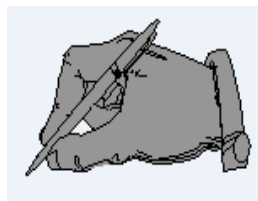
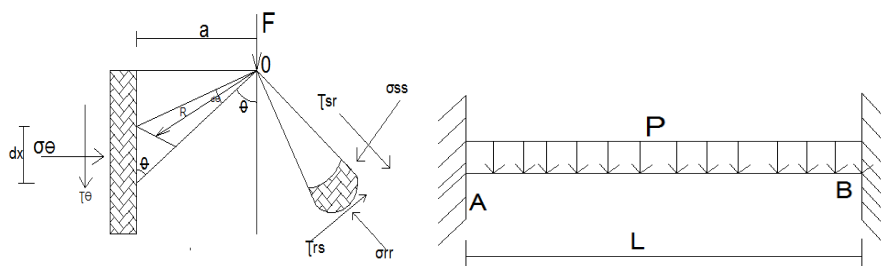


GUIDE POUR LA COMPREHENSION DE LA RESISTANCE DES MATERIAUX

EN MATIERE DE CONSTRUCTION DES OUVRAGES

Réalisé par l'Ingénieur B.T.P : OTEMAKUMI LOTENGO Merlin (OLM SUPREME)



GUIDE POUR LA COMPREHENSION DE LA RESISTANCE DES MATERIAUX

EN MATIERE DE CONSTRUCTION DES OUVRAGES

REALISE PAR L'lr B.T.P :
OTEMAKUMI LOTENGO MERLIN
(OLM SUPREME)

AVANT PROPOS

Le destin de tout intellectuel est de contribuer à faire avancer la science grâce à une expérience personnelle, qui contribue à l'enrichissement du savoir déjà acquis voilà qui justifie la matérialisation des expériences utiles acquises durant nos études dans la compréhension du cours de résistance des matériaux (R.D.M), qui a pour une matière difficile pour nombre de nos condisciples engagés dans l'études d'ingénieurs.

Nous tenons à exprimer notre sincère reconnaissance à tous les corps uniques et scientifiques qui ont participé à notre formation à l'UNIKIN, dans la faculté polytechnique ainsi l'I.N.B.T. P où nous sommes venus à bout de notre formation en construction des ouvrages. Nous pensons particulièrement à **l'Ir Moke Mbenga Emmanuel, Ir assistant Mukinayi Mukendi Joel, Ir Zina Mutombo, Ir Gustave Cyani.**

Nous avons l'espoir que tous les ingénieurs en construction pourront trouver dans le présent ouvrage le fruit d'une expérience, qui pourrait non seulement servir mais aussi enrichi pour le plus grand bien de la science en cette matière.

Nous implorons une certaine indulgence pour certaines insuffisances, qui permanent paraîtra aux yeux des ingénieurs plus expérimentée. Leurs remarques et conseils discret vont certes contribuer à l'amélioration de cette expérience.

Nous remercions particulièrement le **CT Floribert Kapebwa**, qui a bien accepté de corriger la forme de ce manuel. Mes remerciements s'adressent aussi à :

- Ma famille biologique (famille Lotengo) : Papa Médard, maman Louise, Augustin Welo, Noëlla Asele, Armel Edungu, Didi Dimandja, Divine Pala, Osongo Exaucé, Abigaël Ndjakambolo.
- La famille Zakuadia : papa Modeste, maman Grace, Espoir Luzolo, **VICTORINE NLANDU**, Christelle Lukombo, Modeste Nsukulu et Kidima dieu le veut
- Ma famille élargie (la famille OTEMAKUMI)
- Aux ingénieurs BTP : Tsabika Kahungu Sosthène, BOLA BONYENGA SOUVENIR, Inkulu papy, Nsimba Lukeba Fils, Ohanga Ndjeka Evariste, Powa Lokasha, Onzeama Mondanga Celia, Guhwima Gwanzambi Guy, Nkulu Azevedo, Roland Wala Nsele, Malongo Joel, Nsoni Kifimi, Odia Etumbil, Tibasima Wamara Remis, Beauniche Lukombo, Osako Osenge, Omalosombe Raphael, Ntumba Mudiande Jonathan, Etayaka Mondanga Nash, Ngoy Mwiyande Saint, Lukoki Gosi Peter, Otshudi Loketo Isaac, Midi Muenda Franck, Ndembe Mabumba Daddy, Kandongo Lutumba Parfait, Mawungu Bugiongo Guillaume, Mabala Nehemie, Mwilu Jeancy, Tama Yimbi Quelqu'un, Takamba Francis, Vunga Heritier, Esperant Wenga et Longanga Djoke Hugo

- Tous les anciens élèves du complexe scolaire les bambins (2010) : Muboyayi Corneil, Hénoch Luyeye, Mani, Gaza Monuc, Chimelle Mandudi, Adeseni Patricia, Bofenda Nathan, Samy Ngunde, Grace Mukeveri, Edith Mbaya, **Louise Mpialu**, Yasser Kele, Jérôme Malilo, Kabedi Kabwe Claudia, Luvefua Armel, Tshukamenga Nsimba Josiane
- **ALINE YENGA IPOMA**
- Toute la promotion de l'INBTP 2017
- Toutes les congrégations des Témoins de Jéhovah
- Mes écoles : CS Malamba (masina), CS Angelia (Matete), EP4 Makelele (Bandalungwa) et CS Les Bambins (Bandalungwa)
- **ASELO OTEMAKUMI MERV**
- **MAMAN CHRISTINE TOYITOYI**
- Tous les étudiants et étudiantes de l'INBTP/KINSHASA
(Institut National du Bâtiment et des Travaux Publics/Kinshasa)

NOTE AUX UTILISATEURS

Ce guide sur la compréhension du cours de résistance des matériaux garde l'idée et les objectifs du guide de la statique appliquée, et compte deux parties : théorique et pratique. Les applications résolues indiquent la voie, la marche, les méthodes pour la compréhension de la RDM.

Certains exercices restent non résolus. Le but est d'aider l'utilisateur de ce manuel à s'appliquer aussi personnellement. L'ensemble des connaissances déjà acquise en guise de prés – requis nous sera d'une certaine utilité en vue de la meilleure compréhension des démarches proposées dans ce livre.

Ce sont des connaissances indispensables dans le domaine de génie civil, connaissances sans lesquelles on ne peut pas se dire ingénieur. Notre souci a été d'arriver à décrire le plus simplement possible les principes et méthodes appliquées en RDM.

Ir BTP: OTEMAKUMI LOTENGO MERLIN (OLM SUPREME)

Facebook: OLMSUPREME OTEMAKUMI

I.N.B.T.P/Kinshasa 2017

PREFACE

Ce nouveau GUIDE POUR LA COMPREHENSION DE LA RESISTANCE DES MATERIAUX de l'ingénieur OTEMAKUMI LOTENGO MERLIN apporte une contribution originale et de qualité à la connaissance des problèmes de l'élève ingénieur en BTP qui, bien que devenant de plus en plus fréquents dans la technique de l'ingénieur, n'en sont pas, pour autant, parfaitement résolus.

OTEMAKUMI LOTENGO MERLIN, ingénieur BTP, a eu le grand mérite de mettre à la disposition des élèves ingénieurs en BTP un guide pratique de la RDM et d'y joindre le fruit de sa profonde expérience, acquise au cours de son parcours à l'INBTP/Kinshasa.

Je remercie OTEMAKUMI de son remarquable effort de critique et son désir ardent de mettre à la disposition des élèves ingénieur et pourquoi pas aux enseignants un outil de travail pour le perfectionnement de la formation des ingénieurs BTP, effort qui apparaît encore exceptionnel lorsque l'on examine les obstacles rencontrés par l'intéressé pour accomplir une œuvre qui apparaît petite à première vue, mais grande et louable lorsqu'on y parcourt le contenu.

Je souhaite à cet ouvrage le succès qu'il mérite auprès des ingénieurs des structures, enseignants des structures et élèves ingénieur en structure, auxquels il rendra de grands services grâce à son caractère pratique.

MUKINAYI MUKENDI Joel

Ir en Bâtiment et travaux publics et assistant à l'INBTP

CONVERSION DES UNITES

N°	UNITES	CONVERSIONS
1	1 MPA (méga pascal)	10 Kg/cm ²
2	1 MPA	1000 KN/m ²
3	1 t (tonne)	1000 kg
4	1 KN (kilo newton)	100 kg
5	1 KN	1000 N
6	1 L (litre)	1 kg
7	1 m ³ (mètre cube)	1000 litres
8	1 L	1 dm ³
9	1 t (tonne)	10 KN
10	1 m (mètre)	100 cm = 1000 mm
11	1 Pa (pascal)	1 N/m ²
12	1 m ²	10.000 cm ² = 1.000.000 mm ²
13	1 m ³	1.000.000 cm ³ = 1.000.000.000 mm ³
14	1 KPa (kilo pascal)	1000 Pa
15	1 MPA	1.000.000 Pa = 10 ⁶ Pa
16	1 MPA	10 bars
17	1 bar	1 dan/cm ²
18	1 bar	100.000 Pa
19	1 Pa	1 N/m ²
20	1 atm (atmosphère)	10330 Kg/m ²
21	1 poise	0,1 Pas (pascal seconde)
22	1 Pas	1 kg/ms (kilogramme par mètre seconde)
23	1 St (stock)	10 ⁻⁴ m ² /s = 0,0001 m ² /s
24	1 MPA	1 N/mm ²
25	1 bar	1 Patm (pression atmosphérique)
26	1 bar	1000 Mbar (milli bar)
27	1 Patm	100.000 Pa = 10 ⁵ Pa
28	1 Kgf (kilogramme force)	9,81 N
29	1 GPa (giga pascal)	1000 MPA
30	1 MN (méga newton)	10 ⁶ N
31	1 MN	100 t
32	1 a (are)	100 m ² = 1 dam ²
33	1 ha (hectare)	10.000 m ² = 100 dam ² = 1 hm ²
34	1 ca (centiare)	1 m ²
35	1 st (stère)	1 m ³
36	1 tr (tour)	2π rad (pi radiant)
37	1° (degré)	π rad/180
38	1' (minute)	$\frac{\pi}{10.800} \text{ rad}$
39	grade	π/200 rad
40	1 pied	12 pouces
41	1 m	3.281 pieds
42	1 KPa (kilo pascal)	0,001 N/ mm ²
43	1 KN/m	1 N/mm

CHAP 1. CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS PLANE

1.1 Définition :

- la géométrie est une science qui étudie les formes et leurs mesures.
- Etude de la grandeur des lignes, des surfaces et des volumes.

1.2 **But** : Dans toute construction, les formes des sections qui sont utilisées ont au moins une forme géométrique connue ou à déduire.

D'où, il est important que l'ingénieur ou le concepteur sache au minimum l'évaluation de leurs caractéristiques.

On parlera des caractéristiques cartésiennes, à savoir la surface, le centre de gravité, le moment statique, le moment d'inertie, le moment d'inertie polaire, le produit d'inertie et les formules dérivées de ces dernières.

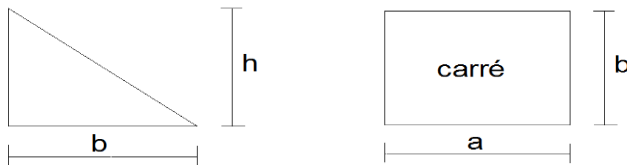
1.3 Surface

1.3.1 **Définition** : C'est la surface d'un corps, ce qui le limite dans l'espace

$$S = \Delta = \int_a^b dA = \int_a^b dS$$

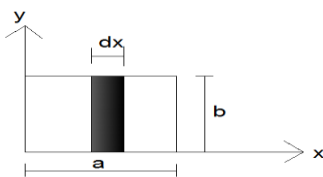
Questions

Soit les figures suivantes trouver leurs surfaces.



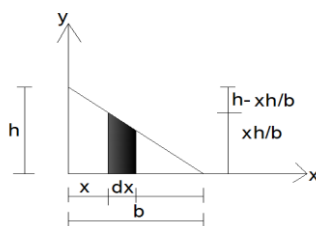
Résolutions

a)



$$dA = b dx \Rightarrow A = \int_0^a b dx = b[X]_0^a = ab$$

b)



$$b \rightarrow h$$

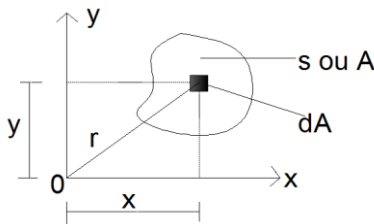
$$X \rightarrow t \Rightarrow t = \frac{Xh}{b}$$

La hauteur restante c'est : $h - t = h - \frac{Xh}{b}$

$$dA = \left(h - \frac{Xh}{b}\right) dx \Rightarrow A = \int_0^b \left(h - \frac{Xh}{b}\right) dx = \frac{bh}{2}$$

1.4 Moment statique

Soit la figure suivante



S ou A : un corps ou une surface et dA ou ds : surface élémentaire

Le moment statique de S(A) par rapport à l'axe donné est défini par le produit de la surface A (S) par la distance correspondante.

Le moment statique S (A) d'une section par rapport à un axe 0X ou 0Y est donné par cette expression.

$$S_x = \int Y dA \text{ et } S_y = \int X dA \quad \text{Par intégration}$$

$$S_x = S * \bar{Y} \text{ et } S_y = S * \bar{X} \quad \text{Géométriquement}$$

1.5 Centre de Gravité (C.G) ou centre d'Inertie ou centre de Masse

1.5.1 Définition : Le C.G d'une surface est le point dans lequel toute la surface pourrait être considérée comme concentrée en laissant cependant inchangé le moment d'ordre un de la surface autour d'un axe.

Càd. Le C.G c'est le point où résulte une pression uniforme sur toute la surface.

$$X_G = \frac{S_y}{S} \text{ et } Y_G = \frac{S_x}{S} \quad \text{Géométriquement}$$

$$X_G = \frac{1}{S} \iint X ds \text{ et } Y_G = \frac{1}{S} \iint Y ds \text{ or } S = \Delta = \int_a^b dA = \int_a^b dS$$

$$X_G = \frac{1}{\int_a^b ds} \iint X ds \text{ et } Y_G = \frac{1}{\int_a^b ds} \iint Y ds \quad \text{Intégralement}$$

NB : cfr ou voir le formulaire de RDM

Questions

Déterminer le C.G géométriquement des figures suivantes

N°	FIGURES	N°	FIGURES
1		2	
3		4	
5			

Résolutions

Exemple 1.

figure	\bar{X}	\bar{Y}	S	S_x	S_y
1	150	300	180000	$S * \bar{X}$	$S * \bar{Y}$
2	$600 - \frac{2b}{3}$	$\frac{2h}{3}$	90000	$S * \bar{X}$	$S * \bar{Y}$
			Σ 270000		

$$X_G = \frac{\Sigma S_Y}{\Sigma S} \text{ et } Y_G = \frac{\Sigma S_X}{\Sigma S}$$

Exemple 2.

figure	\bar{X}	\bar{Y}	S	S_X	S_Y
1	50	50	10000	$S * \bar{X}$	$S * \bar{Y}$
2	$100 - \frac{4R}{3\pi}$	$100 - \frac{4R}{3\pi}$	$-\frac{\pi R^2}{4}$	$S * \bar{X}$	$S * \bar{Y}$
		Σ	$10000 - \frac{\pi R^2}{4}$		

$$X_G = \frac{\Sigma S_Y}{\Sigma S} \text{ et } Y_G = \frac{\Sigma S_X}{\Sigma S}$$

Exemple 3.

figure	\bar{X}	\bar{Y}	S	S_X	S_Y
1	0	$\frac{4R_2}{3\pi}$	$\frac{\pi R_2^2}{2}$	$S * \bar{X}$	$S * \bar{Y}$
2	0	$\frac{2R_1}{\pi}$	$\frac{\pi R_1^2}{2}$	$S * \bar{X}$	$S * \bar{Y}$
		Σ	$\frac{\pi R_2^2}{2} + \frac{\pi R_1^2}{2}$		

$$X_G = \frac{\Sigma S_Y}{\Sigma S} \text{ et } Y_G = \frac{\Sigma S_X}{\Sigma S}$$

Exemple 4.

figure	\bar{X}	\bar{Y}	S	S_X	S_Y
1	0	$\frac{4R}{3\pi}$	$\frac{\pi R^2}{2}$	$S * \bar{X}$	$S * \bar{Y}$
2	0	$\frac{h}{3}$ or $h = \frac{r}{2}$	$\frac{bh}{2}$ or $b = 2r$ et $h = r/2$	$S * \bar{X}$	$S * \bar{Y}$
		Σ			

$$X_G = \frac{\Sigma S_Y}{\Sigma S} \text{ et } Y_G = \frac{\Sigma S_X}{\Sigma S}$$

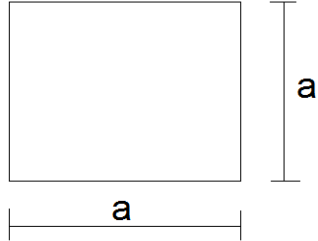
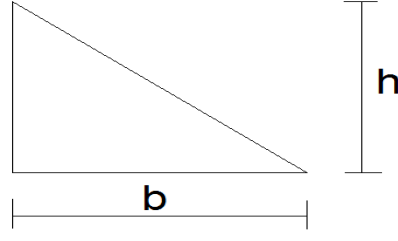
Exemple 5.

figure	\bar{X}	\bar{Y}	S	S_X	S_Y
1	4	3,5	56	$S * \bar{X}$	$S * \bar{Y}$
2	9	2,3	10,5	$S * \bar{X}$	$S * \bar{Y}$
3	4	4	- 7,065		

$$X_G = \frac{\sum S y}{\sum S} \text{ et } Y_G = \frac{\sum S x}{\sum S}$$

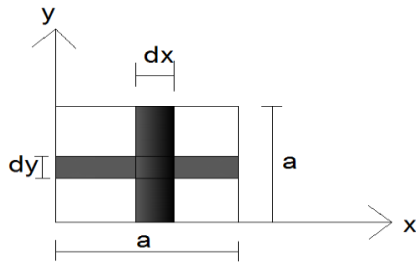
EXERCICES

Déterminer le C.G par intégration des figures suivantes.

N°	FIGURE	N°	FIGURE
1		2	

RESOLUTIONS

Exemple 1.



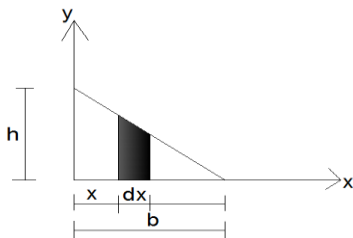
$$X_G = \frac{1}{S} \int x ds \text{ or } S = a^2 \text{ et } ds = a dx$$

$$\text{et } Y_G = \frac{1}{S} \int Y ds \text{ or } S = a^2 \text{ et } ds = a dy$$

$$X_G = \frac{1}{a^2} \int_0^a X a dx = \frac{a}{a^2} \int_0^a x dx = \frac{a}{2}$$

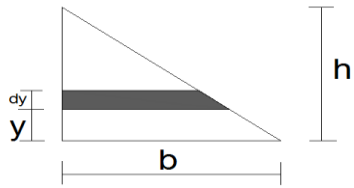
$$Y_G = \frac{1}{a^2} \int_0^a Y a dy = \frac{a}{a^2} \int_0^a Y dy = \frac{a}{2}$$

Exemple 2.



$$X_G = \frac{1}{S} \int x ds \text{ or } ds = \left(h - \frac{hx}{b} \right) dx \text{ et } S = \frac{bh}{2}$$

$$X_G = \frac{1}{\frac{bh}{2}} \int_0^b X \left(h - \frac{hx}{b} \right) dx = \frac{2}{bh} \int_0^b \left(Xh - \frac{hX^2}{b} \right) dx = \frac{2}{bh} \left\{ h \left[\frac{X^2}{2} \right]_0^b - \frac{h}{b} \left[\frac{X^3}{3} \right]_0^b \right\} = \frac{b}{3}$$



$$Y_G = \frac{1}{S} \int y ds \text{ or } ds = \left(b - \frac{by}{h} \right) dy \text{ et } s = \frac{bh}{2}$$

$$Y_G = \frac{1}{\frac{b}{h}} \int_0^h Y \left(b - \frac{by}{h} \right) dy = \frac{h}{3}$$

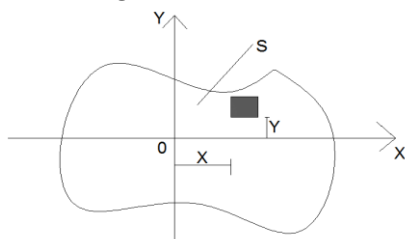
EXERCICES

Calculer les coordonnées du centre de gravité de la section plane suivante

N°	FIGURES	N°	FIGURES
1		2	
3	<p>Ces colonnes sont de (40 * 40) cm</p>		

1.6 Moment d'Inertie (Moment quadratique)

Soit la figure ci-dessous



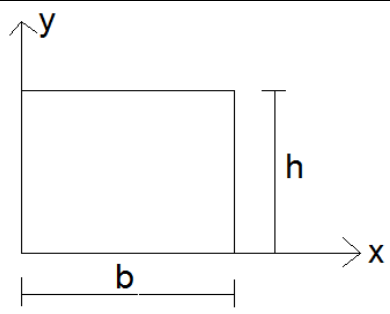
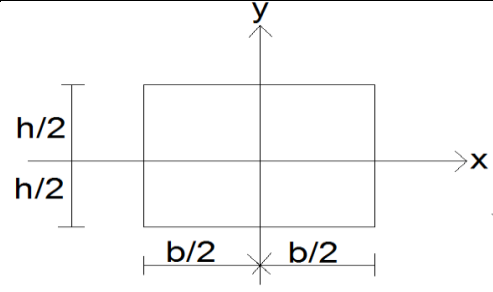
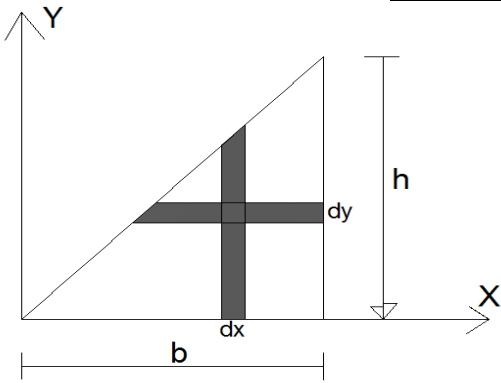
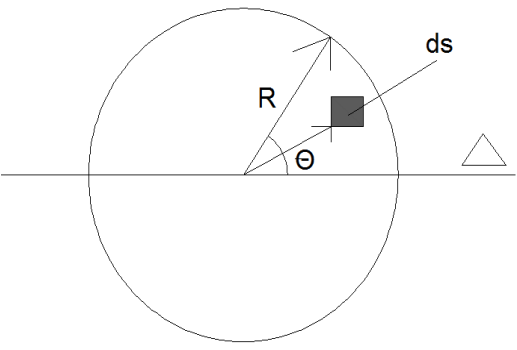
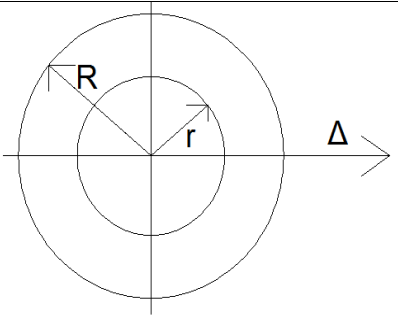
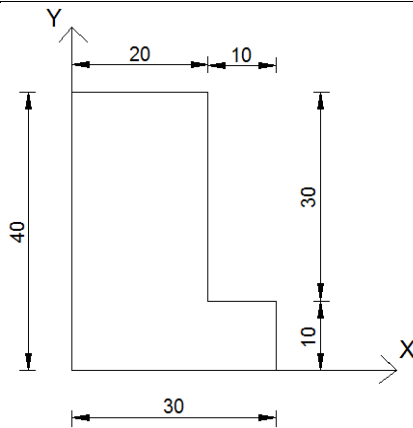
Le Moment d’Inertie de la section S par rapport aux axes OX et OY est données par :
 $I_x = \iint y^2 ds$ et $I_y = \iint x^2 ds$

Le Moment d’Inertie d’une surface(δ) plane, par rapport à un axe XX' , est la somme des produits des surfaces élémentaires (S) infiniment petites, par le carré dans leur distance à cet axe.

