de  $x$  soit  $\mu=0,5$ ). Le matériau est un acier E240 dont les caractéristiques élastiques sont :  $\sigma_e=\sigma_c=240\text{MPa}$  et  $E=210\text{GPa}$ .

- 1) Calculer les moments d'inertie principaux  $I_y$  et  $I_z$  de la section droite de la poutrelle (en  $\text{cm}^4$ ).
- 2) Déterminer le plan dans lequel le poteau risque de flamber, en calculant les élancements dans les deux plans.



- 3) En appliquant la théorie d'Euler, calculer la charge maximale (en kN) de compression admissible pour avoir un coefficient de sécurité de 2.
- 4) En prenant la charge calculée en 3), calculer le coefficient de sécurité d'après la théorie de Dutheil.

## RÉPONSES N°35



$$1^{\circ}) I_Y = \frac{188^3 \cdot 7}{12} + 2 \left( \frac{11^3 \cdot 220}{12} + 99,5^2 \cdot 11 \cdot 220 \right) = 5184,21 \text{ cm}^4 \quad I_Z = 2 \left( \frac{220^3 \cdot 11}{12} \right) + \frac{7^3 \cdot 188}{12} = 1952,27 \text{ cm}^4$$

$$A = 220 \cdot 11 \cdot 2 + 188 \cdot 7 = 6156 \text{ mm}^2$$

$$2^{\circ}) \begin{cases} \rho_Z = \sqrt{\frac{I_Z}{A}} = 5,631 \text{ cm} \Rightarrow \lambda_{xz} = \frac{0,7l}{\rho_Z} = 111,88 \\ \rho_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = 9,177 \text{ cm} \Rightarrow \lambda_{yz} = \frac{0,5l}{\rho_Y} = 49,03 \end{cases}$$

Flambage dans le plan xz

$$3^{\circ}) \alpha_E \sigma \leq \sigma_C \quad \sigma_C = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{xz}^2} \quad P = 509,66 \text{ kN}$$

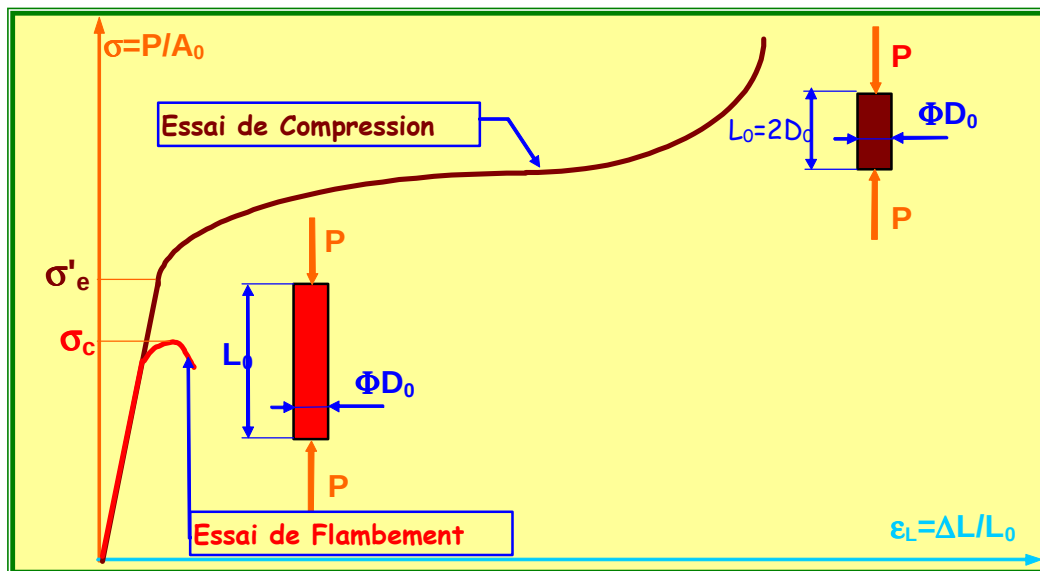
$$4^{\circ}) k \sigma \leq \sigma_e \quad k = 2,236 \quad \alpha_D = 1,296$$