Le Moment d’Inertie est une caractéristique géométrique importante de la section, car il intervient dans le calcul de la résistance à la flexion, du flambement et à la détermination des flèches.

EXERCICES

Calculer le moment d’inertie des figures élémentaires suivantes.

N ^o	FIGURES	N ^o	FIGURES
1		2	
3		4	
5		6	

RESOLUTIONS

Exemple 1.

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int y^2 ds \text{ avec } ds = b dy \\
 &= \int_0^h y^2 b dy = b \int_0^h y^2 dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{bh^3}{3} \\
 I_y &= \int x^2 ds \text{ avec } ds = h dx \\
 &= \int_0^b hx^2 dx = h \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{hb^3}{3}
 \end{aligned}$$

Exemple 2.

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_{-h/2}^{h/2} y^2 ds = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = b \left[\left(\frac{h}{2} \right)^3 * \frac{1}{3} - \left(\frac{-h}{2} \right)^3 * \frac{1}{3} \right] \\
 &= b \left[\frac{h^3}{3} * \frac{1}{3} + \frac{h^3}{8} * \frac{1}{3} \right] = \frac{2bh^3}{24} = \frac{bh^3}{12} \\
 I_y &= \int_{-b/2}^{b/2} x^2 ds = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h dx
 \end{aligned}$$

Exemple 3.

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_0^h y^2 ds \text{ avec } ds = \left(\frac{h-y}{h} \right) b dy = \left(b - \frac{by}{h} \right) dy \\
 I_x &= \int_0^h y^2 \left(b - \frac{by}{h} \right) dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h - \frac{b}{h} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^h = \frac{bh^3}{3} - \frac{b}{h} * \frac{h^4}{4} = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} \\
 &= \frac{bh^3}{12} \text{ donc } I_y = \frac{hb^3}{12}
 \end{aligned}$$

Exemple 4.

En coordonnées polaire : $x = \delta \cos\theta$ et $y = \delta \sin\theta$

$$0 \leq \delta \leq R \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$ds = \delta d\theta d\delta$$

$$\begin{aligned}
 I_\Delta &= \iint y^2 ds = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \delta^2 \sin^2\theta d\delta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \int_0^R \delta^2 d\delta \text{ or } \sin^2 = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \int_0^R \delta^2 d\delta = \frac{\pi R^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}
 \end{aligned}$$

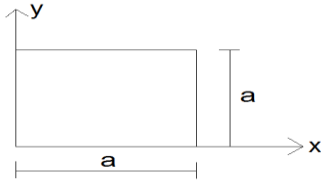
1.7 Produit d'Inertie

On appelle produit d'inertie, l'intégrale des produits des propriétés des aires élémentaires par leurs distances comptées à partir des axes des coordonnées x et y

$$I_{xy} = \iint xy \, ds \quad \text{ou} \quad I_{xy} = s \, x \, y$$

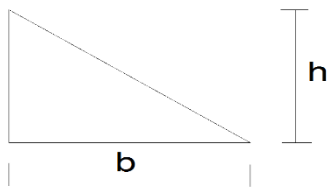
EXERCICES

Exemple 1.



$$I_{xy} = s * x * y = a^2 * \frac{a}{2} * \frac{a}{2} = \frac{a^4}{4}$$

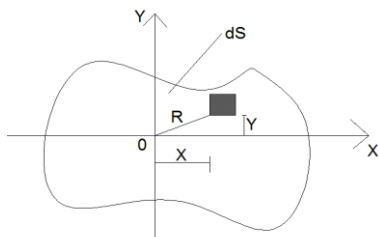
Exemple 2.



$$I_{xy} = \frac{bh}{2} * \frac{b}{3} * \frac{h}{3} = \frac{b^2h^2}{18}$$

1.8 Moment d'Inertie polaire

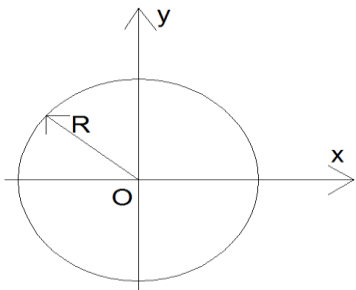
Considérons une section polaire et orthogonale x et y



$$I_0 = \int r^2 ds \text{ or } r^2 = x^2 + y^2$$

$$I_0 = \int (x^2 + y^2) ds = \int x^2 ds + \int y^2 ds \Rightarrow I_0 = I_y + I_x$$

Question : calculer le Moment d'inertie polaire d'un cercle



1^{ère} méthode : $I_0 = \int_0^R r^2 ds$ or $R = \frac{d}{2}$ et $ds = 2\pi R \, dR$

$$I_0 = \int_0^R r^2 2\pi r \, dr = \int_0^R 2\pi r^3 \, dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{2\pi}{4} * R^4 = \frac{\pi R^4}{2}$$

2^{ème} méthode : cfr l'exemple 4 du point 1.6

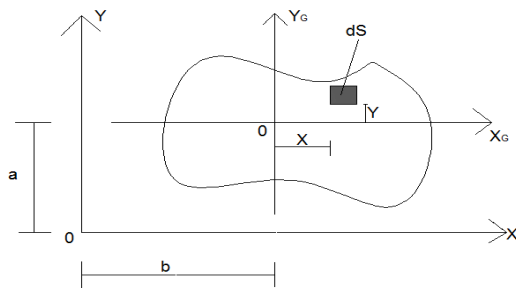
$I_{\Delta} = \frac{\pi R^4}{4}$; Comme le cercle est symétrique, nous déduisons que l'autre axe est identique à l'autre.

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} \Rightarrow I_0 = I_x + I_y = \frac{\pi R^4}{4} + \frac{\pi R^4}{4} = \frac{2\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

1.9 Les Formules dérivées

1.9.1 Principe des axes paires

Soit la figure précédente dont les axes x et y ont subi une translation



Avec x et y : les nouveaux axes des coordonnées

X_G et Y_G : les axes par rapport au centre de gravité

$$I_x = \int y^2 ds \text{ et } I_y = \int x^2 ds \text{ or } X = x + b ; Y = y + a$$

$$I_x = \int (y + a)^2 ds = \int (y^2 + 2ya + a^2) ds = \int y^2 ds + 2 \int y a ds + \int a^2 ds$$

$$\text{Avec : } 2 \int y a ds = 0$$

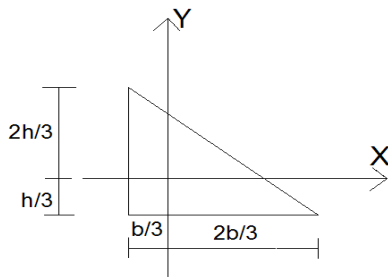
$$I_x = \int y^2 ds + \int a^2 ds = \int y^2 ds + a^2 \int ds$$

$$\text{Avec } I_{X_G} = \int y^2 ds \text{ et } S = \int ds$$

$$I_x = I_{X_G} + a^2 s \text{ donc } I_y = I_{Y_G} + b^2 s$$

c.à.d le moment d'inertie par rapport aux nouveaux axes X et Y est égale au moment d'inertie de l'ancien axe plus les carrés de leur distance multiplié par la section.

Exemple 1.



Résolution : $I_x = I_{xG} + S * d^2$ or $I_x = \frac{bh^3}{12}$; $s = \frac{bh}{2}$ et $d = \frac{h}{3}$

$$I_{xG} = I_x - S d^2 = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2} \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{3bh^3 - 2bh^3}{36}$$

$$I_{xG} = \frac{bh^3}{36} \text{ donc } I_{yG} = \frac{bh^3}{36}$$

- produit d'inertie $\Rightarrow I_{xy} = \int xy ds$ or $X = x + b$ et $Y = y + a$

$$I_{xy} = \int (x + b)(y + a) ds = \int (xy + xa + by + ab) ds$$

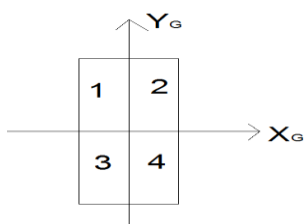
$$I_{xy} = \int xy ds + a \int x ds + b \int y ds + ab \int ds$$

$$I_{xy} = I_{xG yG} + abS$$

N.B : les figures présentant un axe de symétrie, le produit d'inertie est Nul.

Dans ce cas, l'axe de symétrie est un axe principal d'inertie

Exemple :



Résolution :

1^{ère} Méthode

$$I_{xG yG} = s * x * y = (50 * 20) * 0 * 0 = 0$$

2^{ème} Méthode

$$I_{(x,y)1} = (25 * 10) * (-5) * (12,5) = -15,625$$

$$I_{(x,y)2} = (25 * 10) * (5) * (12,5) = 15,625$$

$$I_{(x,y)3} = (25 * 10) * (-5) * (-12,5) = 15,625$$

$$I_{(x,y)4} = (25 * 10) * (5) * (-12,5) = -15,625$$

$$I_{xy} = \Sigma I_{XY} = 0$$

1.9.2 Direction des axes principaux

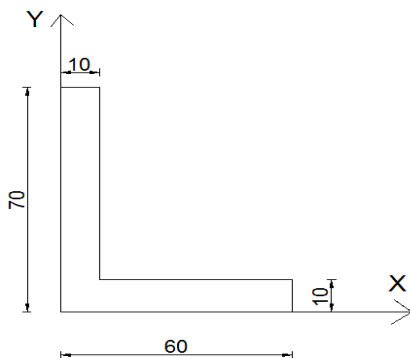
$$tg2\theta = \frac{I_{xG yG}}{\frac{I_{yG} - I_{xG}}{2}} = - \frac{2I_{xG yG}}{I_{xG} - I_{yG}}$$

Avec θ : donne la direction des axes principaux d'inertie les axes sont appelés axes principaux d'inertie

NB : - En calcul des structures on s'intéressera aux axes principaux d'inertie passant par le C.G

- Donc, on sera amené à calculer les axes principaux d'inertie pour les sections planes ne présentant pas d'axes de symétrie on des sections dissymétrie

Exemple

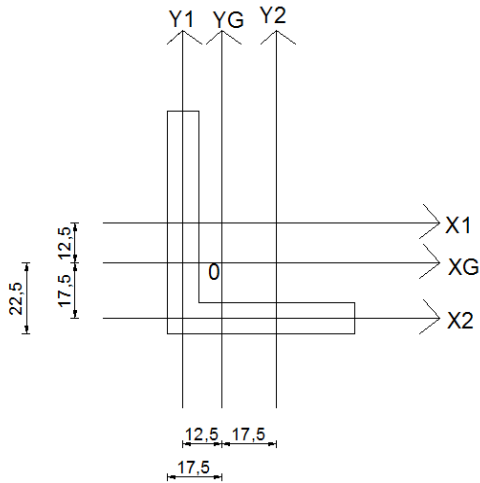


Résolution :

figure	\bar{X}	\bar{Y}	S	S_x	S_y
1	5	35	700	3500	24500
2	35	5	60	2100	300
		Σ	1300	5600	24800

$$S_x = S * \bar{Y} \text{ et } S_y = S * \bar{X}$$

$$X_G = \frac{S_y}{S} = 17,5 \text{ et } Y_G = \frac{S_x}{S} = 22,5$$



$$S_x = S * \bar{Y} * X_G = \frac{S_y}{S} = 17,5 \text{ et } S_y = S * \bar{X} * Y_G = \frac{S_x}{S} = 22,5$$

$$I_{xy} = I_{xy_1} + I_{xy_2}$$

$$I_{xy_1} = S * \bar{X}_1 * \bar{Y}_1 = 700(-12,5)(12,5) = -109375$$

$$I_{xy_2} = S * \bar{X}_2 * \bar{Y}_2 = 500(-17,5)(17,5) = -153125$$

$$I_{x_G y_G} = -109375 - 153125 = -262500$$

$$I_{y_1} = I_{y_G} + A * d^2 = \frac{hb^3}{12} + 700(-12,5)^2 = 115208 \text{ mm}^4$$

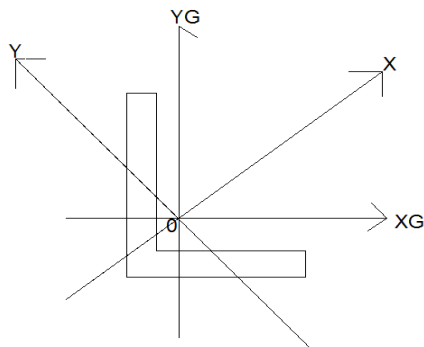
$$I_{y_2} = I_{y_G} + A * d^2 = \frac{hb^3}{12} + 500(17,5)^2 = 257291 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_1} = I_{x_G} + A * d^2 = \frac{hb^3}{12} + 700(12,5)^2 = 395208 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_2} = I_{x_G} + A * d^2 = \frac{hb^3}{12} + 500(-17,5)^2 = 157291 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_G} = I_{x_1} + I_{x_2} \quad \text{et} \quad I_{y_G} = I_{y_1} + I_{y_2}$$

$$\text{tg}2\theta = -\frac{2 I_{x_G y_G}}{I_{x_G} - I_{y_G}} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \text{arc tg} \frac{-2 I_{x_G y_G}}{I_{x_G} - I_{y_G}} = 35,54$$



1.9.3 Moment d'inertie principale

I_x : maximum

I_y : minimum

$$I_x = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_y = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

1.9.4 Rayon de giration

C'est une caractéristique géométrique de la section utilisée dans le calcul de l'élanement pour des éléments de structure soumis à la compression simple.

Il est défini par : $R = \sqrt{\frac{I}{A}} \Rightarrow R_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$ et $R_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$

1.9.5 Module de Flexion

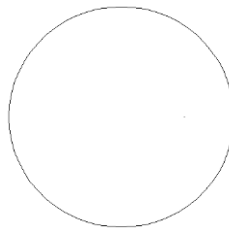
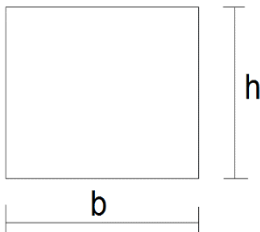
C'est une caractéristique géométrique importante utilisée dans le calcul de déformation des pièces soumises à la flexion.

$$\sigma = \frac{M}{I} = \frac{MY}{I} \quad \text{avec } \sigma : \text{contrainte} ; M : \text{Moment}$$

Et $\frac{I}{Y} = W$: Module de flexion

EXERCICES

Question : Trouver le module de flexion des poutres ayant les sections suivantes



RESOLUTIONS

Exemple 1. $W = \frac{I}{Y}$ avec $I = \frac{bh^3}{12}$ et $Y = \frac{h}{2}$

$$W = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12} * \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}$$

Exemple 2. $W = \frac{I}{Y}$ avec $I = \frac{\pi D^4}{64}$ et $Y = R = \frac{D}{2}$

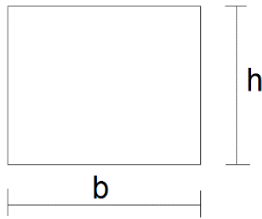
$$W = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^4}{64} * \frac{2}{D} = \frac{\pi D^3}{32}$$

1.9.6 Noyau Central

Lorsque la charge est appliquée dans le noyau central, la pièce travaille à la compression simple. D'où, on sera amené à calculer l'excentricité, ce dernier et calculer par rapport aux C.G

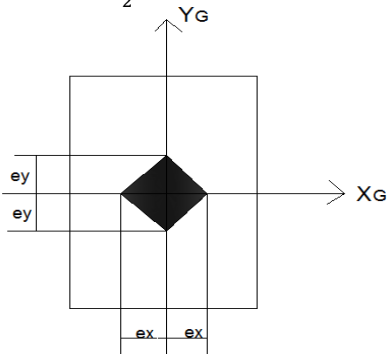
$$e_x = \frac{I_y}{S \cdot \bar{X}} \quad \text{et} \quad e_y = \frac{I_x}{S \cdot \bar{Y}}$$

Question : Démontré le noyau central d'une section rectangulaire



Résolution : $e_x = \frac{I_y}{S \cdot \bar{X}}$ Avec $I_y = \frac{hb^3}{12}$; $S = bh$ et $\bar{X} = \frac{b}{2}$

$$e_x = \frac{\frac{bh^3}{12}}{bh \cdot \frac{b}{2}} = \frac{bh^3}{12} * \frac{2}{hb^2} = \frac{b}{6} \quad \text{de meme} \quad e_y = \frac{h}{6}$$



1.9.7 Ellipse d'inertie

Le lieu géométrique des extrémités des vecteurs rayon de giration lorsque ces axes des coordonnées tournent, est une ellipse appelée ellipse d'inertie

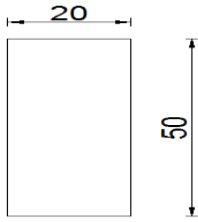
Équation de l'ellipse : $\frac{y^2}{R_x^2} + \frac{x^2}{R_y^2} = 1$

Posons $x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{R_x^2} = 1 \Rightarrow y^2 = R_x^2 \Rightarrow y = \pm R_x$

$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{R_y^2} = 1 \Rightarrow x^2 = R_y^2 \Rightarrow x = \pm R_y$

Question : soit la section rectangulaire ci-dessous on demande de déterminer :

- Les axes principaux d'inertie
- Le rayon de giration
- Tracer l'ellipse



Résolution : les axes x_G et y_G sont les axes principaux d'inertie

$$I_{x_G y_G} = A * \bar{X} * \bar{Y} = A * 0 * 0 = 0 ?$$

$$R_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \text{ et } R_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

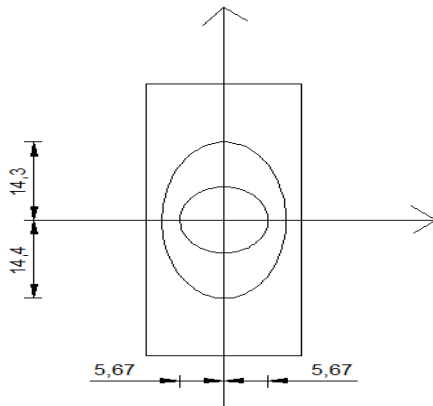
$$I_x = \frac{bh^3}{12} = 208333,3 \text{ et } I_y = \frac{hb^3}{12} = 33333$$

$$A = 1000$$

$$R_x = \sqrt{\frac{208333,3}{1000}} = 14,43 \text{ m} \text{ et } R_y = \sqrt{\frac{33333}{1000}} = 5,67$$

$$e_x = \frac{I_y}{S * \bar{X}} = \frac{33333}{1000 * 10} = 3,3 \text{ ou } e_x = \frac{b}{6} = \frac{20}{6} = 3,3$$

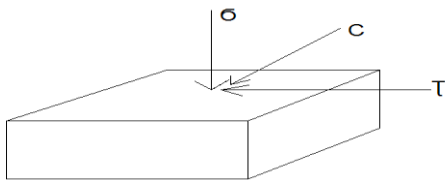
$$e_y = \frac{I_x}{S * \bar{Y}} = \frac{208333,3}{1000 * 25} = 8,33 \text{ ou } e_y = \frac{h}{6} = \frac{50}{6} = 8,3$$



CHAP 2 NOTIONS DES CONTRAINTES

2.1 Définition

- La notion de résistance est liée à la surface de contact et à la force appliquée
- Une facette : c'est la surface la plus petite possible (se trouve dans chaque point possible)
- Un champ de vecteur :
 - ✓ Est dit uni axial lorsque toutes les vecteurs contraintes sont prises par une seule direction ($\sigma, \tau = 0$)
 - ✓ Bi axial ou champs plan de contrainte lorsque tous les vecteurs du champ sont contenues dans les plan parallèle (σ et $\tau \neq 0$)
 - ✓ Tri axial lorsque les vecteurs contraints se décomposent en 3 directions :
- Contrainte : effort qui s'exerce à l'intérieur d'un corps
- Champs : c'est un ensemble des éléments appartenant dans un même endroit
- σ : Contrainte Normale (travaille verticalement dans l'objet ou dans un corps)
- τ : Contrainte Tangentielle (elle s'appelle aussi contrainte de glissement) travaille horizontalement dans un corps.



Avec \bar{C} : la contrainte

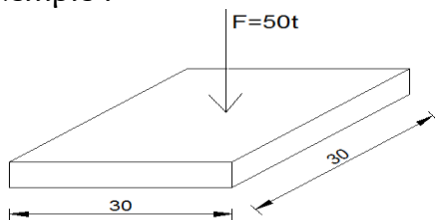
$$\bar{C} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\bar{F}}{S}$$

F : force appliquée

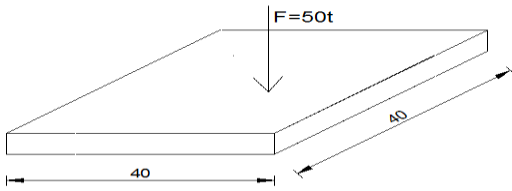
S : surface

- Si la limite existe, c'est la contrainte sinon ce n'est pas la contrainte
- Si la surface est grande la contrainte diminue
- Si la surface est petite la contrainte augmente

Exemple :



$$\bar{C} = \frac{F}{S} = \frac{50}{30 * 30} = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$



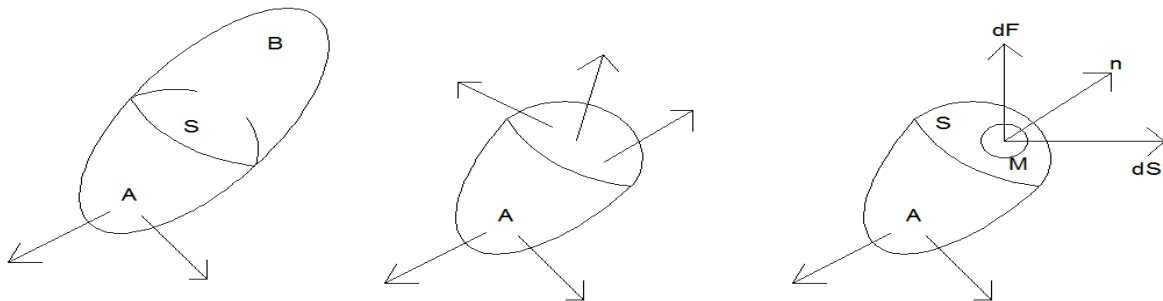
$$\bar{C} = \frac{F}{S} = \frac{50}{40 * 40} = 0,03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$$

2.2. Notion de Contrainte

Considérons un solide S . Les forces extérieures agissant sur ce solide sont constituées par des forces de surface \emptyset et de volume \bar{F}

2.3 Coupure, Facette et Vecteur Contrainte

Coupons le solide en 2 parties par une surface S .



La partie A , par exemple, est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des forces réparties sur la coupure.

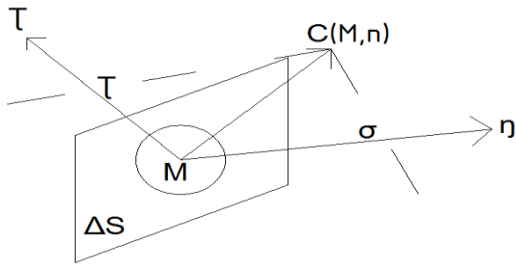
Considérons un point M de S . Soit ds un élément infinitésimal de la surface S entourant M et \bar{n} le vecteur unitaire, perpendiculaire en M à S est dirigé vers l'extérieur de la partie A . Nous appellerons cet ensemble facette \bar{n} en M

Soit $\bar{d}f$ la force qui s'exerce sur cette facette. On appelle vecteur contrainte sur la facette \bar{n} en M , la quantité

$$\bar{C} (M, \bar{n}) = \frac{\bar{d}F}{ds}$$

2.4 Contrainte Normale (σ) et Contrainte Tangentielle (τ)

La Contrainte est une grandeur vectorielle, sa direction est généralement différente de celle de la Normale extérieure orientée \bar{n} à la facette ΔS . On appelle Contrainte Normale $\bar{\sigma}$ la projection de $\bar{C} (M, \bar{n})$ sur la Normale extérieure \bar{n} . On appelle Contrainte Tangentielle $\bar{\tau}$ la projection de $\bar{C} (M, \bar{n})$ sur le plan de la facette ΔS .