# FLAMBEMENT

## 1. Définition :

Effectuons un essai de compression sur une éprouvette longue, de même ordre de grandeur que celle utilisée en traction. Nous constatons qu'elle fléchit avant d'atteindre la limite d'élasticité en compression. La flèche augmente considérablement à la suite d'une instabilité, entraînant la ruine de la structure. Ce phénomène est le flambage. La valeur maximum de la contrainte de compression est la contrainte critique de flambage. C'est le seul cas où la contrainte de compression est prise positive par convention. Elle est donnée par :

$$\sigma_c = \frac{P_c}{A_0}$$



Ce phénomène de flambement est très difficile à prévoir car les imperfections géométriques de la poutre, de sa section, du matériau et des conditions d'applications des sollicitations et des liaisons rentrent pour une grande part dans le flambement.

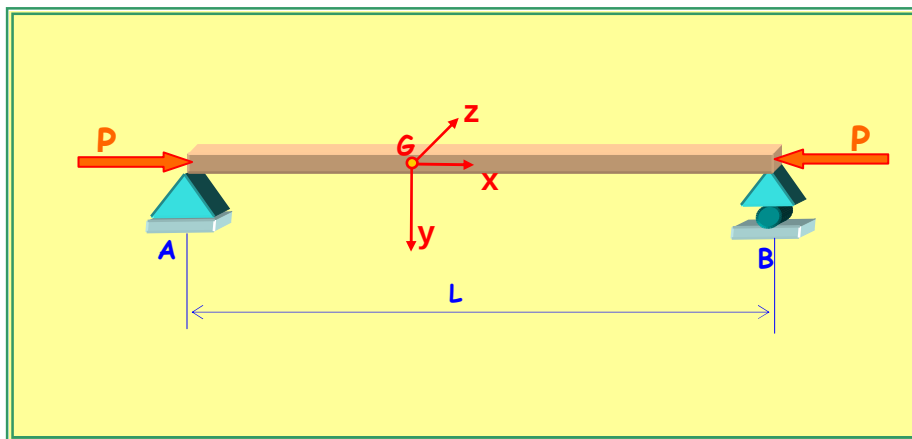
Pour étudier le flambement, il faut abandonner une des hypothèses fondamentales du cours sur la théorie des poutres. Lors du flambement les déplacements ne sont plus petits, nous ne pouvons plus les négliger et la théorie du premier ordre ne convient pas à expliquer le phénomène. Nous devons considérer une théorie au deuxième ordre, où les configurations initiales et finales des poutres ne coïncident plus. Nous allons considérer la poutre dans son état déformée pour calculer le Torseur de Section.

## 2 Théorie d'EULER

### 2.1 Cas de base

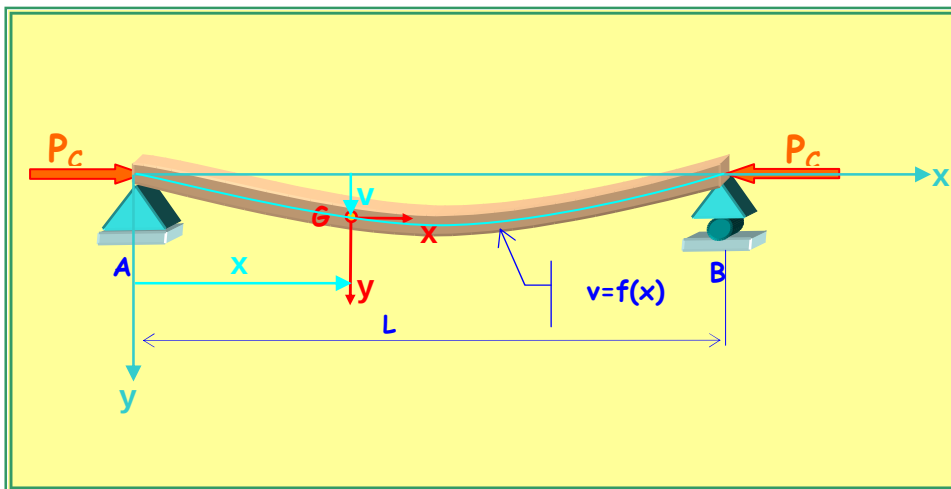
Considérons une barre de longueur  $L$ , articulée à ses deux extrémités, soumise à un effort de compression. Les articulations sont parfaites, c'est à dire dans toutes les directions. La poutre flambe, c'est à dire fléchit dans le plan perpendiculaire à l'inertie minimum (voir § sur les inerties).