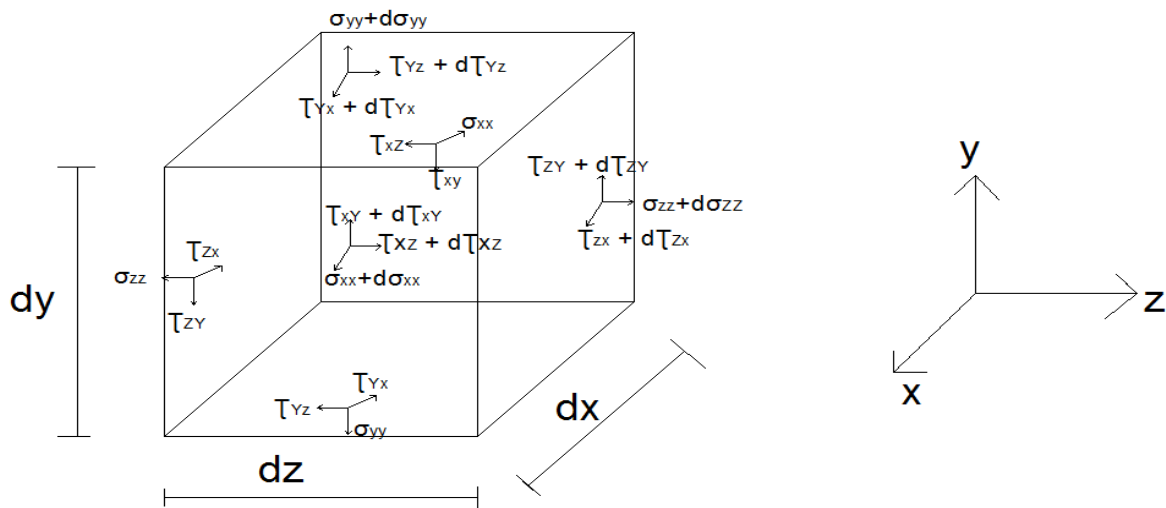
$$\vec{C}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$$

➤ À quoi sert le calcul des Contraintes ?

Expérimentalement, on a défini pour chaque matériau une contrainte limite admissible au-delà de laquelle la pièce subit des détériorations de ses caractéristiques ; mécaniques, dimensionnelles, voire une rupture.

Le calcul de la RDM consiste à vérifier que les contraintes engendrées par les sollicitations extérieures ne dépassent pas la contrainte limite admissible par le matériau. Le calcul des Contrainte sert à évaluer la « tension » dans la matière

2.5 Équilibre du cube



Dans cette notation du tenseur des Contraintes, le premier indice indique la direction de la normale à la facette, le deuxième la direction de la Contrainte ($\sigma_{zz}; \tau_{zy}$).

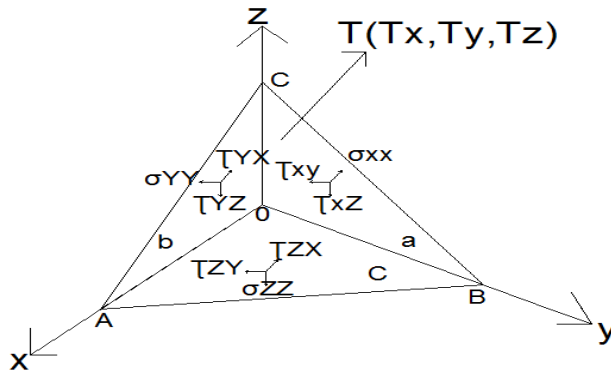
Exprimons l'équilibre du cube : $\sum M_x = 0$, $\sum M_y = 0$ et $\sum M_z = 0$

$$\begin{aligned} \sum M_x = 0 &\Rightarrow (\tau_{zy} + d\tau_{zy}) dx dy \frac{dz}{2} + \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} + (\tau_{yz} + d\tau_{yz}) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} \\ &= 0 \\ &\Rightarrow \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} + d\tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} + d\tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} \\ \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} &= 0 \\ \text{Or } d\tau_{zy} &= \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} dz \text{ et } dx^2 = dy^2 = dz^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} + \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} &= 0 \\ \Rightarrow \tau_{zy} dx dy dt + \tau_{yz} dx dz dt &= 0 \\ \Rightarrow \tau_{zy} &= -\tau_{yz} \end{aligned}$$

De même avec : $\sum M_y = 0 \Rightarrow \tau_{xz} = -\tau_{zx}$ et $\sum M_z = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = -\tau_{yx}$
 Ce le principe de glissement des contraintes

2.6 Formule de Cauchy : tenseur des Contraintes ou Contrainte sur un plan Inclinaït



$$a = \cos \theta_x ; b = \cos \theta_y \text{ et } c = \cos \theta_z$$

$$ABC = ds$$

$$OBC = ds \cos \theta_x = ds a$$

$$OAC = ds \cos \theta_y = ds b$$

$$OAB = ds \cos \theta_z = ds c$$

Équilibre :

$$\sum x = 0 \Rightarrow T_x ds - \tau_{yx} ds * b - \tau_{zx} ds * c - \sigma_{xx} ds * a = 0$$

$$T_x = \sigma_{xx} * a + \tau_{yx} * b + \tau_{zx} * c$$

$$\sum y = 0 \Rightarrow T_y ds - \sigma_{yy} ds * b - \tau_{xy} ds * c - \tau_{yz} ds * a = 0$$

$$T_y = \sigma_{yy} b + \tau_{xy} c + \tau_{yz} a$$

$$\sum z = 0 \Rightarrow T_z ds - \sigma_{zz} ds * c - \tau_{xz} ds * a - \tau_{yz} ds * b = 0$$

$$T_z = \sigma_{zz} c + \tau_{xz} a + \tau_{yz} b$$

On aura :

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

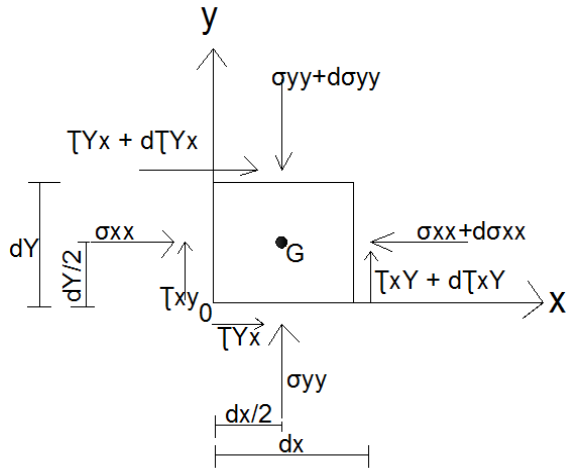
Tenseur des Contraintes dans l'espace

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Tenseur des Contraintes dans un plan

2.7 Équilibre du parallélépipède élémentaire

Découpons dans la masse du solide un parallélépipède élémentaire dont la base est un de côté dx et $dy = a$ dans le plan des Contraintes OXY et dont la hauteur est égale l'unité.



$$d\tau_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} dx \quad \text{et} \quad d\sigma_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} dx$$

avec : $dx^2 = dy^2 = dz^2 = dx dy = dx dz = dy dz = 0$ et $dx = dy = a$

Exprimons que ce parallélépipède est en équilibre :

Calculons le moment de toutes les forces élastiques par rapport au point O :

G

$$\Rightarrow \sigma_{xx} \frac{dy}{2} - \sigma_{yy} \frac{dx}{2} + (\sigma_{yy} + d\sigma_{yy}) \frac{dx}{2} + (\tau_{yx} + d\tau_{yx}) dy - (\sigma_{xx} + d\sigma_{xx}) \frac{dy}{2} - (\tau_{xy} + d\tau_{xy}) dx = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{xx} \frac{dy}{2} - \sigma_{yy} \frac{dx}{2} + \sigma_{yy} \frac{dx}{2} + d\sigma_{yy} \frac{dx}{2} + \tau_{yx} dy + d\tau_{yx} dy - \sigma_{xx} \frac{dy}{2} - d\sigma_{xx} \frac{dy}{2} - \tau_{xy} dx + d\tau_{xy} dx = 0$$

$$\text{Avec : } -d\sigma_{yy} \frac{dx}{2} = \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} dy \frac{dx}{2} \approx 0$$

$$-d\tau_{yx} dy = \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} dy dy \approx 0$$

$$-d\sigma_{xx} \frac{dy}{2} = \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} dx \frac{dy}{2} \approx 0$$

$$-d\tau_{xy} dx = \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} dx dx \approx 0$$

$$\text{On aura : } -\sigma_{xx} \frac{dy}{2} - \sigma_{yy} \frac{dx}{2} + \sigma_{yy} \frac{dx}{2} + \tau_{yx} dy - \sigma_{xx} \frac{dy}{2} - \tau_{xy} dx = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{yx} dy - \tau_{xy} dx = 0 \Rightarrow \tau_{yx} dy = \tau_{xy} dx \quad \text{avec} \quad dy = dx = 0$$

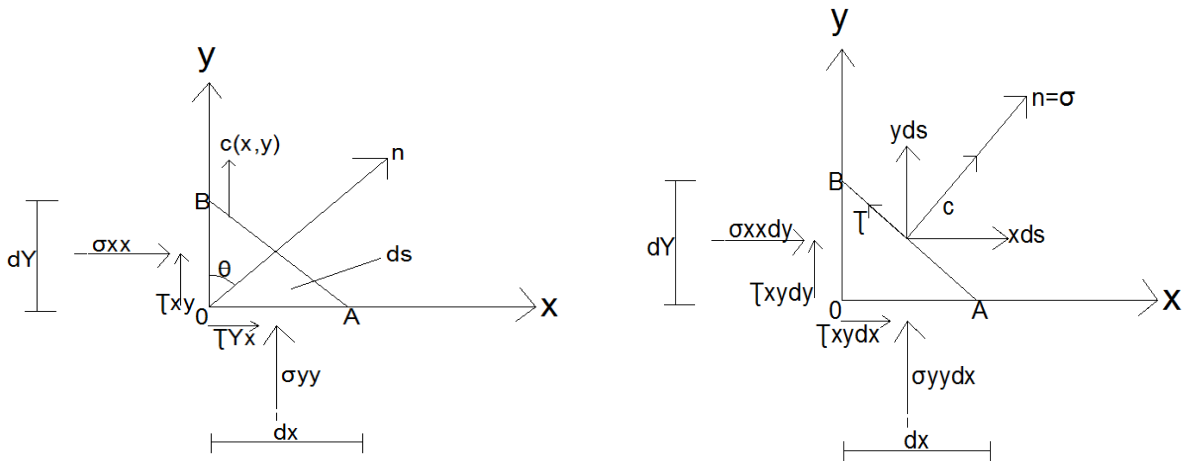
$$\Rightarrow \tau_{yx} = \tau_{xy}$$

Donc, l'équilibre exige que : $\tau_{yx} = \tau_{xy}$

Cette formule énonce que les Contraintes de cisaillement qui se développent sur 2 facettes perpendiculaires sont égaux.

2.8 Distributions des Contraintes autour d'un point

On suppose connues les Contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et τ_{xy} agissant sur 2 éléments plans perpendiculaires aux axes OX et OY et l'on se propose de déterminer le vecteur contrainte agissant sur un élément plan ab passant par O et dont la Normale fait un angle θ avec l'axe OY .



On aura d'après la position de l'angle θ

$$dy = ds \cos \theta \quad (1)$$

$$dx = ds \sin \theta \quad (2)$$

Et l'équilibre du prisme OAB exige que :

$$x ds = \sigma_{xx} dy + \tau_{xy} dx \quad (3)$$

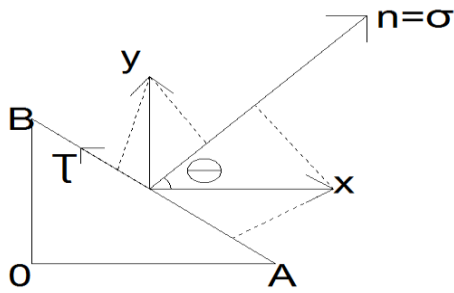
$$y ds = \sigma_{yy} dx + \tau_{xy} dy \quad (4)$$

(1) et (2) dans (3) et (4) : $x ds = \sigma_{xx} ds \cos \theta + \tau_{xy} ds \sin \theta$

$$y ds = \sigma_{yy} ds \sin \theta + \tau_{xy} ds \cos \theta$$

$$x = \sigma_{xx} \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta \quad (5)$$

$$y = \sigma_{yy} \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta \quad (6)$$



Une contrainte \bar{C} à ses composantes suivant sa normale et sa tangente ;
 projetons x et y sur la Normale et la tangente à la facette.

$$\sigma = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (5)$$

$$\tau = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad (6)$$

(5) et (6) dans (7) et (8) : $\sigma_\theta = (\sigma_{xx} \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) \cos \theta +$

$$(\sigma_{yy} \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta) \sin \theta$$

$$\sigma_\theta = \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + \tau_{xy} \cos \theta \sin \theta$$

$$\sigma_\theta = \sigma_{xx} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right) + \sigma_{yy} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} \right) + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta$$

Avec $\cos^2 \theta = \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right)$ et $\sin^2 \theta = \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} \right)$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} [\sin(\theta + \theta) + \sin(\theta - \theta)] = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_{xx}}{2} + \frac{\sigma_{xx} \cos 2\theta}{2} + \frac{\sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{yy} \cos 2\theta}{2} + 2\tau_{xy} * \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (9)$$

$$\tau_\theta = -(\sigma_{xx} \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) \sin \theta + (\sigma_{yy} \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta) \cos \theta$$

$$= -\sigma_{xx} \cos \theta \sin \theta + \tau_{xy} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} \cos^2 \theta$$

$$\tau_\theta = \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} \sigma_{yy} \sin 2\theta - \frac{\sigma_{xx}}{2} \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = -\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (10)$$

Avec : σ_θ : Contrainte Normal et τ_θ : Contrainte Tangentielle

Il existe alors 2 directions privilégiées où les contraintes soient maximales ; ces directions sont perpendiculaires entre elles. Elles forment donc un système orthogonal

suivant ces directions, les Contraintes de Cisaillement sont nulles, l'expression (10) s'annulant, on trouve :

$$\tau_{xy} \cos 2\theta - \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right) \sin 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}} \quad (11)$$

Donne la direction des Contraintes principales

$$\cos 2\theta = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 2\theta}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}}\right)^2}} = \frac{\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (12)$$

$$\text{On en déduit : } \sin 2\theta = \frac{\tan 2\theta}{\pm\sqrt{1+\tan^2 2\theta}} = \frac{\tau_{xy}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (13)$$

(12) et (13) dans (9) :

$$\sigma = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} * \frac{\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} + \tau_{xy} * \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

On sait que :

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (14)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (15)$$

Avec : σ_1 et σ_2 : Sont appelées Contraintes principales

σ_1 : Contrainte max et σ_2 : Contrainte min

Ici les Contraintes de Cisaillement sont nulle ($\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$)

Donc, lorsque les Contraintes Normales suivant OX et OY sont principales :

$$\sigma_{xx} = \sigma_1 \text{ et } \sigma_{yy} = \sigma_2 \Rightarrow \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \cos 2\theta \quad (16)$$

$$\tau_\theta = -\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \sin 2\theta \quad (17)$$

Recherchons les directions des Contraintes de Cisaillement maximales :

$$(10) : \frac{\partial \tau_{\theta}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta}}{\partial \theta} = 0 \implies -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xy}} \quad (18)$$

Calcul de Cisaillement maximum (Contrainte Tangentielle maximale)

Les contraintes de Cisaillement maximum sont données par :

$$\tau'_{1} = -\tau'_{2} = \frac{\sigma_{1} - \sigma_{2}}{2}$$

$$\tau'_{1} = -\tau'_{2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} : \text{Contrainte de Cisaillement maximum associée}$$

2.9 Cercle de MOHR

2.9.1 Définition : Le cercle de MOHR est une représentation graphique des Contraintes c'est-à-dire toutes les fonctions vues précédemment peuvent être déduites directement du cercle de MOHR.

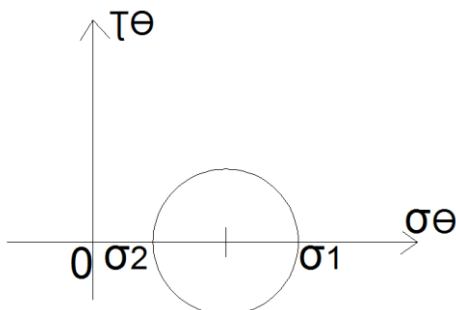
Ce lieu géométrique est un cercle dans le plan $(\sigma_{\theta}, \tau_{\theta})$ de centre $C \left(\frac{\sigma_{1} + \sigma_{2}}{2}, 0 \right)$ et de rayon $R = \frac{\sigma_{1} - \sigma_{2}}{2}$

Ce cercle s'appelle cercle de MOHR.

2.9.2 Tracé du cercle de MOHR

A. A partir des Contraintes principales (σ_{1}, σ_{2})

On calcul d'abord σ_{1}, σ_{2} par les formules précédemment établie. A partir d'un point O quelconque sur une droite $O\sigma_{\theta}$, on porte σ_{1} en grandeur et signe et σ_{2} et on trace le cercle de diamètre $\sigma_{1}\sigma_{2}$. C'est le cercle de MOHR.



$$\text{Diamètre du cercle : } D = \sigma_{1} - \sigma_{2} \text{ et } R = \frac{D}{2} = \frac{\sigma_{1} - \sigma_{2}}{2}$$

B. Déterminer le cercle de Mohr par des Contraintes σ_θ et τ_θ en un point

Le point A déjà établie.

Par le centre C du cercle de MOHR, on trace CP faisant avec $0\sigma_\theta$ un angle -2θ . Càd l'angle $\sigma_\theta CP$ a pour grandeur 2θ mais est compt e dans le sens inverse du sens direct.

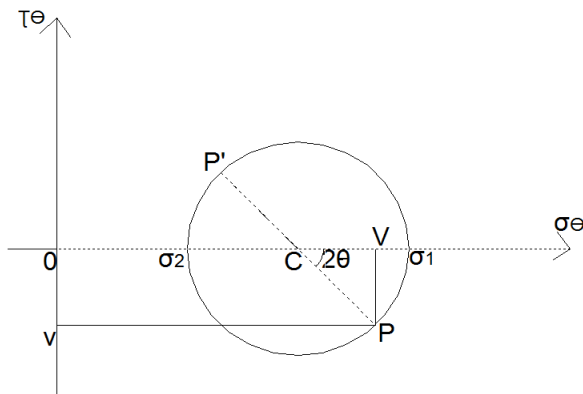
La droite CP coupe le cercle a un point.

La projection de ce point sur $\sigma_\theta = U$ et sur $\tau_\theta = V$ ce qui donne OU et OV

$$OU = \sigma_\theta \text{ et } OV = \tau_\theta$$

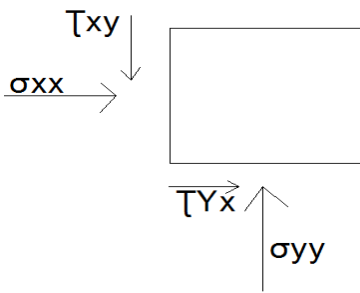
$$CU = OU - OC = \sigma_\theta - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

$$\frac{UP}{CU} = \tan(-2\theta)$$



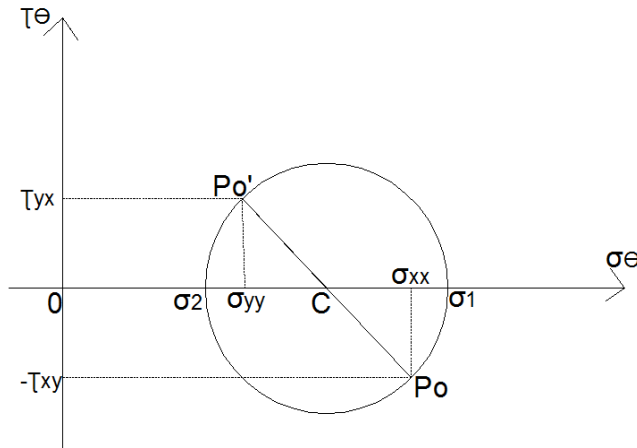
C. Trac e du cercle de MOHR contraint σ_{xx} et τ_{xy}

Considérons un état des Contraintes défini par



On peut Tracer le cercle de MOHR sans passer par le calcul de σ_1 et σ_2 ; il suffit de connaitre les Contrainte sur 2 éléments rectangulaires pour remplacer les grandeurs de $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ et τ_{yx} sur les axes $0\sigma_\theta$ et $0\tau_\theta$.

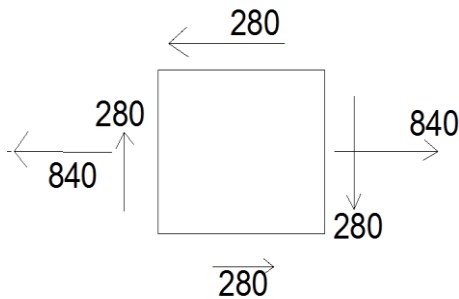
L'intersection de σ_{yy} et $\tau_{yx} = PO'$ et σ_{xx} et $\tau_{xy} = PO$, tracer le cercle de diamètre $POPO'$, là où le cercle coupe $0\sigma_\theta$ en deux points donne σ_1 et σ_2



Tout comme au point B on peut projeter PO' sur τ_θ pour τ_{yx} et P' sur σ_θ pour avoir σ_{yy} et aussi PO pour avoir τ_{xy} et σ_{xx}

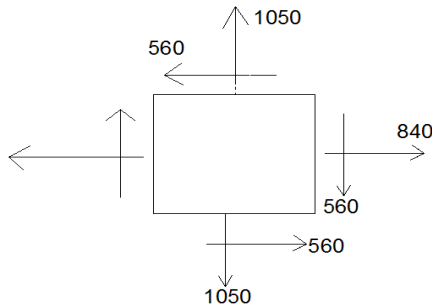
EXERCICES

Exemple 1. Un élément d'un corps supporte une contrainte normale dans la direction X de 840 kg/cm^2 , et une contrainte de cisaillement de 280 kg/cm^2 , comme le montre la figure ci-dessous

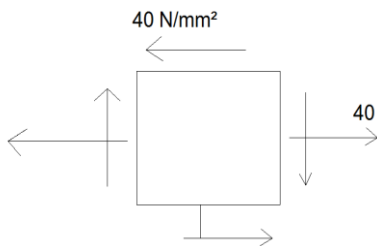


- Calculer les Contraintes Normale et de Cisaillement sur un plan incliné de 30° de la Normale
- Calculer les valeurs maximum et minimum de la Contrainte Normale pouvant exister sur un plan incliné et déterminer les directions de ces Contraintes
- Calculer la grandeur et déterminer les directions de Cisaillement maximal pouvant exister sur un plan incliné
- Tracer le cercle de MOHR

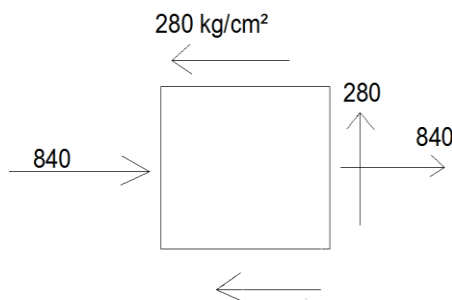
Exemple 2. Un élément plan est soumis aux Contraintes comme signalés ci-dessous, déterminé à partir du cercle de MOHR essayer de trouver les autres résultants



Exemple 3. Les états des Contraintes de quelques points d'un corps chargé sont représentés sur les figures ci-dessous. Déterminer les Contraintes principales, l'orientation des axes principaux, l'intensité des Contraintes Tangentielles maximum et leur orientation et leurs Contraintes Normales associées



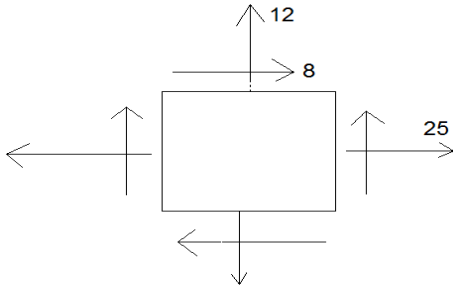
Exemple 4. En utilisant le cercle de MOHR, calculer pour l'élément plan donnée ci-dessous les autres éléments possibles



Exemple 5. Soit l'état des Contraintes définie par le tenseur des Contrainte suivant

$K = \begin{pmatrix} 402 & 102 \\ 102 & 101 \end{pmatrix}$ Trouver les vecteurs Contraintes principales, Normal, Tangentielles et leur direction

Exemple 6. Un cas de charge Appliqué à une structure produit un état de Contrainte en un point schématisé ci-contre

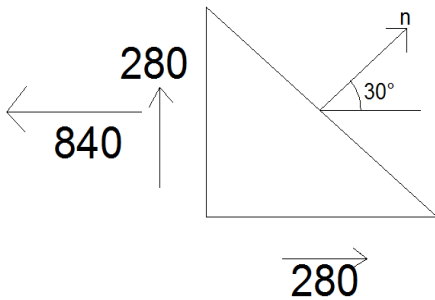


* Déterminer les Contraintes principales et leurs orientations

* Déterminer les Contrainte Tangentielle Maximales, leurs orientations et la Contrainte associée.