#### Avant Déformation :



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_G = \vec{F}_B \Rightarrow \begin{cases} N_x = -P \\ 0 \\ 0 \end{cases} \\ \vec{M}_G = \vec{GB} \wedge \vec{F}_B \Rightarrow \vec{0} \end{array} \right.$$

#### Après Déformation :



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_G = \vec{F}_B \Rightarrow \begin{cases} N_x = -P \\ 0 \\ 0 \end{cases} \\ \vec{M}_G = \vec{GB} \wedge \vec{F}_B \Rightarrow \begin{cases} 0 \\ 0 \\ M_z = -P_c v \end{cases} \end{array} \right.$$

Appliquons l'équation de la déformée vue au chapitre flexion :  $v'' = \frac{M_z}{EI_z}$ .

Le moment fléchissant en G :  $M_z = -P_c v$  d'où :  $EI_z v'' + P_c v = 0$

Posons  $\omega^2 = \frac{P_c}{EI_z}$

$$v'' + \omega^2 v = 0$$

Equation différentielle du second ordre à coefficient constant et sans second membre. La solution générale s'écrit :

$$v = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

Les conditions aux limites aux appuis nous permettent de calculer les constantes d'intégration A et B.

$$C.L. \left| \begin{array}{l} \text{Appui A: } v_{(0)} = 0 \Rightarrow A = 0 \\ \text{Appui B: } v_{(L)} = 0 \Rightarrow B \sin(\omega L) = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} B \neq 0 \\ \sin \omega L = 0 \Rightarrow \omega L = k\pi \end{array}$$

L'équation de la déformée s'écrit :  $v_{(x)} = B \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$  et compte-tenu de  $\omega^2 = \frac{P_c}{EI_z}$

$$P_c = \frac{k^2 \pi^2 EI_z}{L^2}$$

La première charge critique est donnée pour  $k=1$  :

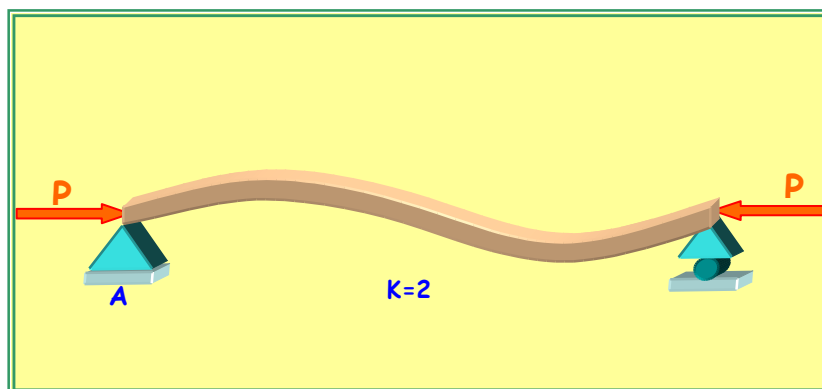
$$P_c = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$$

et la déformée s'écrit :

$$v_{(x)} = B \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right)$$

La déformée est donc sinusoïdale, mais cette théorie énoncée par Euler ne permet pas de résoudre totalement le problème. En effet la charge critique  $P_c$  est indépendante de la flèche, et la flèche ne fait pas intervenir le matériau ce qui paraît surprenant. Cette théorie n'est qu'une première approche.