RESOLUTIONS

Exemple 1.



$\sigma_{xx} = 840 ; \tau_{xy} = 230 ; \theta = 30^\circ \text{ et } 2\theta = 60^\circ$

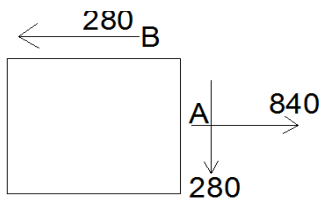
a) $\sigma_\theta = \frac{\sigma_{xx}}{2} + \frac{\sigma_{xx}}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$

$\tau_\theta = -\frac{\sigma_{xx}}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$

b) $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

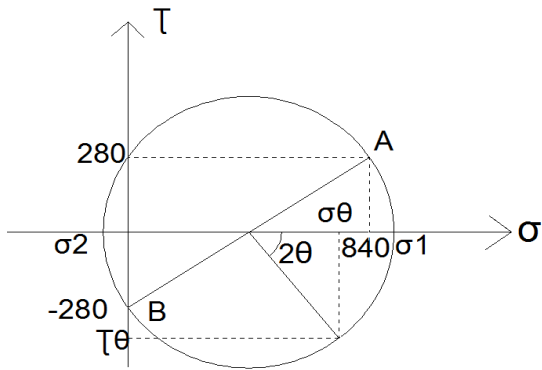
c) $\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \text{ et } \tan 2\theta = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xy}}$

d)

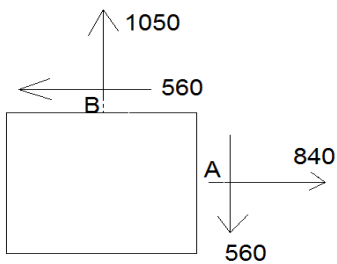


$A(840, 280) \text{ et } B(0, -280)$

cfr la représentation du cercle de MOHR

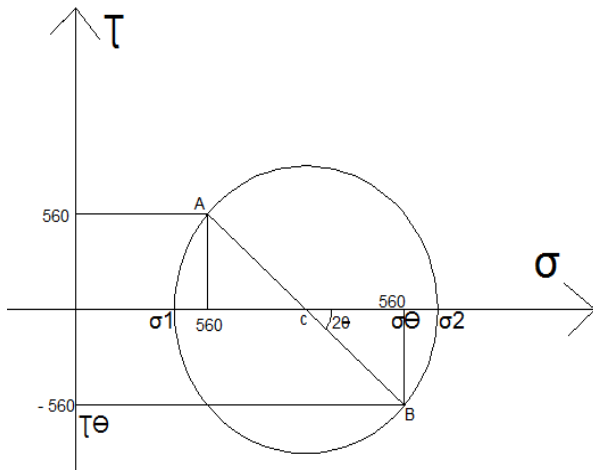


Exemple 2.



$\sigma_{XX} = 840; \sigma_{YY} = 1050$ et $\tau_{XY} = 560$

Cfr les démonstrations du cercle de Mohr



$$\text{tg } 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}}$$

Exemple 3.

$\tau_{xy} = -40 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_{xx} = 40 \text{ N/mm}^2$

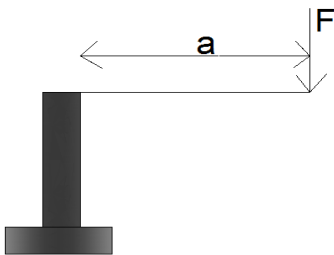
$\sigma_{yy} = 0$

- a) Les contraintes principales : $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
- b) L'orientation des axes principaux : $\text{tg } 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$
- c) L'intensité des Contraintes Tangentielles Maximales :
 $\sigma_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
- d) L'orientation des Contraintes Tangentielles Maximales :
 $\tan 2\theta = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xy}}$
- e) Contrainte Normale associée : $\sigma = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$

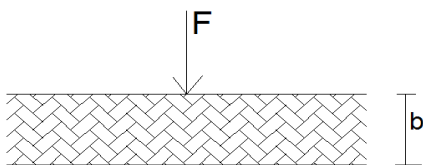
CONTRAINTES DANS LE SOL APPLICATIONS

Exemple 1. Étudier l'état des Contraintes dans le sol défini par les Contraintes existant au point P , de coordonne polaires r et θ .

Exemple 2. Déterminer les contraintes existant le long d'une paroi de ce mur de soutènement contenant un massif à surface libre horizontale et soumis à l'action d'une charge verticale F caractérisée par sa distance a à la paroi

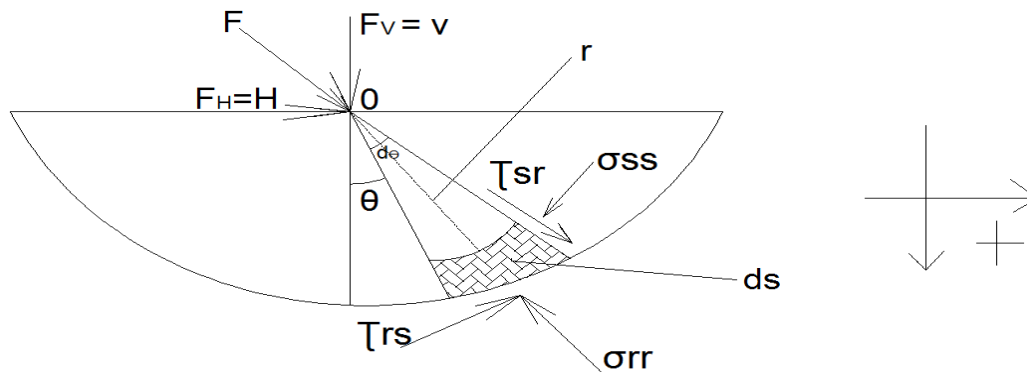


Exemple 3. Déterminer la répartition des contraintes à niveau donnée caractérisé par b , d'un massif semi infini à surface libre horizontale et soumis à l'action d'une charge F verticale.



REPONSES

Exemple 1.



Considérons un milieu semi continue : c'est un milieu qui peut s'enfoncer et parfois aussi non, il refuse de s'enfoncer (*ex : le sol*)

L'état de Contrainte en un point en coordonnées polaire est donnée par :

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r} \cos \theta + \frac{B}{r} \sin \theta \quad \text{avec : } A, B \text{ depend de } F$$

$A = ?$ et $B = ?$

$\tau_{rs} = \tau_{sr} = 0$, par ce que on admet que les Contraintes se propagent suivant les directions principales.

r : rayon polaire et θ : angle polaire

Exprimons que le massif est en équilibre

$$\sum x = 0 : H + \int_{\pi/2}^{\pi/2} \sigma_{rr} * r d\theta \sin \theta = 0$$

$$H = - \int_{\pi/2}^{\pi/2} \sigma_{rr} * r \sin \theta d\theta = - \int_{\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{A}{r} \cos \theta + \frac{B}{r} \sin \theta \right) r \sin \theta d\theta$$

$$H = - \int_{\pi/2}^{\pi/2} (A \cos \theta \sin \theta + B \sin^2 \theta) d\theta \quad \text{avec : } \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad \text{et } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$H = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{A}{2} \sin 2\theta - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

$$H = + \frac{A}{2} * \frac{1}{2} [\cos 2\theta]_{\pi/2}^{\pi/2} - \left\{ \frac{B}{2} [\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{B}{2} * \frac{1}{2} [\sin 2\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \right\}$$

$$H = \frac{A}{4} [\cos \pi - \cos(-\pi)] - \frac{B}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} (\sin \pi - \sin(-\pi)) \right]$$

$$H = \frac{A}{4} (-1 + 1) - \frac{B}{2} \left(\pi - \frac{1}{2} * 0 \right) = - \frac{B\pi}{2} \Rightarrow B = - \frac{2H}{\pi}$$

$$\Sigma y = 0 \Rightarrow V + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_{rr} * r d\theta \cos \theta = 0$$

$$V = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{A}{r} \cos \theta + \frac{B}{r} \sin \theta d\theta \right) r \cos \theta d\theta = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta) d\theta$$

$$= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A \cos^2 \theta d\theta - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \sin \theta d\theta$$

$$= -A \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right) d\theta - B \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta \quad \text{avec} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta = 0$$

$$V = -A \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} d\theta - A \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{-A}{2} [\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{A}{2} * \frac{1}{2} [\sin 2\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{-A}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{A}{4} [\sin \pi - \sin(-\pi)] = -\frac{A}{2} \pi \Rightarrow V = \frac{-A\pi}{2}$$

$$A = -\frac{2V}{\pi}$$

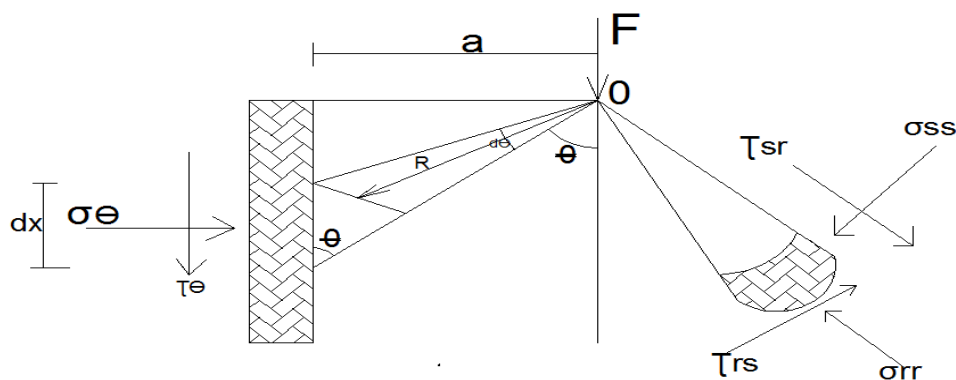
$$\sigma_{rr} = \frac{2F_V}{\pi} \frac{\cos \theta}{r} + \frac{2F_H}{\pi} \frac{\sin \theta}{r}$$

considerons que F n'est pas inclinée

❖ F est verticale $\Rightarrow F_V \neq 0$ et $F_H = 0 \Rightarrow \sigma_{rr} = \frac{2F_V}{\pi} \cos \frac{\theta}{r}$

❖ F est horizontale $\Rightarrow F_H \neq 0$ et $F_V = 0 \Rightarrow \sigma_{rr} = \frac{2F_H}{\pi} \frac{\sin \theta}{r}$

Exemple 2. Soit O le point d'application de F



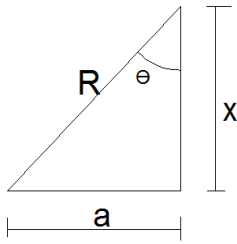
Exprimons l'équation d'équilibre :

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow \sigma_{\theta} dx - \sigma_{rr} R d\theta \sin \theta = 0 \Rightarrow \sigma_{\theta} dx = \sigma_{rr} R d\theta \sin \theta$$

$$\text{Or} : r d\theta = dx \sin \theta \Rightarrow \sigma_{\theta} dx = \sigma_{rr} \sin \theta \sin \theta dx \Rightarrow \sigma_{\theta} = \sin^2 \theta \sigma_{rr}$$

$$\sigma_{\theta} = \sin^2 \theta \sigma_{rr}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{2F}{\pi} * \frac{\cos \theta}{r} * \sin^2 \theta \text{ or on a :}$$



$$\cos \theta = \frac{X}{r}; \sin \theta = \frac{a}{r}; r^2 = X^2 + a^2; a = r \sin \theta \text{ et } X = r \cos \theta$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{2F}{\pi} * \frac{1}{r} * \frac{1}{r} * \left(\frac{a}{r}\right)^2 = \frac{2F}{\pi} * \frac{X a^2}{(X^2 + a^2)^2}$$

Cherchons le point ou la contrainte est maximum

$$\sigma_{\theta} = \sigma(x, a) = \frac{2F}{\pi} * \frac{X a^2}{(X^2 + a^2)^2}; \text{dérivée de } \sigma_{\theta} \text{ par rapport à } X$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial X} = \frac{2F a^2}{\pi} \left(\frac{X^2 + a^2 - 4X^2}{(X^2 + a^2)^3} \right)$$

$$\text{Posons } \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial X} = 0 \Rightarrow \frac{2F a^2}{\pi} \left(\frac{X^2 + a^2 - 4X^2}{(X^2 + a^2)^3} \right) = 0 \Rightarrow X = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Donc, la contrainte est max à cette distance.

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow \tau_{\theta} dx = \sigma_{rr} * r d\theta \cos \theta \text{ or } r d\theta = \sin \theta dx$$

$$\tau_{\theta} dx = \sigma_{rr} \sin \theta dx \cos \theta \Rightarrow \tau_{\theta} = \frac{2F}{\pi} * \frac{1}{r} * \frac{X}{r} * \frac{a}{r} * \frac{X}{r}$$

$$\tau_{\theta} = \frac{2F}{\pi} * \frac{X^2}{r^4} \text{ c'est la formule de Boussinesq}$$

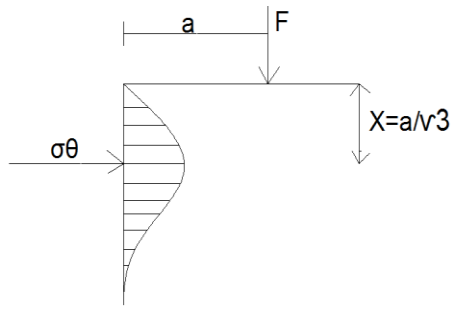
$$\text{Au point } X = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{2F}{\pi} * \frac{\frac{a^2 * a}{\sqrt{3}}}{\left(\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + a^2\right)^2} = \frac{3F \sqrt{3}}{8 a \pi}$$

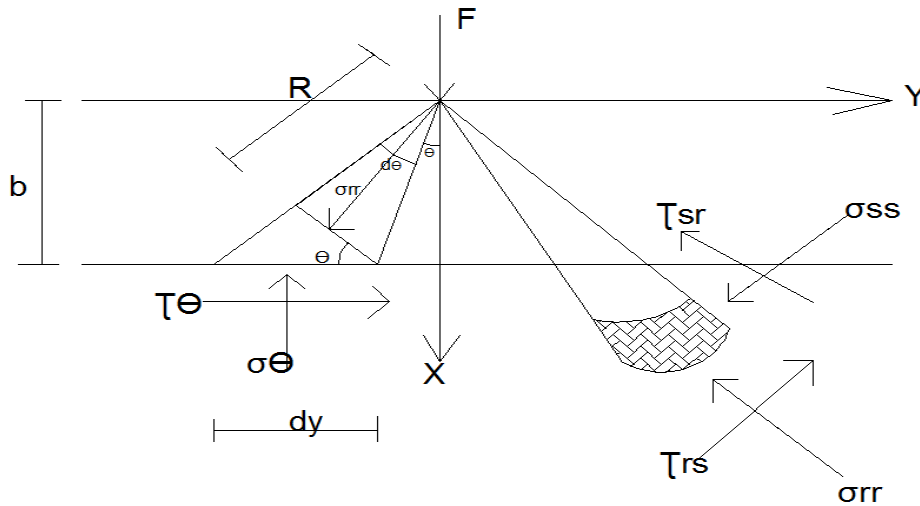
$$\tau_{\theta} = \frac{2F}{\pi} * \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}{r^4} = \frac{2F a^2}{3 \pi r^4}$$

Ainsi si nous voulons calculer à une profondeur H, on intègre

$$\sigma_{\theta} = \int_0^H \frac{2F}{\pi} * \frac{X a^2}{(X^2 + a^2)^2} dx$$



Exemple 3.



Nous savons que l'état des contraintes sous la charge verticale donnée par :

$$\sigma_{\theta} = \frac{2F}{\pi} * \frac{\cos\theta}{r}$$

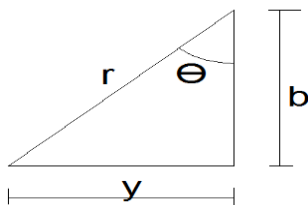
Exprimons que l'élément est en équilibre :

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow \sigma_{\theta} dy = \sigma_{rr} * r * d\theta \cos\theta \quad (1) : \sigma_{ss} = \tau_{sr} = \tau_{rs} = 0$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow \tau_{\theta} dy = \sigma_{rr} * r * d\theta \sin\theta \quad (2) \text{ on ne constate que } r d\theta = dy \cos\theta$$

$$\sigma_{\theta} dy = \sigma_{rr} dy \cos\theta \cos\theta \Rightarrow \sigma_{\theta} = \sigma_{rr} \cos^2\theta$$

$$\tau_{\theta} dy = \sigma_{rr} \sin\theta dy \cos\theta \Rightarrow \tau_{\theta} = \sigma_{rr} \sin\theta \cos\theta$$



$$r^2 = b^2 + y^2 ; \cos\theta = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r \cos\theta \text{ et } \sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow Y = r \sin\theta$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{2F}{\pi} * \frac{\cos\theta}{r} * \cos^2\theta = \frac{2F}{\pi} * \frac{b}{r} * \frac{1}{r} * \frac{b^2}{r^2} = \frac{2F}{\pi} * \frac{b^3}{(b^2 + y^2)^2}$$

$$\tau_{\theta} = \frac{2F}{\pi} * \frac{\cos\theta}{r} * \frac{Y}{r} * \frac{b}{r} = \frac{2F}{\pi} * \frac{1}{r} * \frac{b}{r} * \frac{Y}{r} * \frac{b}{r} = \frac{2F b^2 Y}{\pi r^4}$$

$\sigma_{\theta} = \frac{2F}{\pi} * \frac{b^3}{(b^2 + y^2)^2}$	$\tau_{\theta} = \frac{2F b^2 Y}{\pi r^4}$
--	--

La force R restant dans le massif entre les droites $Y = \pm b$ est donnée par :

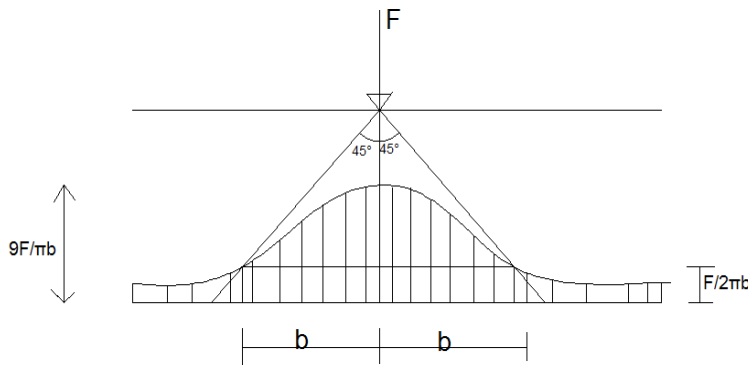
$$R = \int_{-b}^b \sigma_{\theta} dy \text{ or } r d\theta = dy \cos\theta \Rightarrow dy = \frac{r d\theta}{\cos\theta}$$

$$R = \int_{-b}^b \sigma_{\theta} \frac{r d\theta}{\cos\theta} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sigma_{\theta} \frac{r d\theta}{\cos\theta} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2F}{\pi} * \frac{\cos\theta}{r} * \cos^2\theta \frac{r d\theta}{\cos\theta} = F \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right) = 0,82 F$$

Ce calcul donne une idée de l'approximation faite dans l'hypothèse couramment admise qui suppose que les charges se répartissent à 45° à l'intérieur du massif

$$\text{Au point } Y = b \Rightarrow \sigma_{\theta} = \frac{F}{2\pi b}$$

$$\text{Au point } Y = \frac{b}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sigma_{\theta} = \frac{9F}{\pi b}$$



CHAPITRE 3. ETUDES DES STRUCTURES ISOSTATIQUES

En résumé l'étude complète d'une structure ou poutre isostatique passe par 5 points :

1. Vérification de l'isostaticité
2. Schéma du corps rendu libre
3. Calcul des réactions
4. Efforts intérieurs
5. Diagramme (M, N et T)

Dans ce chapitre, nous allons voir des notions de la statique et des notions dérivées de celle-ci pour étudier une structure isostatique.

3.1 GENERALITES

- Dans ce chapitre nous allons étudier :
 - Les poutres
 - La colonne
 - La console
 - Le treillis
 - Etc
- Actions sollicitant les constructions

Généralement on distingue 2 sortes des sollicitations ou actions :

- Action dynamique (si elle provoque des oscillations importantes ou permanentes dans l'ouvrage)
- Action statique dans le cas contraire

Dans ce chapitre, nous ne considérons que les actions statiques.

Par actions statique, on voit les charges.

On distingue 3 sortes des charges :

- Charge concentrée
- Charge continue ou répartie
- Moment appliqué
- La charge concentrée : Elle est la charge qui agit en un seul point de la structure
- La charge répartie : Elle est la charge qui agit sur une partie ou sur la structure, cette charge peut avoir une forme géométrique régulière ou irrégulière
- Le moment appliqué : Elle est un couple des forces (c'est-à-dire forces ayant même direction, intensité, support parallèle mais de sens opposé)

1. VERIFICATION DE L'ISOSTATICITE

Une structure est isostatique si les réactions d'appuis peuvent être déterminées par les 3 équations d'équilibre statique (ΣF_x , ΣF_y et ΣM)

Ceci engendre la notion des liaisons (ou appuis).

Nous distinguons 3 sortes des appuis :

- **APPUI SIMPLE MOBILE**



L'appui à rouleau impose un seul blocage vertical, laissant libre les autres degrés de liberté.

Donc, en résumé, on a une seule réaction



- **APPUI SIMPLE FIXE**

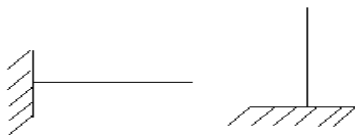


L'appui simple fixe impose deux blocages horizontal et vertical, laissant la rotation.

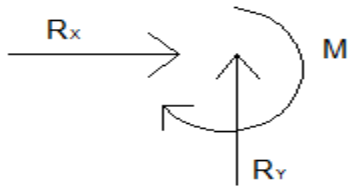
Donc en résumer on à deux réactions d'appui



- **ENCASTREMENT**



L'encastrement impose 3 blocages horizontaux, vertical et la rotation, laissant aucun degré de liberté



Donc, on a 3 réactions Càd $R_x; R_y$ et $M \neq 0$

Une articulation sur une structure annule une réaction (càd on calcule une équation d'équilibre (M) à ce point de l'articulation)

- Si $R = E$; la structure est isostatique (chapitre 3)
- Si $R > E$; la structure est hyperstatique (chapitre 12)
- Si $R < E$; la structure est hypostatique

Avec R : nombre des réactions et E : nombre des équations d'équilibre (3)

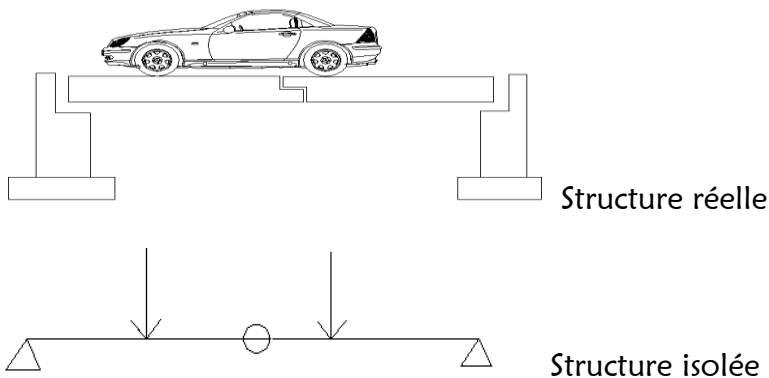
2. SCHEMA DU CORPS RENDU LIBRE (SCRL) OU SCHEMA DU CORPS ISOLEE

Pour résoudre un problème d'analyse des structures, on commence par isoler la structure de son entourage, en le dégagant de ses appuis et d'éventuelles autres liaisons à l'aide de coupes.

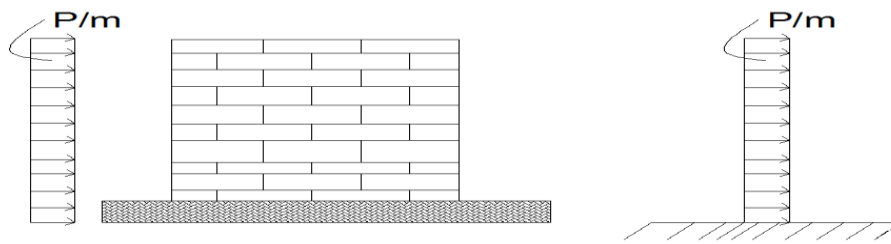
On examine ensuite les forces agissant sur la structure isolée.

L'ensemble du schéma statique et de l'extériorisation des forces est le S.C.R.L

Exemple 1.



Exemple 2.



Structure réelle

structure isolée

2.1. LA RESULTANTE

La résultante est la somme des forces appliquées sur une structure.

La plupart des sollicitations vues ici ont une forme géométrique connue, donc la résultante est la surface du chargement.

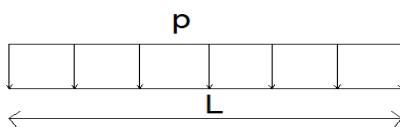
On a deux méthodes pour évaluer la résultante des forces réparties :

- La méthode géométrique (surface)
- La méthode mathématique ($R = \int_a^b p(\alpha) dx$)

Avec : - R : la résultante

- $p(\alpha)$: la fonction de la charge
- a et b : les bornes

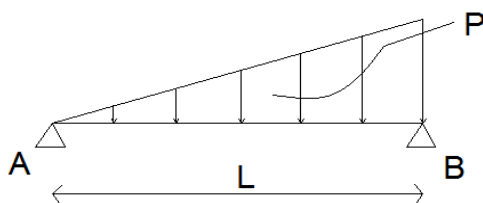
Exemple 1. La charge uniformément répartie



$$1^{ere} \text{ methode} : p(\alpha) = p ; a = 0 \text{ et } b = L \Rightarrow R = \int_a^b p(\alpha) dx = \int_0^L p dx = PL$$

$$2^{eme} \text{ methode} : S = L * l = P * L \text{ avec } L = L \text{ et } l = P$$

Exemple 2. Charge linéaire ou triangulaire



1^{ere} methode :

Équation d'une droite passant par 2 points : $Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} (X - X_1)$

Les coordonnées des points : A (0, 0) et B (L, P)

$$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} (X - X_1) \Rightarrow Y - 0 = \frac{P - 0}{L - 0} (X - 0) \Rightarrow Y = \frac{PX}{L}$$

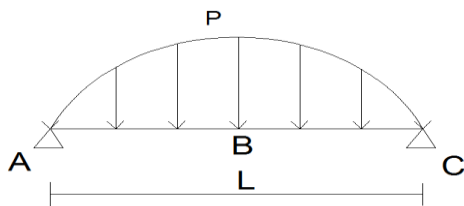
$Y = p(\alpha) = \frac{PX}{L}$ C'est la fonction de la charge sur la structure

$$R = \int_0^L Y dx = \int_0^L \frac{PX}{L} dx = \frac{P}{L} \int_0^L X dx = \frac{P}{L} \left[\frac{X^2}{2} \right]_0^L = \frac{PL^2}{2L} = \frac{PL}{2}$$

2^{eme} methode :

$$R = S = \frac{BH}{2} \text{ avec } B = L \text{ et } H = P \text{ donc } R = \frac{PL}{2}$$

Exemple 3. Demi-parabole symétrique



1^{ere} methode :

Équation d'une droite passant par 3 points est : $Y = AX^2 + BX + C$

Les coordonnées des points A, B et C sont :

A (0, 0) ; B ($\frac{L}{2}$, P) et C (L, 0)

- Au point A (0, 0)

$$Y = AX^2 + BX + C \Rightarrow 0 = A * 0^2 + B * 0 + C \Rightarrow C = 0 \quad (1)$$

- Au point B ($\frac{L}{2}$, P)

$$Y = AX^2 + BX + C \Rightarrow P = A * \left(\frac{L}{2}\right)^2 + B * \frac{L}{2} + C \Rightarrow P = \frac{AL^2}{4} + \frac{BL}{2} \quad (2) \text{ avec } C = 0$$

- Au point C (L, 0)

$$Y = AX^2 + BX + C \Rightarrow 0 = AL^2 + BL \Rightarrow AL^2 + BL = 0 \quad (3) \text{ avec } C = 0$$

On a un système d'équation à résoudre :

$$C = 0 \quad (1)$$

$$P = \frac{AL^2}{4} + \frac{BL}{2} \quad (2)$$

$$AL^2 + BL = 0 \quad (3)$$

$$\text{De (3) : } AL^2 + BL = 0 \Rightarrow A = -\frac{B}{L} \quad (4)$$

$$(4) \text{ Dans (2) : } P = -\frac{B}{L} * \frac{L^2}{4} + \frac{BL}{2} = \frac{-BL}{4} + \frac{BL}{2} = \frac{BL}{4} \Rightarrow B = \frac{4P}{L} \quad (5)$$

$$(5) \text{ dans (4) : } A = \frac{-4P}{L} * \frac{1}{L} \Rightarrow A = -\frac{4P}{L^2}$$

Nous aurons enfin : $Y = AX^2 + BX + C = -\frac{4P}{L^2}X^2 + \frac{4P}{L}X$ fonction de la charge

$$R = \int_0^L Y dx = \int_0^L \left(-\frac{4P}{L^2}X^2 + \frac{4P}{L}X \right) dx = \int_0^L -\frac{4P}{L^2}X^2 dx + \int_0^L \frac{4P}{L}X dx$$

$$R = -\frac{4p}{L^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L + \frac{4p}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L = -\frac{4p}{L^2} * \frac{L^3}{3} + \frac{4p}{L} * \frac{L^2}{2} = -\frac{4pl}{3} + \frac{4pl}{2} = \frac{-8PL+12PL}{6} = \frac{4PL}{6} = \frac{2PL}{3}$$

2^{eme} methode :

$$R = S = \frac{2ab}{3} \text{ avec } a = L \text{ et } b = P \text{ donc } R = \frac{2PL}{3}$$

3^{eme} methode : Méthode de Lagrange

$$Y = b_0 \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)} + b_1 \frac{(x-a_0)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)} + b_2 \frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)}$$

$$A(0,0) ; B\left(\frac{L}{2}, P\right) \text{ et } C(L, 0)$$

$$\text{Avec : } a_0 = x_0 = 0; a_1 = x_1 = \frac{L}{2}; a_2 = x_2 = L$$

$$b_0 = y_0 = 0; b_1 = y_1 = p; b_2 = y_2 = 0$$

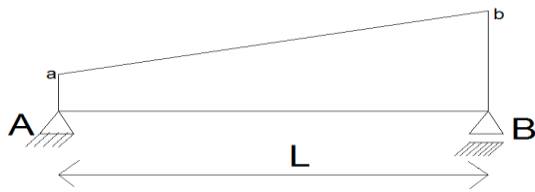
a_3 et b_3 N'existe pas, donc nous leurs déconsidérons

$$Y = 0 * \frac{\left(\frac{X-L}{2}\right)(X-L)}{\left(0-\frac{L}{2}\right)(0-L)} + P \frac{(X-0)(X-L)}{\left(\frac{L}{2}-0\right)\left(\frac{L}{2}-L\right)} + 0 \frac{(X-0)\left(\frac{X-L}{2}\right)}{(L-0)\left(L-\frac{L}{2}\right)} = P \frac{X(X-L)}{\frac{L}{2}\left(\frac{L}{2}-L\right)} = P \frac{X^2-XL}{\frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{2}}$$

$$Y = P \frac{X^2-XL}{-\frac{L^2}{4}} = 4P \frac{X^2-XL}{-L^2} = \frac{4PX}{L} - \frac{4PX^2}{L^2}$$

Nous avons la même fonction avec la 1^{ere} methode

Exemple 4. Charge trapézoïdale



1^{ère} methode :

Équation d'une droite passant par 2 points : $Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1)$

A (0, a) et B (L, b)

$$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1) \Rightarrow Y - a = \frac{b-a}{L-0}(X - 0) \Rightarrow Y = \frac{(b-a)}{L}X + a = \frac{bX}{L} - \frac{aX}{L} + a$$

$$R = \int_0^L \left(\frac{bX}{L} - \frac{aX}{L} + a \right) dx = \frac{b}{L} \left[\frac{X^2}{2} \right]_0^L - \frac{a}{L} \left[\frac{X^2}{2} \right]_0^L + a [X]_0^L = \frac{b}{L} * \frac{L^2}{2} - \frac{a}{L} * \frac{L^2}{2} + aL = \frac{(a+b)L}{2}$$

2^{ème} METHODE :

$$R = S = \frac{(B+b)h}{2} \quad \text{avec } B = b ; b = a \text{ et } h = L \text{ donc } R = \frac{(a+b)L}{2}$$

2.2 CENTRE DE GRAVITE

Ici, par centre de gravité on entend le point où s'applique la résultante.

On a deux méthodes pour le déterminer :

- Mathématique ($X_G = \frac{1}{R} \int_a^b X p(\alpha) dx$)
- Géométrique (voir les abaques des sections géométriques)

On sait que

- Le carré, le rectangle et le demi parabole symétrique : $X = L/2$
- Le triangle : $X = 2L/3$

➤ Méthode mathématique

$$X_G = \frac{1}{R} \int_a^b X p(\alpha) dx = \frac{1}{R} \int_a^b X p(\alpha) dx$$

Nous ne démontrons que les 4 cas précédents :

- Charge uniformément répartie (carré et/ou rectangle)

$$R = PL \text{ et } Y(\alpha) = P$$

$$X = \frac{1}{PL} \int_0^L X * P dx = \frac{P}{PL} \int_0^L X dx = \frac{L}{2}$$

- Charge triangulaire

$$R = PL/2 \text{ et } Y (\alpha) = PX/L$$

$$X = \frac{1}{\frac{PL}{2}} \int_0^L X * \frac{PX}{L} dx = \frac{2}{PL} * \frac{P}{L} \int_0^L X^2 dx = \frac{2L}{3}$$

- Demi-parabole symétrique

$$R = 2PL/3 \text{ et } Y = -\frac{4PX^2}{L^2} + \frac{4PX}{L}$$

$$X = \frac{1}{\frac{2PL}{3}} \int_0^L X \left(-\frac{4PX^2}{L^2} + \frac{4PX}{L} \right) dx = \frac{3}{2PL} \int_0^L \left(-\frac{4PX^3}{L^2} + \frac{4PX^2}{L} \right) dx = \frac{L}{2}$$

- Charge trapézoïdale

$$R = (a + b) \frac{L}{2} \text{ et } Y (\alpha) = -\frac{4PX^2}{L^2} + \frac{4PX}{L}$$

$$X = \frac{1}{\frac{(a+b)L}{2}} \int_0^L X \left(-\frac{4PX^2}{L^2} + \frac{4PX}{L} \right) dx = \frac{2b+a}{a+b} * \frac{L}{3}$$

3. CALCUL DES REACTIONS

Cette partie nous donne juste les valeurs des réactions aux appuis par rapport aux sollicitations.

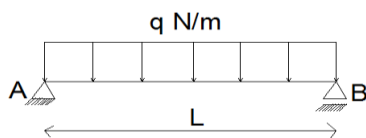
1^{ere} Methode : Équation d'équilibre statique

Dans cette méthode, on applique les équations d'équilibre statique

$$\Sigma F_x = 0 ; \Sigma F_y = 0 \text{ et } \Sigma M = 0$$

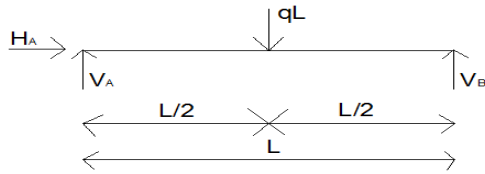
C'est la méthode générale et facile pour toutes les sollicitations.

Exemple 1.



$$R = qL ; X_G = \frac{L}{2} \text{ et } Y = P$$

On aura :



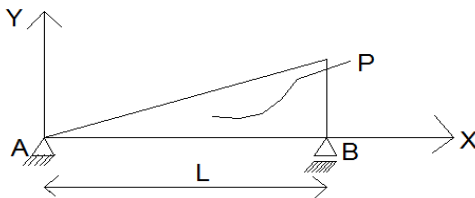
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - ql = 0 \quad (2)$$

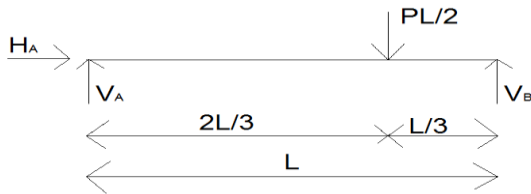
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \odot ql \frac{l}{2} - l V_B = 0 \Rightarrow V_B = \frac{ql}{2} \quad (3)$$

$$(1) \text{ dans } (2) : V_A + V_B - ql = 0 \Rightarrow V_A = ql - V_B = ql - \frac{ql}{2} \Rightarrow V_A = \frac{ql}{2}$$

Exemple 2.



$$Y = \frac{PX}{L} ; R = \frac{PL}{2} \text{ et } X_G = \frac{2L}{3}$$



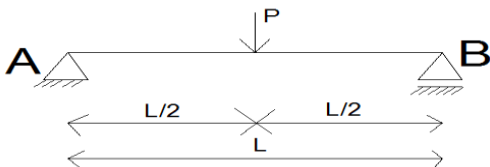
$$\sum F_x = H_A = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = V_A + V_B - \frac{PL}{2} = 0 \Rightarrow V_A + V_B = \frac{PL}{2} \quad (2)$$

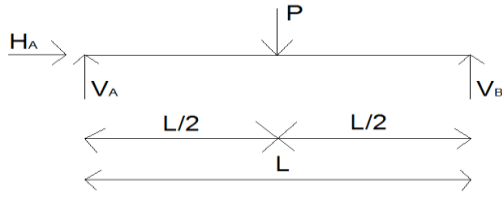
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \odot \frac{PL}{2} * \frac{2L}{3} - L V_B = 0 \Rightarrow V_B = \frac{PL}{3} \quad (3)$$

$$(3) \text{ dans } (2) : V_A + V_B = \frac{PL}{2} \Rightarrow V_A = \frac{PL}{2} - V_B = \frac{PL}{2} - \frac{PL}{3} \Rightarrow V_A = \frac{PL}{6}$$

Exemple 3.



$$R = P \text{ et } X_G = \frac{L}{2}$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0 \quad (1)$$

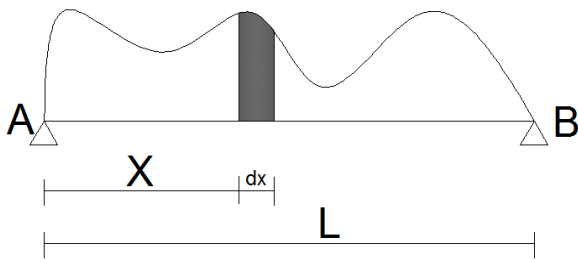
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - P = 0 \Rightarrow V_A + V_B = P \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \odot P \frac{L}{2} - L V_B = 0 \Rightarrow V_B = \frac{P}{2} \quad (3)$$

$$(3) \text{ dans } (2) : V_A + V_B = P \Rightarrow V_A = P - V_B = P - \frac{P}{2} \Rightarrow V_A = \frac{P}{2}$$

2^{eme} Methode : Méthode d'intégration

Exemple :

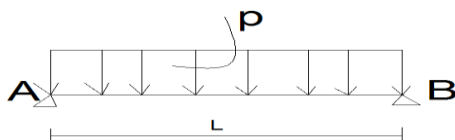


- Pour les charges réparties

$$R_A = \int_a^b p(\alpha) \left(1 - \frac{X}{L}\right) dx \quad \text{et} \quad R_B = \int_a^b p(\alpha) \frac{X}{L} dx$$

- L : la portée de la poutre
- a et b : les bornes qui situent la position de la charge
- $y(\alpha) = p(\alpha)$: la fonction de la charge
- X : le centre de gravité ou le point-là où s'applique la résultante

Exemple 1.



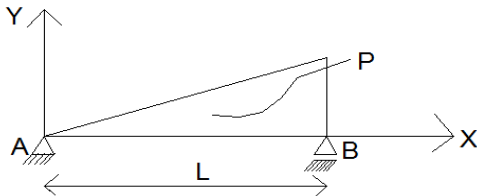
$$Y(\alpha) = P \quad \text{et} \quad X = L/2$$

$$R_A = \int_a^b p(\alpha) \left(1 - \frac{X}{L}\right) dx = \int_0^L P \left(1 - \frac{1}{L} * \frac{L}{2}\right) dx = \int_0^L \left(P - \frac{P}{2}\right) dx$$

$$= P (X)_0^L - \frac{P}{2} (X)_0^L = PL - \frac{PL}{2} = \frac{PL}{2}$$

$$R_B = \int_a^b p(\alpha) \frac{X}{L} dx = \int_0^L P * \frac{1}{L} * \frac{L}{2} dx = \int_0^L \frac{P}{2} dx = \frac{PL}{2}$$

Exemple 2.



$$Y = \frac{PX}{L} \quad \text{et} \quad X_G = \frac{2L}{3}$$

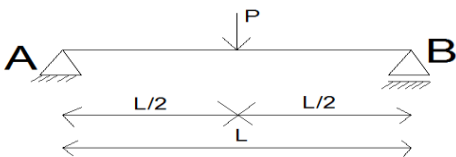
$$R_A = \int_a^b p(\alpha) \left(1 - \frac{X}{L}\right) dx = \int_0^L \frac{PX}{L} \left(1 - \frac{1}{L} * \frac{2L}{3}\right) dx = \int_0^L \left(\frac{PX}{L} - \frac{2PX}{3L}\right) dx = \frac{PL}{6}$$

$$R_B = \int_a^b p(\alpha) \frac{X}{L} dx = \int_0^L \frac{PX}{L} * \frac{2L}{3} * \frac{1}{L} dx = \int_0^L \frac{2PX}{3L} dx = \frac{PL}{3}$$

- Pour les charges concentrées

$$R_A = p(\alpha) \left(1 - \frac{X}{L}\right) \quad \text{et} \quad R_B = p(\alpha) \frac{X}{L}$$

Exemple 1.



$$Y(\alpha) = P \quad \text{et} \quad X_G = \frac{L}{2}$$

$$R_A = p(\alpha) \left(1 - \frac{X}{L}\right) = P \left(1 - \frac{L}{2} * \frac{1}{L}\right) = \frac{P}{2}$$

$$R_B = p(\alpha) \frac{X}{L} = P * \frac{L}{2} * \frac{1}{L} = \frac{P}{2}$$

Si nous avons plusieurs charges ces formules peuvent s'écrire :

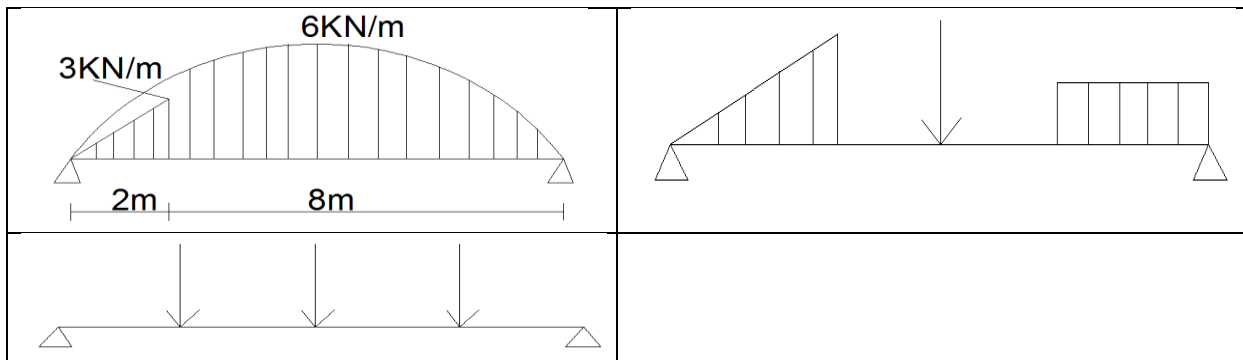
$$R_A = \sum_{i=1}^n \int_a^b P_i(\alpha) \left(1 - \frac{X_i}{L}\right) dx \quad \text{et} \quad R_B = \sum_{i=1}^n \int_a^b P_i(\alpha) \frac{X_i}{L} dx$$

$$R_A = \sum_{i=1}^n P_i(\alpha) \left(1 - \frac{X_i}{L}\right) \quad \text{et} \quad R_B = \sum_{i=1}^n P_i(\alpha) \frac{X_i}{L}$$

$$R_A = \sum_{i=1}^n \int_a^b P_i(\alpha) \left(1 - \frac{X_i}{L}\right) dx + \sum_{i=1}^n P_i(\alpha) \left(1 - \frac{X_i}{L}\right)$$

$$R_B = \sum_{i=1}^n \int_a^b P_i(\alpha) \frac{X_i}{L} dx + \sum_{i=1}^n P_i(\alpha) \frac{X_i}{L}$$

EXERCICES

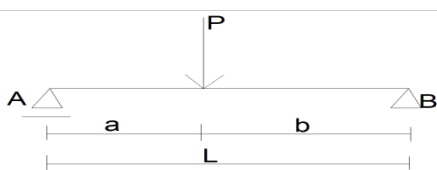


NB : cette methode est limitée et demande une bonne maitrise

3^{ieme} methode : **Méthode de calcul des réactions par proportion**

Cette méthode n'est applicable que pour des charges concentrées ou après avoir concentrée les forces reparties.

Exemple 1.



Par rapport à l'appui A

$$L \rightarrow \frac{4}{4}$$

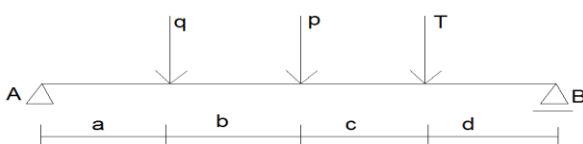
$$a \rightarrow X \Rightarrow X = \frac{4a}{4L} = \frac{a}{L} \text{ donc : } V_A = PX = P * \frac{a}{L} = \frac{Pa}{L}$$

Par rapport à l'appui B

$$L \rightarrow \frac{4}{4}$$

$$b \rightarrow X \Rightarrow X = \frac{4b}{4L} = \frac{b}{L} \text{ donc : } V_B = PX = \frac{Pb}{L}$$

Exemple 2.



Par rapport à l'appui A

$$L \rightarrow \frac{4}{4}$$

$$a \rightarrow X_1 \Rightarrow X_1 = \frac{4a}{4L} = \frac{a}{L}$$

$$a + b \rightarrow X_2 \Rightarrow X_2 = \frac{4(a+b)}{4L} = \frac{a}{L} + \frac{b}{L}$$

$$a + b + c \rightarrow X_3 \Rightarrow X_3 = \frac{4(a+b+c)}{4L} = \frac{a}{L} + \frac{b}{L} + \frac{c}{L}$$

$$\text{Donc } V_A = qX_1 + PX_2 + TX_3 = \frac{a}{L}q + \left(\frac{a}{L} + \frac{b}{L}\right)P + \left(\frac{a}{L} + \frac{b}{L} + \frac{c}{L}\right)T$$

Par rapport au point B

$$L \rightarrow \frac{4}{4}$$

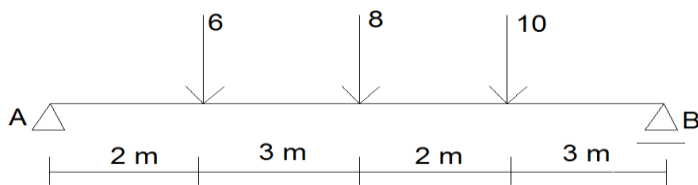
$$d \rightarrow X_1 \Rightarrow X_1 = \frac{4d}{4L} = \frac{d}{L}$$

$$c + d \rightarrow X_2 \Rightarrow X_2 = \frac{4(c+d)}{4L} = \frac{c}{L} + \frac{d}{L}$$

$$b + c + d \rightarrow X_3 \Rightarrow X_3 = \frac{4(b+c+d)}{4L} = \frac{b}{L} + \frac{c}{L} + \frac{d}{L}$$

$$\text{Donc } V_B = TX_1 + PX_2 + qX_3 = \frac{d}{L}T + \left(\frac{c}{L} + \frac{d}{L}\right)P + \left(\frac{b}{L} + \frac{c}{L} + \frac{d}{L}\right)q$$

Exemple 3.