On peut de la même manière calculer les autres valeurs de charges critiques pour  $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$ . Les déformées associées à ces différentes charges critiques sont appelées modes de flambement.



Si  $k=2$

$$P_c = \frac{4\pi^2 EI_z}{L^2}$$

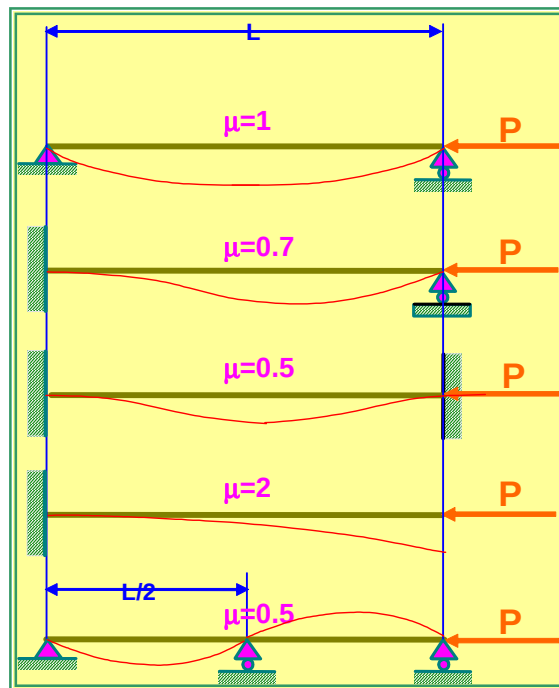
$$v_{(x)} = B \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right)$$

## 2.2 influence des liaisons.

En se rapportant au cas de base, dans tous les cas, la charge critique peut se mettre sous la forme :

$$P_c = \frac{\pi^2 EI_{vv}}{L_F^2}$$

Où  $I_w$  est l'inertie minimum,  $L_F$  est la longueur fictive de flambage, avec  $L_F = \mu L$  et  $\mu$  un coefficient qui tient compte de l'influence des liaisons.



## 3 Contrainte critique d'EULER

La contrainte critique d'EULER est donnée par :

$$(\sigma_c)_E = \frac{P_{cr}}{A_0} = \frac{\pi^2 EI_{vv}}{L_F^2 A_0}$$

Sachant que :  $\rho_v = \sqrt{\frac{I_{vv}}{A_0}}$  est le rayon de giration par rapport à l'axe v. et que  $\lambda = \frac{L_F}{\rho_v}$  est

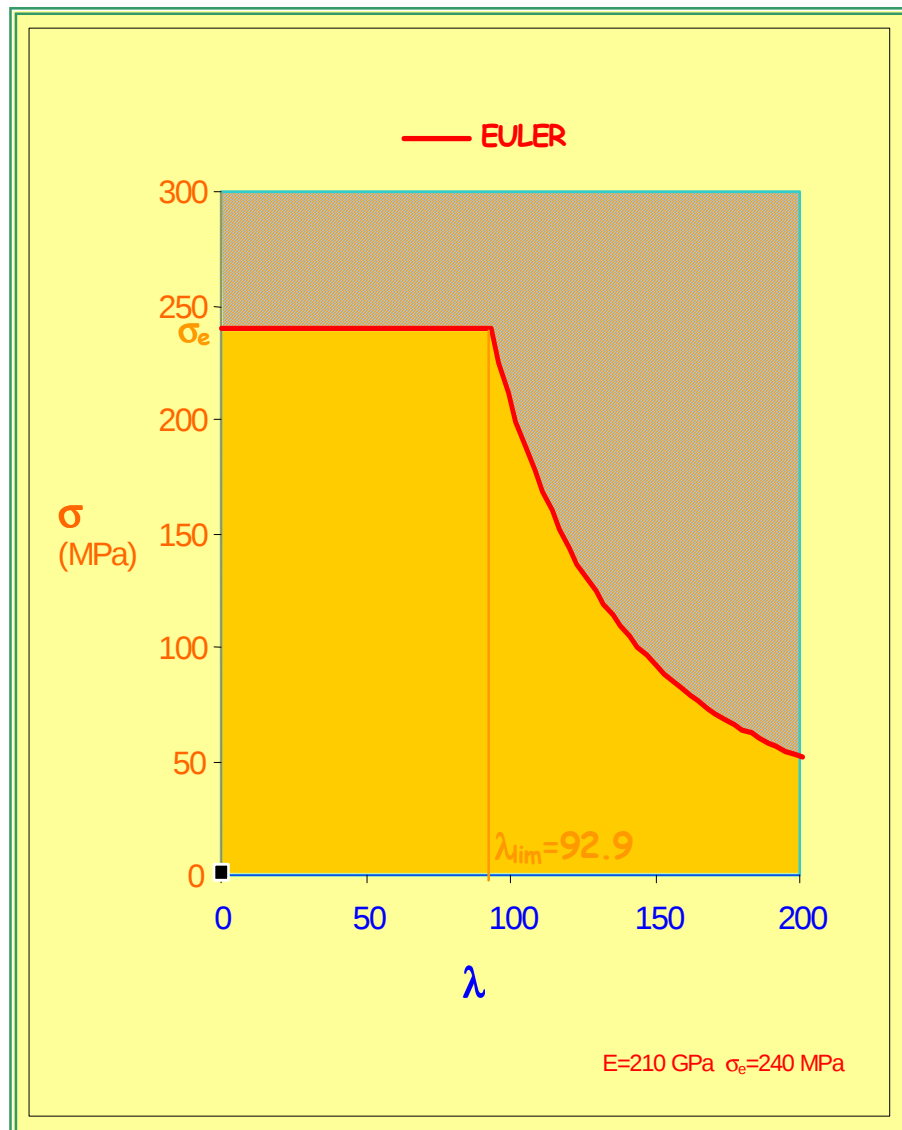
l'élancement de la poutre, nous avons :

$$(\sigma_c)_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Nous pouvons tracer la courbe de flambage d'EULER en fonction des élancements pour un matériau donné. La courbe d'EULER doit être limitée par la limite d'élasticité de

compression, ce qui nous impose un élancement limite

$$\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e'}}$$



Si  $\lambda > \lambda_{lim}$ , nous faisons une vérification à la condition de non flambage par :

$$\sigma = \frac{P}{A_0} < (\sigma_c)_E$$

Si  $\lambda < \lambda_{lim}$ , nous faisons une vérification à la compression pure par :  $\sigma = \frac{P}{S_0} < \sigma_e$

La courbe d'EULER est composée de deux courbes d'équations différentes, ce qui n'est pas satisfaisant. De plus, pour de faibles élancements, les points expérimentaux sont situés au dessous de la courbe. La théorie d'Euler a ses limitations, et ne permet de décrire que le moment où la poutre flambe.

# UNITÉS DE MESURE

Les unités de mesure légales en France font l'objet du décret du 3 Mai 1961. Le système ainsi défini est le système métrique décimal, à six unités de base, appelé système international SI.

## 1. Les unités de base sont:

| Grandeur            | nom          | symbole |
|---------------------|--------------|---------|
| Longueur            | mètre        | m       |
| Masse               | kilogramme   | kg      |
| Temps               | seconde      | s       |
| Intensité           | ampère       | A       |
| Température         | degré Kelvin | K       |
| Intensité lumineuse | candela      | cd      |
| Quantité de matière | mole         | mol     |

## 2. Les unités secondaires concernant le Dimensionnement des Structures sont:

Le newton (symbole N) : unité de force.