Par rapport au point A

$$10 \text{ m} \rightarrow \frac{4}{4}$$

$$2 \text{ m} \rightarrow X_1 \Rightarrow X_1 = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 10} = \frac{1}{5}$$

$$5 \text{ m} \rightarrow X_2 \Rightarrow X_2 = \frac{4 \cdot 5}{4 \cdot 10} = \frac{1}{2}$$

$$7 \text{ m} \rightarrow X_3 \Rightarrow X_3 = \frac{4 \cdot 7}{4 \cdot 10} = \frac{7}{10}$$

$$\text{Donc } V_A = 6X_1 + 8X_2 + 10X_3 = \frac{1}{5} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{7}{10} \cdot 10 = 12,2 \text{ KN}$$

Par rapport au point B

$$10 \text{ m} \rightarrow \frac{4}{4}$$

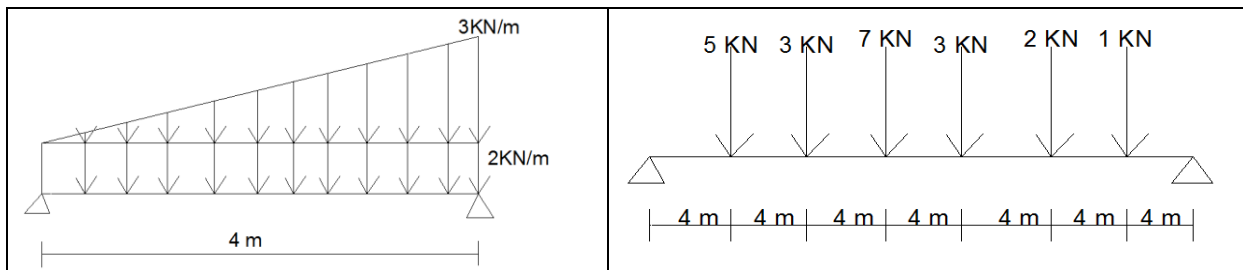
$$3 \text{ m} \rightarrow X_1 \Rightarrow X_1 = \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 10} = \frac{3}{10}$$

$$5 \text{ m} \rightarrow X_2 \Rightarrow X_2 = \frac{4 \cdot 5}{4 \cdot 10} = \frac{1}{2}$$

$$8 \text{ m} \rightarrow X_3 \Rightarrow X_3 = \frac{4 \cdot 8}{4 \cdot 10} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Donc } V_B = 10X_1 + 8X_2 + 6X_3 = \frac{3}{10} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{4}{5} \cdot 6 = 11,8 \text{ KN}$$

EXERCICES



4. EFFORTS INTERIEURS

Par efforts intérieurs on entend des forces qui se développent à l'intérieur de la structure.

Ces forces ne sont visibles qu'après avoir coupé la structure à un point donné et ces forces sont M, N et T

Avec : - M : le moment fléchissant

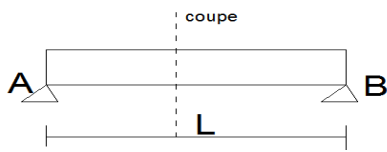
- T : effort tranchant
- N : effort normal

Une force est dite :

- Normal si sa ligne d'action est parallèle à la structure (ou partie de la structure considérée)
- Tranchant si sa ligne d'action est perpendiculaire à la structure (ou partie de la structure considérée)

➤ REPRESENTATION DE M, N et T

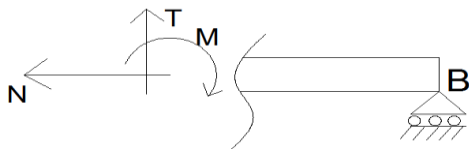
Soit la structure suivante :



On aura : - de gauche à droite ($A \rightarrow B$)



- De droite à gauche ($B \rightarrow A$)



➤ Méthode

On a deux méthodes :

- La méthode des sections ou méthode des zones ou méthode des fonctions
- La méthode des coupes ou méthode des points caractéristiques
- **La méthode des sections :**

Consiste à couper ou à sectionner la structure en autant des zones. Par zone, on entend la distance comprise entre les appuis, les points d'application des charges concentrées et réparties et le moment et le point de changement brusque des coupes

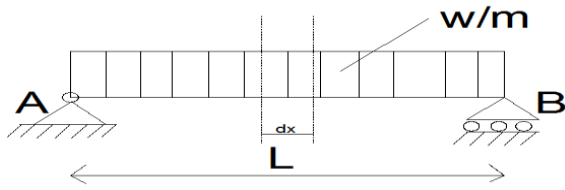
- **Méthode des coupes :**

Cette méthode consiste à calculer les efforts intérieurs aux points caractéristiques de la structure. Par point caractéristique, on entend les points d'application des charges concentrées, réparties, le moment et le point de changement des coupes

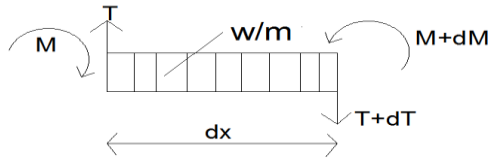
NB : attention aux signes

➤ Relation entre M et T

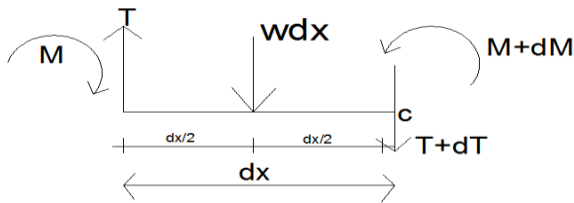
Considérons la structure suivante



Après la coupe on aura :



$$R = PL = W dx \quad \text{et} \quad X = \frac{L}{2} = \frac{dx}{2}$$



$$\sum M_c = 0 \Rightarrow \odot M - (M + dM) + T dx - w dx * \frac{dx}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M - M - dM + T dx - \frac{w dx^2}{2} = 0 \Rightarrow -dM + T dx - \frac{w dx^2}{2} = 0$$

$$\text{Avec : } dx^2 \approx 0 \Rightarrow -dM + dxT = 0 \Rightarrow dxT = dM \Rightarrow T = \frac{dM}{dx}$$

$$\text{De A vers B (de gauche à droite): } T = \frac{dM}{dx}$$

$$\text{De B vers A (de droite à gauche) : } T = - \frac{dM}{dx}$$

- **Formule générale**
- Charge répartie

$$M = V_A X - \int_0^X p(\alpha)(X-\alpha) d\alpha$$

$$T = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx} (V_A X - \int_0^X p(\alpha)(X-\alpha) d\alpha) = V_A - \frac{d}{dx} (\int_0^X p(\alpha)(X-\alpha) d\alpha)$$

Avec : $p(\alpha)$: la fonction de la charge qu'on exprime en α

$$\text{Exemple : charge triangulaire : } Y = \frac{PX}{L} \Rightarrow Y(\alpha) = p(\alpha) = \frac{P\alpha}{L}$$

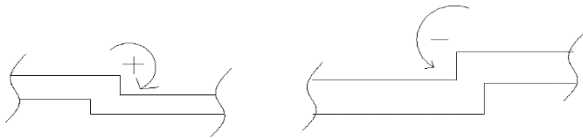
5. DIAGRAMME

Par définition simple, le diagramme c'est la représentation graphique des efforts intérieurs. Les conventions des signes adoptés dans ce cours sont les suivantes :

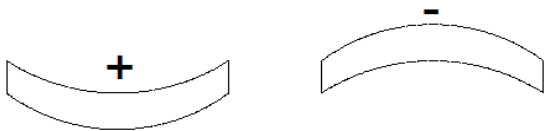
- L'effort normal est positif quand il tend la poutre, c'est-à-dire quand il provoque une traction dans la poutre



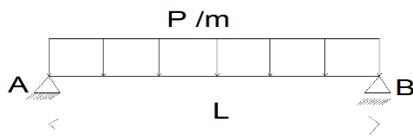
- L'effort tranchant est positif quand il a tendance à faire tourner le morceau de poutre sur lequel il agit dans le sens des aiguilles d'une montre



- Le moment de flexion est positif s'il fléchit la poutre en comprimant les fibres supérieures et les fibres inférieures sont tendues

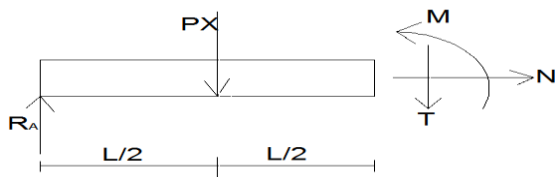


Exemple 1.



On sait que : $R_A = R_B = \frac{PL}{2}$

1^{ere} methode : Méthode des sections



$$\sum N = 0 \Rightarrow N + H_A = 0 \Rightarrow N = -H_A \Rightarrow N = 0$$

$$\sum T = 0 \Rightarrow -T - PX + R_A = 0 \Rightarrow T = \frac{PL}{2} - PX$$

$$\sum M_X = 0 \Rightarrow \cup M_X + PX * \frac{X}{2} - R_A X = 0 \Rightarrow M_X = R_A X - \frac{PX^2}{2} = \frac{PLX}{2} - \frac{PX^2}{2}$$

$$\text{Ou } T = \frac{dM}{dx} = \frac{PL}{2} - PX$$

Si $x = 0$; $N = 0$; $T = PL/2$ et $M = 0$

$$\text{Si } x = L/2 ; N = 0 ; T = 0 \text{ et } M = \frac{PL^2}{8}$$

$$\text{Si } x = L ; N = 0 ; T = - PL/2 \text{ et } M = 0$$

On aura le même résultat même si on considérait la partie droite

2^{eme} methode : Méthode des coupes

Dans cette poutre, on à 3 points caractéristiques (A, $\frac{L}{2}$ et L)

Moment

$$M_A = R_A * 0 = 0$$

$$M_X = R_A * \frac{L}{2} - \frac{PL^2}{8} = \frac{PL}{2} * \frac{L}{2} - \frac{PL^2}{8} = \frac{PL^2}{8}$$

$$\text{Ou } M_X = R_A * \frac{L}{2} - \frac{P}{2} * \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{PL}{2} * \frac{L}{2} - \frac{PL^2}{8} = \frac{PL^2}{8}$$

$$M_B = R_A * L - PL * \frac{L}{2} = \frac{PL}{2} * L - PL * \frac{L}{2} = 0$$

$$\text{Avec : } M_X = \frac{P X^2}{2} ; X = \frac{L}{2}$$

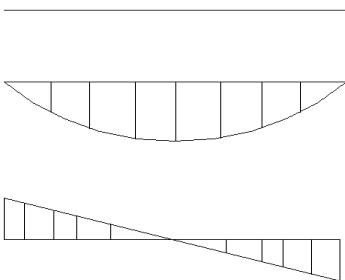
Effort tranchant

$$T_A = R_A = \frac{PL}{2}$$

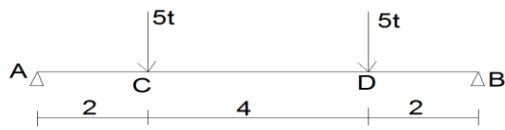
$$T_X = R_A - P * \frac{L}{2} = \frac{PL}{2} - \frac{PL}{2} = 0$$

$$T_B = R_A - PL = \frac{PL}{2} - PL = -\frac{PL}{2}$$

- Diagramme



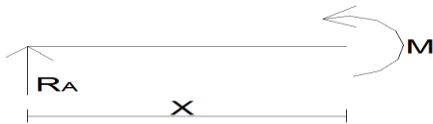
Exemple 2.



$$R_A = R_B = 5t$$

1^{ere} methode : methode des sections

Zone AC : $0 \leq X \leq 2$



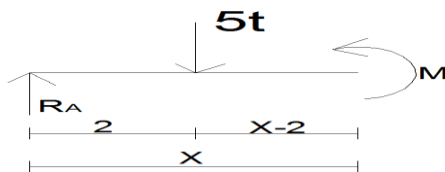
$$\sum M = 0 \Rightarrow \odot M - R_A X = 0 \Rightarrow M = 5X$$

$$T = \frac{dM}{dx} = 5$$

Si $x = 0$; $T = 5$ et $M = 0$

Si $x = 2$; $T = 5$ et $M = 10$

Zone CB : $2 \leq X \leq 6$



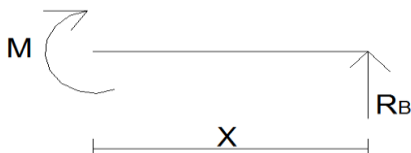
$$\sum M = 0 \Rightarrow \odot M - R_A X + 5(X - 2) = 0 \Rightarrow M = 10$$

$$T = \frac{dM}{dx} = 0$$

Si $x = 2$; $T = 0$ et $M = 10$

Si $x = 6$; $T = 0$ et $M = 10$

Zone BD : $0 \leq X \leq 2$



$$\sum M = 0 \Rightarrow \odot M - R_B X = 0 \Rightarrow M = 5X$$

$$T = \frac{dM}{dx} = 5$$

Si $x = 0$; $T = 5$ et $M = 0$

Si $x = 2$; $T = 5$ et $M = 10$

2^{ieme} methode : Méthode des coupes

Moment

$$M_A = 0$$

$$M_C = R_A * 2 = 10$$

$$M_D = R_A * 6 - 5 * 4 = 10$$

$$M_B = R_A * 8 - 5 * 6 - 5 * 2 = 0$$

Effort tranchant

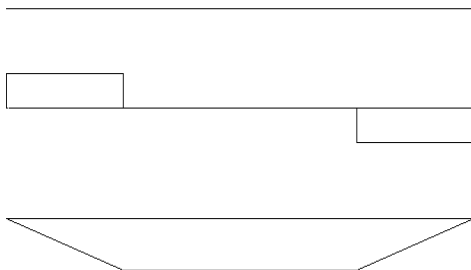
$$T_A = R_A = 5$$

$$T_C = 5 - 5 = 0$$

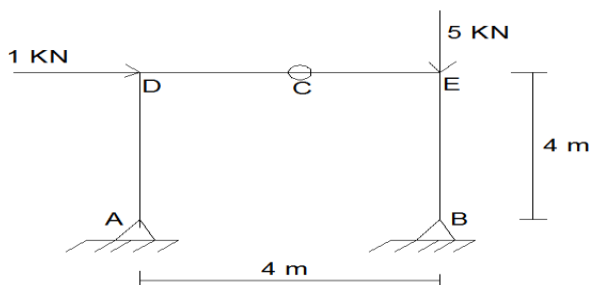
$$T_D = 0 - 5 = -5$$

$$T_B = -5 + 5 = 0$$

- Diagramme



Exemple 3.



1. VERIFICATION DE L'ISOSTATICITE

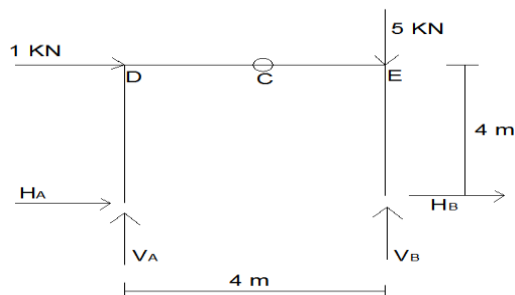
Appui A = 2 réactions

Appui B = 2 réactions

Somme = 4 réactions – 3 équations d'équilibre – 1 articulation = 0

D'où la structure est isostatique

2. S.C.R.L



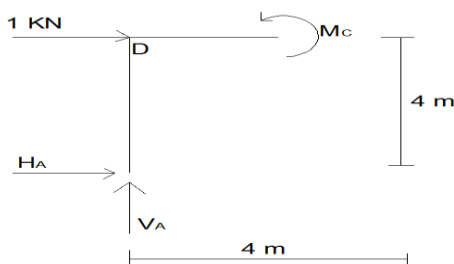
$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A + H_B + 1 = 0 \Rightarrow H_A = -H_B - 1 \quad (1)$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - 5 = 0 \Rightarrow V_A = 5 - V_B \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \odot 1 * 4 + 5 * 4 - 4V_B = 0 \Rightarrow V_B = 6 \text{ KN} \quad (3)$$

$$(3) \text{ dans } (2) : V_A = 5 - 6 = -1 \text{ KN}$$

On fait la coupe au point C et on calcul la partie gauche

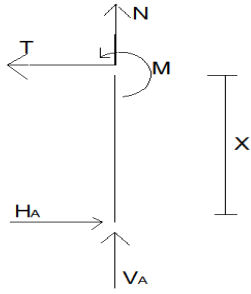


$$M_C = 0 \Rightarrow \odot 4H_A - 2V_A = 0 \Rightarrow H_A = \frac{1}{2}V_A = \frac{1}{2}(-1) = -0,5 \quad (4)$$

$$(4) \text{ dans } (1) : H_A = -H_B - 1 \Rightarrow H_B = -H_A - 1 \Rightarrow H_B = -0,5$$

4. EFFORTS INTERIEURS

Zone AD : $0 \leq X \leq 4$



$$\Sigma N = 0 \Rightarrow N + V_A = 0 \Rightarrow N = -V_A = 1$$

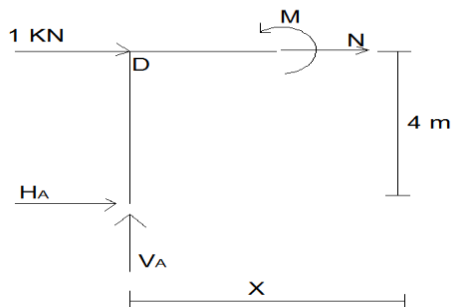
$$\Sigma M = 0 \Rightarrow \odot M + H_A X = 0 \Rightarrow M = -H_A X = -0,5X$$

$$T = \frac{dM}{dx} = 0,5$$

$$\text{Si } x = 0 ; N = 1 ; T = 0,5 \text{ et } M = 0$$

$$\text{Si } x = 4 ; N = 1 ; T = 0,5 \text{ et } M = 2$$

Zone DC : $0 \leq X \leq 2$



$$\Sigma N = 0 \Rightarrow N + H_A + 1 = 0 \Rightarrow N = -1 - H_A = -1 + 0,5 = -0,5$$

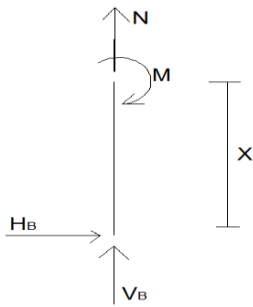
$$\Sigma M = 0 \Rightarrow \odot M + H_A * 4 - V_A X = 0 \Rightarrow M = -H_A * 4 + V_A X = -X + 2$$

$$T = \frac{dM}{dx} = -1$$

$$\text{Si } x = 0 ; N = 0,5 ; T = -1 \text{ et } M = 2$$

$$\text{Si } x = 2 ; N = -0,5 ; T = -1 \text{ et } M = 0$$

Zone BE : $0 \leq X \leq 4$



$$\sum N = 0 \Rightarrow N + V_B = 0 \Rightarrow N = -V_B = -6$$

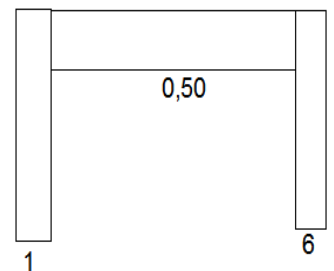
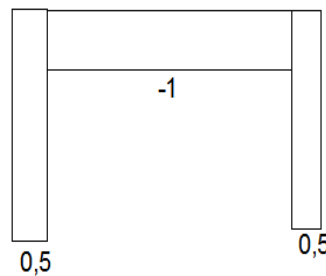
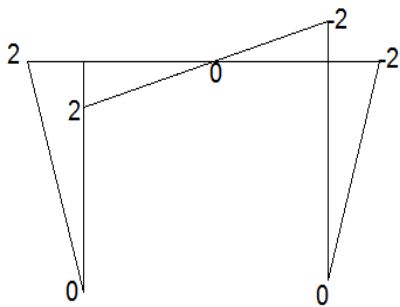
$$\sum M = 0 \Rightarrow \odot M - H_B X = 0 \Rightarrow M = H_B X = -0,5X$$

$$T = - \frac{dM}{dx} = 0,5$$

$$\text{Si } x = 0 ; N = -6 ; T = 0,5 \text{ et } M = 0$$

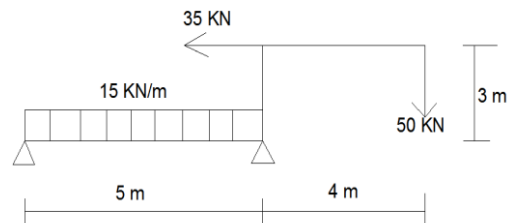
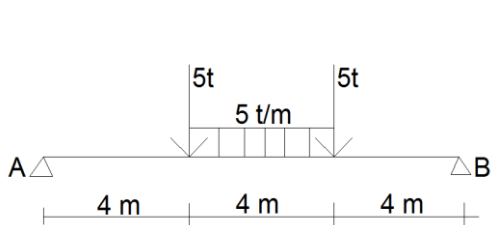
$$\text{Si } x = 4 ; N = -6 ; T = 0,5 \text{ et } M = -2$$

5. DIAGRAMME



QUESTIONS

Calculer les structures suivantes et tracer leurs diagrammes


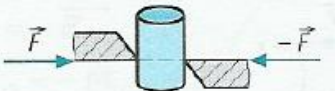
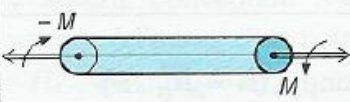
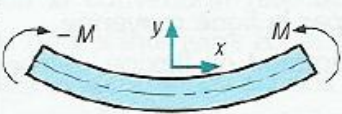


CHAPITRE 4. TRACTION ET COMPRESSION

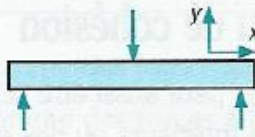
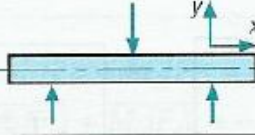
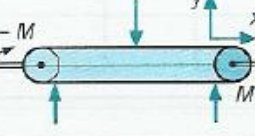
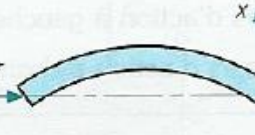
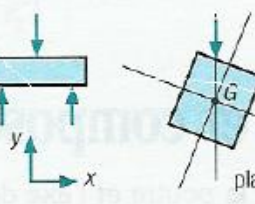
Lorsqu'on applique les charges à des solides ou à des structures d'après saint Venant, les contraintes sont des fonctions des éléments de réduction c.à.d. σ (M, N et T). La combinaison de ces éléments de réduction provoque la combinaison des efforts intérieurs.

On a deux sortes des sollicitations :

Sollicitations simples :

Cas	Exemple	Composantes				Observations
		N	T	M_T	M_x	
traction		N	0	0	0	Sollicitations simples
cisaillement		0	T	0	0	
torsion		0	0	M_T	0	
flexion pure		0	0	0	M_x	

Sollicitations composées :

flexion simple		0	T_y	0	M_z	Sollicitations composées
flexion + traction		N	T_y	0	M_z	
flexion + torsion		0	T_y	M_T	M_z	
flambage		N	0	0	M_z	
flexion déviée		0	T_y	0	M_z	
			T_z	0	M_y	

N : effort normal ; T : effort tranchant ; M_T : moment de torsion

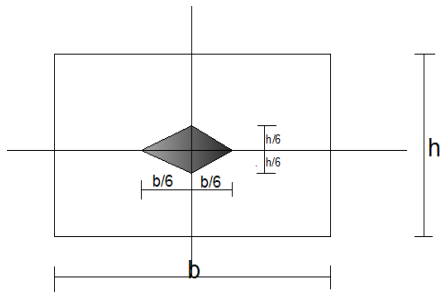
et M_f : Moment fléchissant

Définition : On parle de la traction simple ou de la compression simple lorsque les éléments de réduction se réduisent à une seule résultante unique tangente à la fibre moyenne qui passe par le centre de gravité de la pièce ou de la structure.



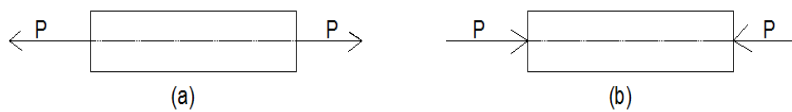
Si la force qui sollicite la structure tombe dans le noyau central, il y a compression ou traction simple.

Pour la section rectangulaire : $n = b/6$ et $n = h/6$ (n : noyau central)



But : un des buts principaux de la RDM est le calcul des déformations des corps sous différents types des charges

Barreau ou pièce chargé axialement



Si les forces sont dirigées vers l'extérieur du barreau, celui-ci est dit en tension (traction) comme la figure (a), dans le cas contraire c'est la compression comme la figure (b)

Sous l'action de ces deux forces, il s'établit dans les barreaux des forces internes résistantes, qui peuvent être étudiées en coupant le barreau en un point quelconque de sa longueur par un plan perpendiculaire à l'axe longitudinale puisque la force résultante P est appliquée au centre, il est couramment admis qu'elles sont uniformément réparties sur toute la section.

Contrainte normale

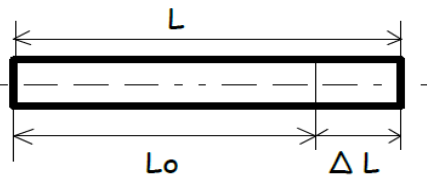
La contrainte normale est définie comme intensité de la force normale par unité de surface et elle est exprimée en unité de force par unité de surface (N/mm^2 , MPa, ...)

Si les forces appliquées aux extrémités du barreau (ou structure) sont telles qu'il soit en tension, elles engendrent des contraintes des tensions. Si le barreau (structure) est compression, ce sont des contraintes des compressions.

Déformation normale

On peut déterminer l'allongement par unité de longueur, qui est la déformation normale notée ($e = \varepsilon$). Pour cela on divise l'allongement total (ΔL) par la longueur de référence L

$$e = \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \text{ pour simplifier l'écriture } e = \frac{\Delta}{L}$$



La déformation est adimensionnelle

e : peut-être un allongement ou un raccourcissement

CONTRAINTE

La contrainte normale (σ) peut être calculée pour toute valeur de la charge axiale à partir de la surface initiale de la section droite, en utilisant l'équation :

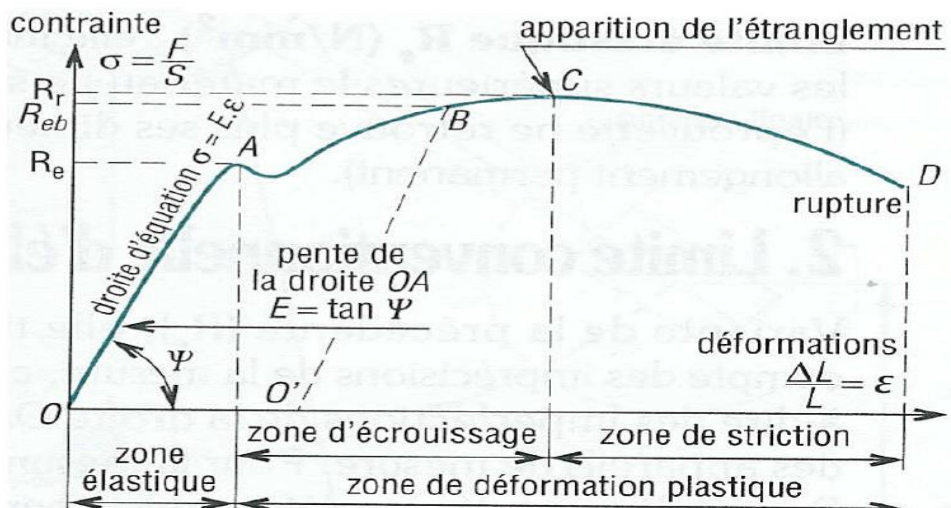
$$\sigma_{calcul} = \frac{P}{A} = \frac{N}{S}$$

La contrainte admissible : Pour que la structure puisse supporter des charges, il faut que les contraintes qui s'y développent restent toujours inférieures à une contrainte limite appelée contrainte admissible

$$\sigma_{adm} = E * \varepsilon = \frac{\sigma_d}{n} \text{ Ou voir les catalogues des constructions}$$

$$\text{Donc : } \sigma_{calcul} = \frac{P}{A} = \frac{N}{S} \leq \sigma_{adm}$$

Diagramme de déformation



Avec : - OA : zone élastique (période d'élasticité)

- BC : zone plastique (période de plasticité)
- CD : période de durcissement
- D : zone de rupture

- Dans la zone OA : la longueur reprend sa valeur initiale après sollicitation
- Dans la zone BC : c'ad l'effort de traction est dépassée, la longueur ne reprend pas sa valeur initiale après la sollicitation
- Le point E correspond à la valeur ($\sigma = \frac{N}{S}$) qui est la limite de la rupture

Type des ruptures

La rupture d'une pièce tendue peut avoir lieu par séparation ou par glissement.

- La rupture par séparation : C'est la décohésion du matériau et se produit dans une section droite. C'est le cas des certains fragiles qu'on peut soumettre à des efforts de traction tels que la fonte, le bois, le béton ...
- La rupture par glissement : C'est la déformation plastique considérable et un glissement des sections obliques entraînant la striction et finalement la rupture

Quelques matériaux et leurs caractéristiques

- Aciers dur carbone (0,15 % à 0,25%)

$$E = 21 * 10^5; e = 21 * 10^2 \text{ à } 28 * 10^2 \text{ et } \sigma_{adm} = 38 * 10^2 \text{ à } 46 * 10^2$$

- Acier au nickel

$$E = 20 * 10^5; e = 28 * 10^2 \text{ à } 35 * 10^2 \text{ et } \sigma_{adm} = 55 * 10^2 \text{ à } 70 * 10^2$$

- Cuivre laminé à froid : $E = 11 * 10^5$ et $\sigma_{adm} = 20 * 10^2$ à $28 * 10^2$
- Verre : $E = 7 * 10^5$ et $\sigma_{adm} = 250$
- Béton en compression : $E = 2,8 * 10^5$ et $\sigma_{adm} = 200$
- Caoutchouc : $E = 8 \text{ N/mm}^2$
- Plastique, polythène et nylon : $E = 1400 \text{ N/mm}^2$
- Bois (le long des fibres) : $E = 14.000 \text{ N/mm}^2$
- Béton (200) : $E = 23.000 \text{ N/mm}^2$
- Verre ordinaire et aluminium allié : $E = 70.000 \text{ N/mm}^2$
- Aciers alliés : $E = 210.000 \text{ N/mm}^2$
- Diamant : $E = 12.000.000 \text{ N/mm}^2$

FORMULES

$\sigma_{calcul} = \frac{P}{A} = \frac{N}{S}$	$\Delta L = L$	$\Delta = \frac{NL}{ES}$
$\sigma_{adm} = E * \varepsilon = \frac{\sigma_d}{n}$	$e = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma_{adm}}{E}$	$N = \sigma * S$

Avec : - σ_c : contrainte de calcul

- $N = P$: effort normal de traction ou de compression

- E : module d'élasticité
- e = ε : déformation (allongement ou raccourcissement)
(Déformation relative ou unitaire)
- ΔL : déformation totale
- L : longueur initiale
- n : facteur de sécurité
- σ_d : contrainte dangereuse

Pour des pièces composées : $\Delta L = \sum_{i=1}^n \frac{N_i L_i}{E_i S_i}$

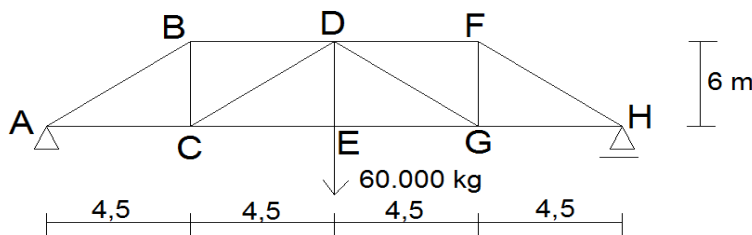
EXERCICES

Exemple 1. Dimensionner le câble d'un ascenseur ayant une masse de 5000 tonnes et descendant sous une accélération de 20 m/s² si la contrainte admissible est de 1500 t/cm²

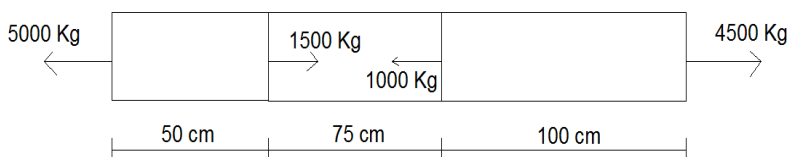
Exemple 2. Calculer la composante normale de la contrainte sur une section circulaire de diamètre d = 20 cm sollicitée par une charge axiale P = 40 KN, en supposant que ce l'acier allié que vaut son raccourcissement



Exemple 3. Soit la poutre triangulaire porte la seule charge de 60.000 kg en admettant pour la contrainte pratique du matériau en tension 1200 Kg/cm², calculer la section nécessaire des barres DE et AC et Calculer l'allongement de la barre DE sur sa longueur de 6 m avec $E = 2,1 * 10^6 \frac{Kg}{cm^2}$

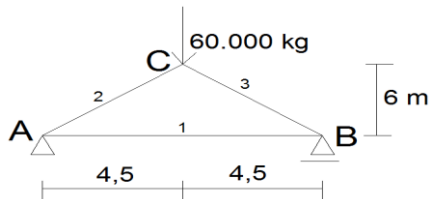


Exemple 4. Un barreau d'acier de 5 cm² de section est sollicité par les forces représentées dans la figure ci-dessous. Calculer l'allongement total du barreau pour l'acier $E = 21 * 10^5 \frac{Kg}{cm^2}$



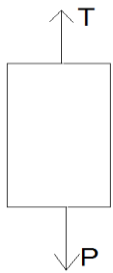
Exemple 5. Un câble d'acier de $4,71 \text{ mm}^2$ de section est utilisé pour le levage dans la construction. Si 150.000 mm de câble sont suspendus verticalement et servent à lever une charge de 200.000 g suspendue à l'extrémité inférieure, calculer l'allongement total du câble si le poids spécifique de l'acier utilisé est $7,8 \text{ g/cm}^2$ et $E = 2,1 * 10^9 \text{ g/cm}^2$

Exemple 6. Dimensionner le treillis suivant si la contrainte admissible est de 1200 Kg/cm^2



RESOLUTIONS

Exemple 1.



$$F = m * a \text{ or } F = T - P \Rightarrow T - P = m * a \text{ or } P = m * g$$

$$T = m a + m g = m (a + g)$$

$$\text{Avec : } g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 981 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

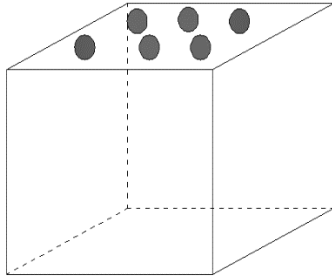
$$\sigma = \frac{T}{S} = \frac{m(a+g)}{S} \Rightarrow S = \frac{m(a+g)}{\sigma}$$

$$\text{avec : } m = 5000 \text{ t ; } a = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2000 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} ; g = 981 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \text{ et } \sigma = 1500 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$$

$$S = \frac{5000(2000+981)}{1500} = 9936,7 \text{ cm}^2$$

$$\text{Si nous avons 6 câbles : } S = \frac{9936,7}{6} = 1656 \text{ cm}^2$$

$$S = \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 * 1656}{3,14}} = 45,93 \text{ cm}$$



Exemple 2.

- $\sigma = \frac{P}{S} = \frac{P}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{4P}{\pi D^2} = \frac{4 * 40}{3,14 * 20^2} = 0,127 \frac{KN}{cm^2}$
- $\sigma = E * \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{12700}{210000} = 0,06$

Exemple 4.



$$5000 \text{ kg} - 3500 \text{ kg} = 1500 \text{ kg}$$



$$4500 \text{ kg} - 3500 \text{ kg} = 100 \text{ kg}$$



$$\Delta L = \frac{5000 * 50}{2100000 * 5} + \frac{3500 * 75}{2100000 * 5} + \frac{4500 * 100}{2100000 * 5} = 0,092 \text{ cm}$$

Exemple 5.

$$S = 4,71 \text{ mm}^2 ; L = 150000 \text{ mm} ; P = 200000 \text{ g} ; w = 7,8 \text{ g/cm}^2$$

$$E = 2,1 * \frac{10^9 \text{ g}}{\text{cm}^2}$$

- L'allongement total produit par la force P

$$\Delta L_1 = \frac{P L}{A E} = \frac{200000 * 150000}{4,71 * 2,1 * 10^9} = 5 \text{ cm}$$

- L'allongement total produit par le poids mort du câble

$$\Delta L_2 = \frac{P L}{2 A E} = \frac{5510700 * 150000}{2 * 4,71 * 2,1 * 10^9} = 0,4 \text{ cm}$$

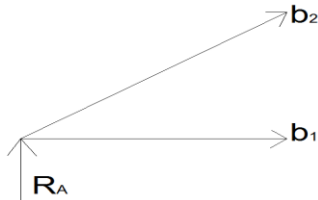
$$\text{Donc : } \Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = 5,4 \text{ cm}$$

Exemple 6.

$$\text{Tg } \theta = \frac{6}{4,5} = 1,33 \Rightarrow \theta = 53,13 \Rightarrow \text{Cos } \theta = 0,6 \text{ et } \sin \theta = 0,79$$

$$R_A = R_B = 30000 \text{ Kg}$$

Nœud A et Nœud B : $b_2 = b_3$



$$\Sigma F_X = 0 \Rightarrow b_1 + b_2 \cos \theta = 0 \Rightarrow b_1 = -b_2 \cos \theta = -0,6 b_2 \quad (1)$$

$$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow R_A + b_2 \sin \theta = 0 \Rightarrow b_2 = -\frac{R_A}{\sin \theta} = -\frac{30000}{0,79} = -37974,6 \text{ Kg} \quad (2)$$

$$(2) \text{ dans } (1) : b_1 = -0,6 * (-37974,6) = 22784,76 \text{ kg}$$

La barre la plus chargée c'est : $b_2 = 37974,6 \text{ kg}$

$$\sigma_c \leq \sigma_{adm} \Rightarrow \frac{P}{S} \leq 1200 \Rightarrow S \geq \frac{P}{1200} = \frac{37974,6}{1200} = 31,65 \text{ cm}^2$$

Nous adoptons : $S = 35 \text{ cm}^2$

CHAPITRE 5. FLEXION SIMPLE ET PURE

5.1 DEFINITION

- Une section est soumise à la flexion pure, lorsque les éléments des réductions des forces extérieures se réduisent en une composante M
- Lorsque l'effort tranchant et le moment existent, dans ce cas la sollicitation est dite flexion simple

Exemple :

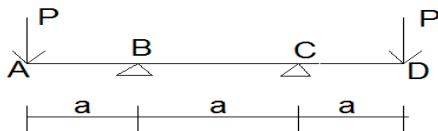
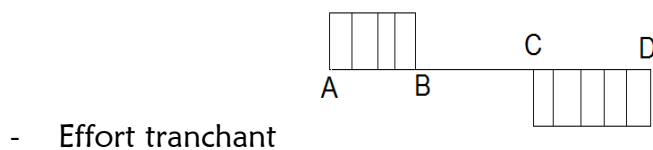
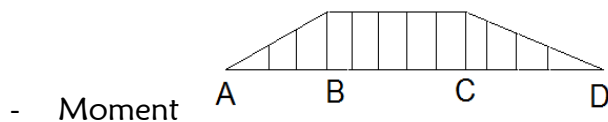


Diagramme :



La partie AB et CD sont soumise à la flexion simple (flexion ordinaire)

La partie BC est soumise à la flexion pure (flexion circulaire)

Donc : flexion pure : $M \neq 0$ et $T = 0$ et flexion simple : M et $T \neq 0$

5.2 CONTRAINTE NORMALE DE FLEXION (σ)

$$\sigma = \frac{M}{I} = \frac{MY}{I}$$

Avec σ : contrainte normale ; M : moment fléchissant ; I : moment d'inertie et Y : axe neutre

$y = h/2$ (section rectangulaire) et $Y = R = D/2$ (section circulaire)

La contrainte est proportionnelle au moment fléchissant et inversement proportionnelle au moment d'inertie

$w = \frac{I}{Y}$ avec w : module de flexion

Pour des questions de sécurité et de résistance en flexion, la contrainte normale σ_{max} dans la section droite la plus chargée doit rester inférieure à une contrainte limite admissible

Condition de résistance (sécurité) : $\sigma_{max} \leq \sigma_{adm}$ avec $\sigma_{max} = \frac{M_{max} Y}{I}$

5.3 CONTRAINTE DE CISAILLEMENT EN FLEXION (τ)

Si une structure (poutre) est sollicitée par deux efforts M et T, la contrainte de cisaillement en flexion (τ) apparaisse.

La valeur de la contrainte de cisaillement est donnée par :

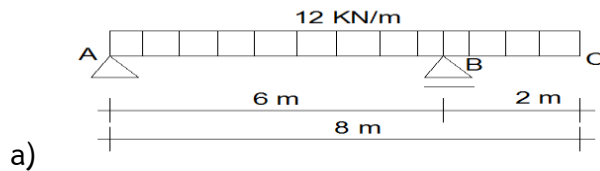
$\tau = \frac{T_{max} m_s}{I b}$ avec T_{max} : effort tranchant max ; m_s : moment statique ;

b : largeur de la poutre à l'endroit où est calculée la contrainte de cisaillement et I : moment d'inertie

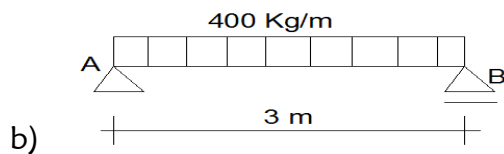
- $\tau = \frac{3 T}{2 S}$ (section rectangulaire) ; $S = b h$
- $\tau = \frac{4 T}{3 \pi R^2} = \frac{16 T}{3 \pi D^2}$ (section circulaire)
- $\tau = \frac{3 T}{b h}$ (section triangulaire)

EXERCICES

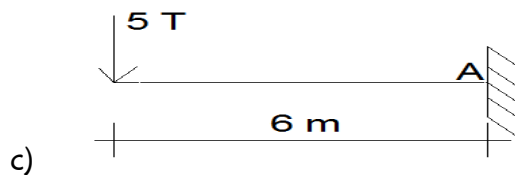
1. Dimensionner les poutres suivantes



$$\sigma_{adm} = 150 \frac{N}{cm^2} \text{ et } \tau_{adm} = 60 \frac{N}{cm^2}$$

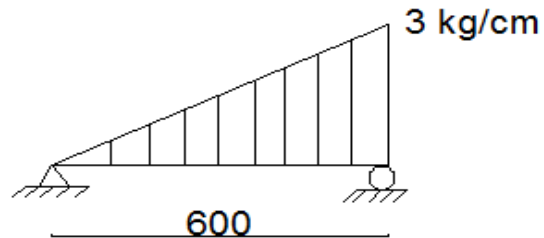
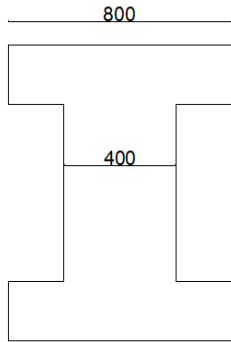


$$\sigma_{adm} = 217 \frac{kg}{cm^2} \text{ et } \tau_{adm} = 54 \frac{kg}{cm^2} \text{ Avec les sections circulaire et rectangulaire}$$



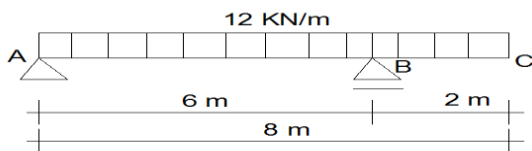
$$E = 2,35 \cdot 10^5 \text{ kgf/cm}^2 ; \varepsilon = 0,5 \text{ et } \tau = 32 \text{ kg/cm}^2$$

- d) Calculer la contrainte normale maximum à 2 m de l'appui A, et vérifier s'il Ya stabilité en tenant compte de la contrainte admissible de 1250 kg/cm^2
- e) Calculer la contrainte de flexion maximale de la poutre ci-dessous. Il s'agit d'un profilé en I avec une portée de 6m



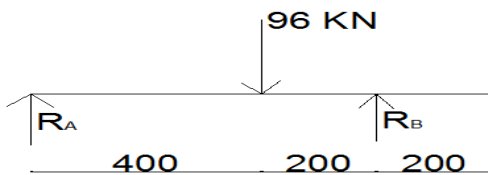
RESOLUTIONS

Exemple 1.



$$R = PL = 12 * 8 = 96 \text{ KN}$$

$$X = L/2 = 8/2 = 4 \text{ m}$$

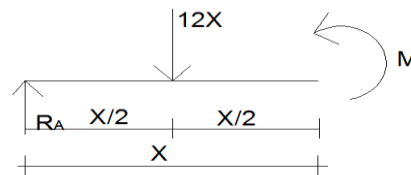
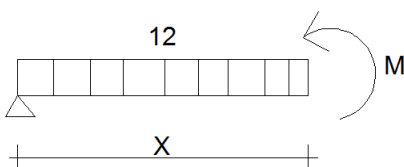


$$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - 96 = 0 \Rightarrow R_A = 96 - R_B \quad (1)$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \odot 96 * 4 - 6R_B = 0 \Rightarrow R_B = 64 \text{ KN} \quad (2)$$

(2) dans (1) : $R_A = 96 - 64 \Rightarrow R_A = 32 \text{ KN}$

ZONE AB : $0 \leq x \leq 6\text{m}$



$$M + 12X * \frac{X}{2} - R_A X = 0 \Rightarrow M = R_A X - \frac{12 X^2}{2} = 32 - 6x^2$$

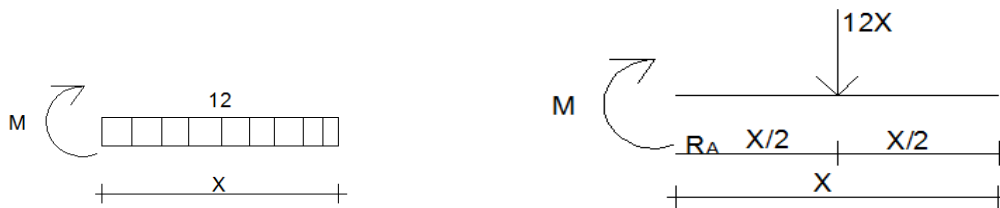
$$T = dM/dx = (32 - 6x^2)' = 32 - 12X$$

Si $x = 0$; $M = 0$; $T = 32$

Si $x = 3 \text{ m}$; $M = 42$; $T = -4$

Si $x = 6 \text{ m}$; $M = -24$; $T = -4$

ZONE CB : $0 \leq x \leq 2 \text{ m}$



$$M + \frac{12 X^2}{2} = 0 \Rightarrow M = -6x^2$$

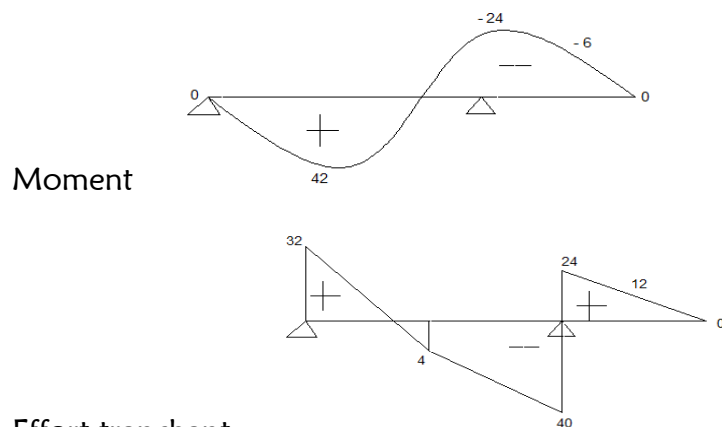
$$T = -dM/dx = 12X$$

Si $x = 0$; $M = 0$; $T = 0$

Si $x = 1 \text{ m}$; $M = -6$; $T = 12$

Si $x = 2 \text{ m}$; $M = -24$; $T = 24$

DIAGRAMME



$$M_{max} = 42 \text{ KNm} = 4.200.000 \text{ Ncm} \text{ et } T_{max} = 40 \text{ KN} = 40.000 \text{ N}$$

CONTRAİNTE NORMALE

$$\text{Condition : } \sigma_c \leq \sigma_{adm} \Rightarrow \frac{MY}{I} \leq 150 \Rightarrow \frac{4200000}{\frac{B H^3}{12}} * \frac{H}{2} \leq 150 \Rightarrow \frac{252000}{B H^2} \leq 150$$

$$\text{On sait que } B = H/2 \text{ donc on aura : } \frac{252000}{\frac{H}{2} H^2} \leq 150 \Rightarrow \frac{50400000}{H^3} \leq 150$$

$$\Rightarrow H^3 \geq \frac{50400000}{150} = 336000 \Rightarrow H \geq \sqrt[3]{336000} = 69,52 \text{ cm}$$

Nous adoptons : $H = 75 \text{ cm}$ et $B = H/2 = 37,5 \text{ cm}$

Contrainte tangentielle

$$\text{Condition : } \tau \leq \tau_{adm} \Rightarrow \frac{3T}{2S} \leq 60 \Rightarrow \frac{3 * 40000}{2 B H} \leq 60 \Rightarrow \frac{120000}{2 * 75 * 37,5} \leq 60$$

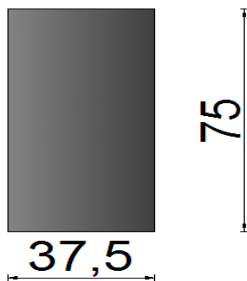
$21,33 \text{ N/cm}^2 < 60 \text{ N/cm}^2$; d'où la condition à vérifier.