Le newton-mètre (symbole Nm) : unité de moment.

Le joule (symbole J) : unité d'énergie, de travail et de chaleur.

Le pascal (symbole Pa) unité de contrainte et de pression.

$$1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$$

Le watt (symbole W) : unité de puissance.

Le radian (symbole rd) : unité d'angle.

### 3. Parmi les multiples des unités secondaires, on utilise en Dimensionnement des Structures:

Le kilonewton (symbole kN) : unité de force.

$$1\text{kN} = 10^3 \text{ N}$$

Le mégapascal (symbole MPa) : unité de contrainte.

$$1\text{MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 1\text{N/mm}^2$$

Le gigapascal (symbole GPa) : unité de contraintes.

$$1\text{GPa} = 10^9 \text{ Pa} = 10^3 \text{ MPa} = 1\text{kN/mm}^2$$

### 4. Les unités, hors système, autorisées sont:

Le degré d'angle (symbole °) : unité d'angle.

La calorie (symbole cal) : unité de chaleur (1cal = 4.18 J).

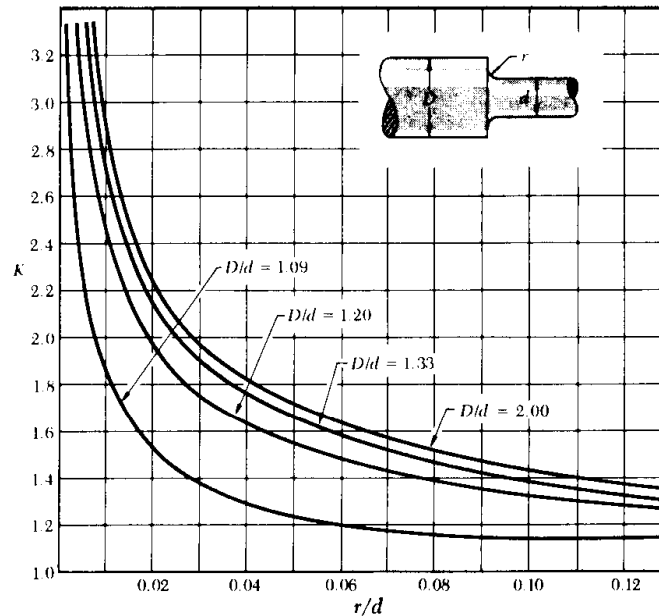
Le degré de température celcius (symbole C)

.....

## *ANNEXES*

## ANNEXE N°1-COEFFICIENT DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE EN TORSION-FLEXION

### TORSION



### TORSION

Fig. 3.31 Stress-concentration factors for fillets in circular shafts.

†L. S. Jacobsen, "Torsional-Stress Concentrations in Shafts of Circular Cross Section and Variable Diameter," *Trans. A.S.M.E.*, vol. 47 (1925), pp. 619-638.

### FLEXION

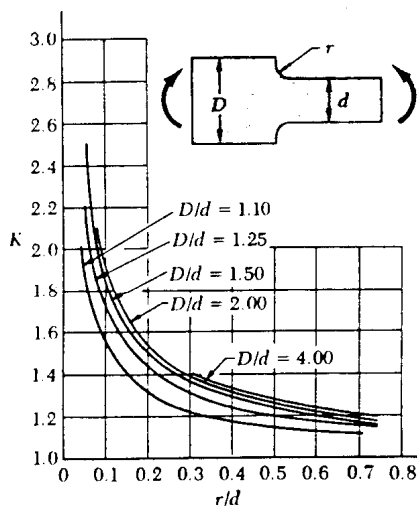


Fig. 4.27 Stress-concentration factors for flat bars with fillets under pure bending.†

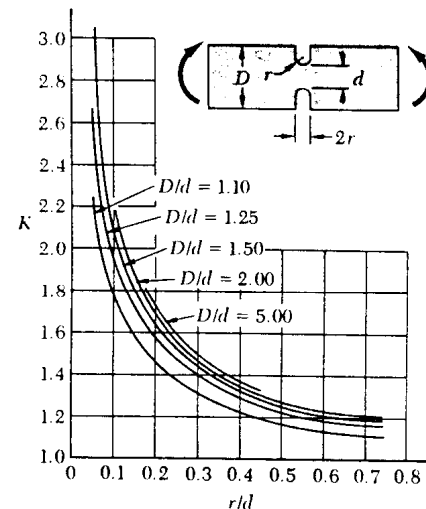
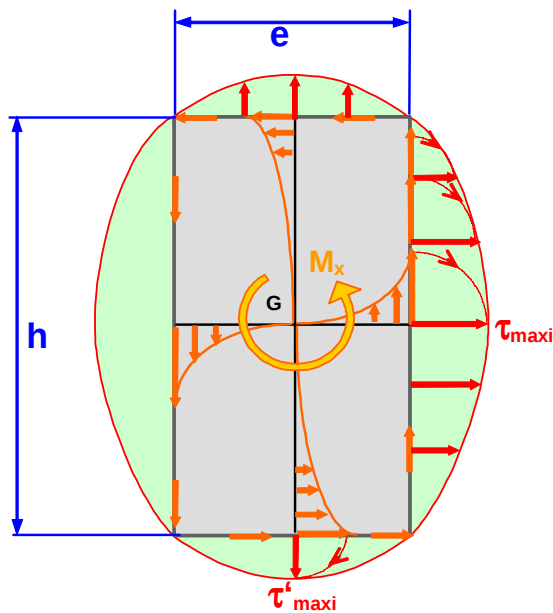


Fig. 4.28 Stress-concentration factors for flat bars with grooves under pure bending.†

## ANNEXE N° 2 TORSION DES SECTIONS RECTANGULAIRES



La figure ci-contre permet de visualiser la répartition des contraintes tangentielles de torsion dans une barre à section rectangulaire.

On montre alors, en élasticité, que:

1°) La relation entre le moment de torsion et l'angle unitaire de torsion est:

$$\theta'_x = \frac{M_x}{GJ}$$

où J est le **moment d'inertie de torsion** de la section rectangulaire. Il se calcule par la relation suivante:

$$J = k_1 e^3 h$$

où  $k_1$  est une fonction du rapport  $h/e$  donné dans le tableau suivant:

| $h/e$ | 1     | 1.5   | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 8     | 10    | $\infty$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $k_1$ | 0.141 | 0.196 | 0.229 | 0.263 | 0.281 | 0.291 | 0.299 | 0.307 | 0.313 | 1/3      |
| $k_2$ | 0.208 | 0.231 | 0.246 | 0.267 | 0.282 | 0.291 | 0.299 | 0.307 | 0.313 | 1/3      |
| $k_3$ | 1.000 | 0.859 | 0.795 | 0.753 | 0.745 | 0.744 | 0.743 | 0.742 | 0.742 | 0.742    |

**N.B.** Lorsque la section droite est circulaire la relation entre le moment de torsion et l'angle unitaire de torsion est:

$$\theta'_x = \frac{M_x}{GI_G}$$

Le moment d'inertie de torsion est alors le **moment d'inertie polaire** du cercle ( $\frac{\pi D^4}{32}$ ).

2°) La contrainte maximum de torsion (au milieu des grands côtés du rectangle) vaut:

$$\tau_{\max i} = \frac{|M_x|}{k_2 e^2 h}$$

où  $k_2$  est une fonction du rapport  $h/e$  donné dans le tableau précédent.

3°) La contrainte au milieu des petits côtés du rectangle vaut:

$$\tau'_{\max i} = k_3 \tau_{\max i}$$

où  $k_3$  est une fonction du rapport  $h/e$  donné dans le tableau précédent.