VERIFICATION

$$\sigma_c \leq \sigma_{adm} \Rightarrow \frac{252000}{B H^2} \leq 150 \Rightarrow \frac{252000}{37,5 * 75^2} \leq 150 \Rightarrow 1,194 \frac{N}{\text{cm}^2} < 150 \frac{N}{\text{cm}^2}$$

Donc les conditions ont vérifié.

$B = 37,5 \text{ cm}$ et $H = 75 \text{ cm}$



NB : si la condition $\tau \leq \tau_{adm}$ n'avait été pas vérifiée, on aurait pu redimensionner par rapport à τ_{adm} pour tirer les nouvelles dimensions et si la vérification $\sigma_c \leq \sigma_{adm}$ ne vérifie pas, on redimensionne pour adopter des valeurs plus supérieur.

CHAPITRE 6. CISAILLEMENT

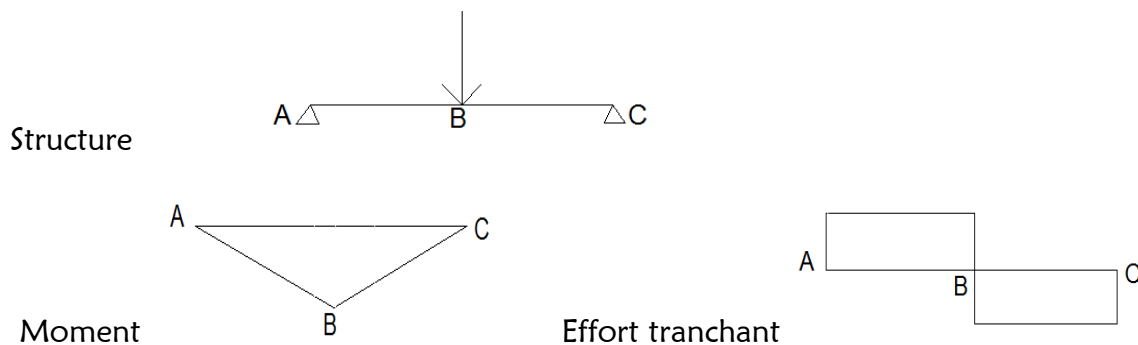
6.1 DEFINITION

- Une force agissante le long d'un plan passant en travers d'un corps est appelée force de cisaillement ou effort tranchant. Elle notée F_T
- C'ad nous allons considérer que la contrainte tangentielle due à l'effort tranchant

$$M = 0 \text{ et } T \neq 0$$

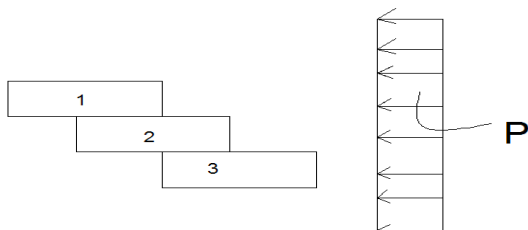
- L'étude du cisaillement ressemble à celle de l'effort tranchant

Exemple :



Le point A et B sont sollicité qu'au cisaillement ($M_A \text{ et } M_B = 0 \text{ et } T_A = T_B = 0$)

Exemple : considérons trois pièces assemblées par colle, sous une charge donnée la pièce se déforme

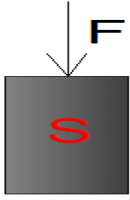


6.2 CONTRAINTE DE CISAILLEMENT

DEFINITION : la force de cisaillement divisée par la surface sur laquelle elle agit et appelée contrainte de cisaillement ou contrainte tranchante.

$$\tau = \frac{T}{S}; \tau : \text{contrainte de cisaillement}; T : \text{effort tranchant} \left(T = \frac{F}{2} \right);$$

S : surface cisailé et F : la force agissante sur la surface cisailée



6.3 CONTRAINTE DE RESISTANCE AU CISAILLEMENT

Généralement : $\sigma_c \leq \sigma_{adm}$

La contrainte tangentielle τ dans la section cisillée doit toujours être inférieure à la contrainte de cisaillement admissible τ_{adm} du matériau

$$\tau \leq \tau_{adm} \Rightarrow \frac{T}{S} \leq R_{pg} \Rightarrow \frac{T}{S} \leq \frac{R_{eg}}{n}$$

τ_{adm} : C'est fonction de la contrainte normale admissible qui est une caractéristique du matériau

Avec R_{pg} : *resistance pratique au glissement ou au cisaillement*

R_{eg} : limite élastique au cisaillement ; S : surface cisillée

n : coefficient de sécurité

R_{pg} et R_{eg} sont des valeurs à avoir dans les abaques, labo ou notice du constructeur.

Nous avons 3 possibilités :

1. généralement : $\tau_c \leq \tau_{adm}$
2. pour les métaux : $\tau_c \leq \frac{\tau_{adm}}{1 + \nu}$; avec ν : coefficient de poisson

$\nu \in (0,25 \text{ à } 0,42)$

3. pour les assemblages (boulons, rivets, ...) : $\tau_c \leq 0,6 \tau_{adm}$

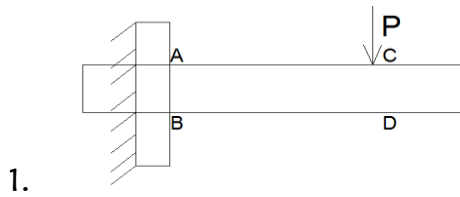
Cette expression : $\tau = T/A$ donne la contrainte de cisaillement moyenne de cisaillement dans la surface

Pour les sections rectangulaires : $\tau_{max} = \frac{3}{2} \tau$

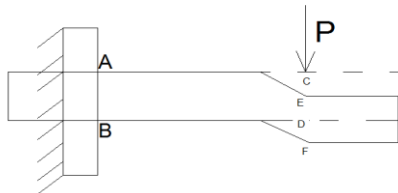
Pour les sections circulaires : $\tau_{max} = \frac{4}{3} \tau$

Pour les sections en I : $\tau_{max} = \frac{T}{\text{section ame seule}}$

Considérons un cas :



Après application de la charge, la structure devient



Pour calculer la déviation :

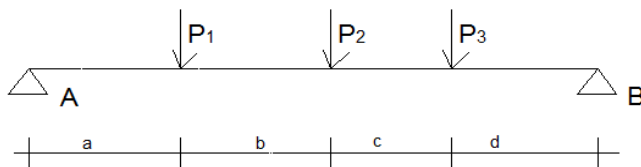
$$\delta = \frac{1}{G} * \frac{P}{S} \text{ or } \tau = \frac{P}{S} \Rightarrow \delta = \frac{\tau}{G}$$

Avec G : module d'élasticité transversale ; $G = 0,4 E$ (pour les métaux)

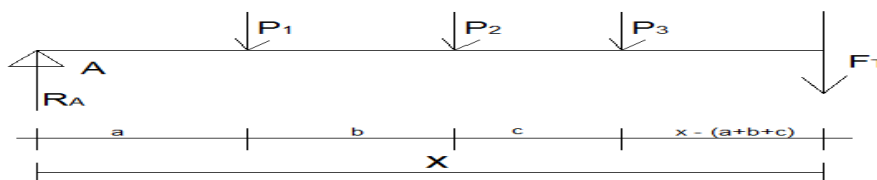
E : module d'élasticité longitudinale

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} ; \delta : \text{déviation en radian}$$

2. Supposons plusieurs forces concentrées agissent sur une poutre



Faisons la coupe à une section Σ afin de lire le cisaillement résistant (F_T)

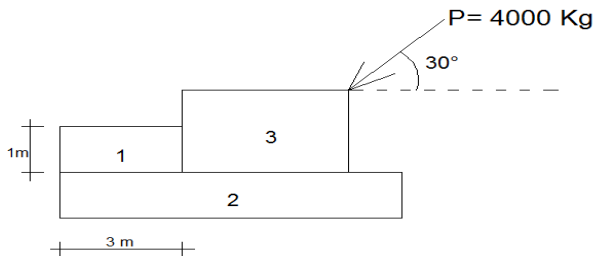


$$\Sigma y = 0 \Rightarrow R_A - P_1 - P_2 - P_3 - F_T = 0 \Rightarrow F_T = R_A - P_1 - P_2 - P_3$$

F_T : Cisaillement résistant dans la section Σ

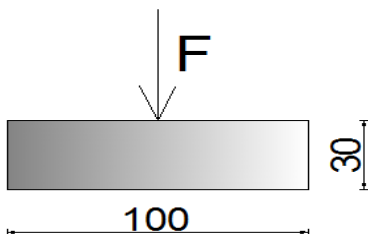
EXERCICES

1. Considérons le joint de deux plaques circulaires, la force P qui s'y exerce vaut 30000 N et la plaque à un diamètre de 12 cm. Calculer la valeur moyenne de la contrainte de cisaillement dans l'un et l'autre de deux plaques
- 2.



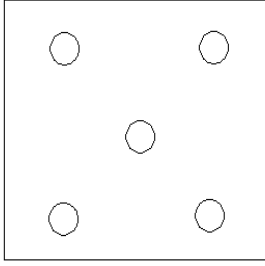
La force P tend à cisailier la plaque, calculer la contrainte moyenne de cisaillement sur cette plaque

3. Un acier de construction a bas carbone a une résistance maximale au cisaillement de 310 kg/cm^2 approximativement. Calculer la force nécessaire pour poinçonner un trou de 2,5 cm de diamètre dans une plaque de cet acier d'épaisseur 1 cm. Si le module d'élasticité en cisaillement de ce matériau est de $8,4 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$, calculer la déformation de cisaillement au bord de ce trou lorsque la contrainte de cisaillement est de 1500 kg/cm^2
- 4.



Si la contrainte admissible au cisaillement est de 900 KPa, déterminer la charge F maximale supportable par le bloc

5. voir la figure suivante, une plaque carré à 5 trous pour l'assemblage proposé ajuster en acier, de diamètre $d = 20 \text{ mm}$, la contrainte admissible au cisaillement des boulons $R_{pg} = 35 \text{ N/mm}^2$. Déterminer F admissible



RESOLUTION

$$1. \tau = \frac{F}{A} \text{ avec } F = P/2 \text{ et } A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 * D^2}{4} \Rightarrow \tau = \frac{P}{2} * \frac{4}{\pi D^2} = \frac{2P}{3,14 D^2}$$

$$\tau = \frac{2 * 30000}{3,14 * 12^2} = 132,696 \frac{N}{cm^2}$$

2. Ici pour qu'il y ait cisaillement seule la décomposition horizontale peut le faire

$$P_H = P \cos 30 = 400 * \cos 30 = 346,41 \text{ Kg}$$

$$\tau = \frac{P_H}{A} = \frac{P_H}{3 * 1} = \frac{346,41}{3 * 1} = 115,47 \text{ kg/m}^2$$

$$3. \tau = \frac{P}{A} \Rightarrow P = \tau * A = 3100 * \pi * D * e = 3100 * 3,14 * 2,5 * 1 = 24335 \text{ N}$$

$$4. \tau \leq \tau_{adm} \Rightarrow \frac{T}{S} \leq \tau_{adm} \text{ or } T = \frac{F}{2} \Rightarrow \frac{F}{2} \leq \tau_{adm} \Rightarrow \frac{F}{2} \leq \tau_{adm}$$

$$\Rightarrow \frac{F}{2} \leq \tau_{adm} \Rightarrow F \leq 2 * 30 * 100 * 0,9 \Rightarrow F \leq 5400 \text{ N}$$

Nous adoptons : $F = 5.000 \text{ N}$

5. Supposons que les 5 trous sont chargés de la même façon, donc chacun supportera une charge $T/5$

$$T = F/2 \text{ or } \tau = \frac{T}{S} \Rightarrow T = \tau * S = 35 * \frac{\pi D^2}{4} = 35 * \frac{3,14 * 20^2}{4} = 10990 \text{ N}$$

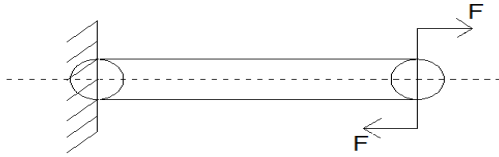
$$\text{Pour chaque trou : } T/5 = 10990 / 5 = 2198 \text{ N}$$

$$\text{Alors : } F = 2 T = 2 * 2198 = 4396 \text{ N}$$

CHAPITRE 7. TORSION

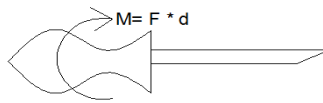
7.1 DEFINITION

Considérons un barreau encastré à une extrémité



Si sur toutes les forces interne seul le M_x est présent, il provoque une **TORSION**

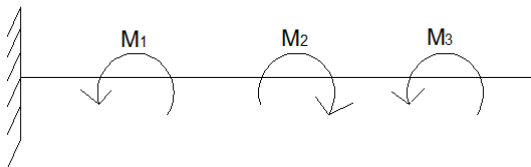
$$M_x = F * d$$



Exemple d'une tige de tournevis :

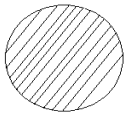
NB :

- L'analyse des structures de génie civil soumis à la torsion est moins fréquente, car cela n'est pris en compte que lors de l'analyse des structures en 3 dimensions
- Il peut arriver qu'un certain nombre des couples agissent le long d'un arbre, donc il est commode d'introduire une nouvelle grandeur, le moment de torsion



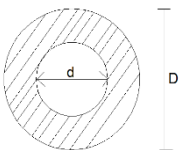
7.2 MOMENT D'INERTIE POLAIRE

- Pour un barreau cylindrique plein



$$I = \frac{\pi D^4}{32}$$

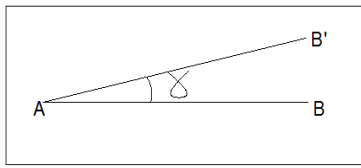
- Pour un barreau cylindrique creux



$$I = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$$

- Si $D \cong d$ alors $I = \frac{\pi(D^2 + d^2)(D^2 - d^2)}{32}$

7.3 DEFORMATION DE CISAILLEMENT



Initialement sans charge on a AB et après application du moment de torsion (M_x ou T ou M_T) il y a déplacement de AB'.

L'angle γ exprimé en radian entre la position finale (AB') et la position initiale (AB) de la génératrice est défini comme la déformation de cisaillement de la surface du barreau.

NB : c'est angle de déformation γ est appelé : **DISTORSION**

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{M}{G \cdot I} \Rightarrow d\gamma = \frac{M}{G \cdot I} dx \Rightarrow \int d\gamma = \int \frac{M}{G \cdot I} dx$$

- $\gamma = \int_0^L \frac{M}{G \cdot I} dx$: si la section et le moment sont variable
- $\gamma = \frac{M \cdot L}{G \cdot I}$: si la section et le moment sont constants

Avec G : module d'élasticité longitudinal transversal

- $G = 0,4 E$ pour les métaux
- $G = 79300 \text{ N/mm}^2$ pour les aciers au carbone
- $G = 73100 \text{ N/mm}^2$ acier inox
- $G = 48300 \text{ N/mm}^2$ nickel
- $G = 44700 \text{ N/mm}^2$ cuivre
- $G = 41400 \text{ N/mm}^2$ fontes
- $G = 40100 \text{ N/mm}^2$ bronze et laitons
- $G = 36000 \text{ N/mm}^2$ titane
- $G = 26200 \text{ N/mm}^2$ aluminium et alliage
- $G = 18200 \text{ N/mm}^2$ verre
- $G = 16500 \text{ N/mm}^2$ magnésium
- $G = 13100 \text{ N/mm}^2$ plomb
- $G = 9650 \text{ N/mm}^2$ béton
- $G = 4,1$ à $7,6 \text{ N/mm}^2$ caoutchouc

$\theta = \frac{\gamma}{L}$: angle unitaire de torsion (si la section et le moment de torsion restent constantes)

NB : dans le cas de la torsion, tous les autres efforts intérieurs sont nuls :

$$N = T = M_f = 0$$

7.4 CONTRAINTE DE CISAILLEMENT EN TORSION (τ)

Elle peut aussi s'appeler contrainte tangentielle de torsion

La contrainte de torsion τ est donnée par :

$$\tau = \frac{M_x R}{I} = G \theta R = G \gamma \quad \text{avec } G \gamma : \text{la loi de Hooke au cisaillement}$$

NB : $\sigma = 0$ (les contraintes normales sont négligeables)

$$W = \frac{I}{R} : \text{module de torsion}$$

τ : contrainte (N/mm² ou MPA)

θ : Angle unitaire de torsion (rad/mm)

R : rayon (mm)

G : module d'élasticité transversale

NB :

- Tous les points situés sur un même cercle du centre G et de rayon R ont une même contrainte
- Il faut insister sur le fait qu'aucun point du barreau ne doit être contraint au-delà de la limite de proportionnalité : $\tau_{max} \leq \tau_{adm}$ et $\gamma_{max} \leq \gamma_{adm}$
- Relation entre M_T et θ : $M_T = G \theta I \Rightarrow \theta = \frac{M_T}{G I}$
- Relation entre τ et M_T :

$$\text{On sait que } \tau = G \theta R \text{ et } M_T = G \theta I \Rightarrow G \theta = \frac{\tau}{R} = \frac{M_T}{I}$$

$$\text{On obtient : } \tau = \frac{M_T}{I} R$$

- Calcul de résistance à la torsion ou calcul des constructions

$$\tau_{max} = \frac{M_T}{I} R \leq \tau_{adm} = R_{pg} = \frac{R_{eg}}{n}$$

Avec : R_{eg} : limite élastique au cisaillement du matériau

n : coefficient de sécurité

$$R_{eg} = \frac{R_e}{2} \text{ Pour les métaux}$$

$$W = \frac{\pi D^3}{16} \text{ pour le cylindre plein}$$

$$W = \frac{\pi (D^3 - d^3)}{16} \text{ pour le cylindre creux}$$

Avec : $G I$: la rigidité de la torsion

EXERCICES

- Quelle est la contrainte de cisaillement max produite dans un arbre de 45 mm de diamètre par un moment de torsion de 10 000 kgcm ? quel est l'angle de torsion pour une longueur de l'arbre de 1,20 m ? Le matériau est l'acier pour lequel

$$G = 8,4 * 10^5 \frac{kg}{cm^2}$$
- Considérons un tournevis dont $G = 80 \text{ GPa}$; $\theta = 73^\circ/m$ et $d = 7 \text{ mm}$. Déterminer la contrainte de cisaillement maximale dans la tige
- Un barreau qui impose une contrainte admissible au cisaillement de 400 MPA, déterminons le diamètre d si $M = 350 \text{ Nm}$
- Soit deux arbres de transmission construit à partir du même acier, $G = 8000 \text{ daN/mm}^2$. Le premier est plein (diamètre d_1), le second est creux (diamètre extérieur D , diamètre intérieur $d = 0,8 D$). Le couple à transmettre est de 200 Nm ; la résistance pratique au cisaillement adoptée pour les deux cas est de 10 daN/mm². Déterminons les dimensions optimales de deux arbres et comparons les poids respectifs de deux constructions

RESOLUTION

Exemple 1.

- $$\tau = \frac{T R}{I} \text{ avec } I = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3,14 * 4,5^4}{32} = 40,2 \text{ cm}^4$$

$$\text{et } R = \frac{D}{2} = \frac{45}{2} = 22,5 \text{ mm} = 2,25 \text{ cm}$$

$$\tau = \frac{10000 * 2,25}{40,2} = 560 \text{ kg/cm}^2$$
- $$\gamma = \frac{T L}{G I} = \frac{10000 * 120}{8,4 * 10^5 * 40,2} = 0,0355 \text{ radians}$$

Exemple 2.

$$R = d/2 = 7/2 = 3,5 \text{ mm} ; G = 80 \text{ GPa} = 80.000 \text{ N/mm}^2$$

$$\theta = 73^\circ = \frac{73 \pi}{180} = 1,27 \frac{\text{rad}}{\text{m}} = \frac{1,27}{1000} = 0,00127 \frac{\text{rad}}{\text{mm}}$$

$$\tau = G \theta R = 80.000 * 0,00127 * 3,2 = 356 \text{ N/mm}^2$$

Exemple 3.

$$\tau = \frac{M}{I} \leq R_{Pg} \Rightarrow \frac{M}{\frac{\pi D^3}{32} \frac{D}{2}} \leq R_{Pg} \Rightarrow \frac{M}{\frac{\pi D^3}{16}} \leq R_{Pg} \Rightarrow \frac{16 M}{\pi D^3} \leq R_{Pg}$$

$$\Rightarrow D^3 \geq \frac{16 M}{\pi R_{Pg}} \Rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{16 M}{\pi R_{Pg}}} = \sqrt[3]{\frac{16 * 350}{3,14 * 400}} = 1,645 \text{ mm}^2 \Rightarrow D = 2,5 \text{ mm}$$

Exemple 4.

- Arbre plein

$$\tau_{max} \leq \tau_{adm} \Rightarrow \frac{M}{I} \leq \tau_{adm} \Rightarrow \frac{M}{\frac{\pi D^3}{32} \frac{D}{2}} \leq \tau_{adm} \Rightarrow \frac{16 M}{\pi D^3} \leq \tau_{adm} \Rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{16 M}{\pi \tau_{adm}}}$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 * 200000}{3,14 * 100}} = 21,68 \text{ mm} \Rightarrow D_1 = 25 \text{ mm}$$

$$S_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{3,14 * 25^2}{4} = 490,625 \text{ mm}^2$$

- Arbre creux

$$\tau_{max} \leq \tau_{adm} \Rightarrow \frac{M}{I} \leq \tau_{adm}$$

$$\text{Or } \frac{M}{I} = \frac{M}{\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \frac{D}{2}} = \frac{M}{\frac{\pi}{32} (D^4 - (0,8 D)^4) \frac{D}{2}} = \frac{16 M}{0,5 \pi D^3}; \text{ on aura}$$

$$\frac{16 M}{0,5 \pi D^3} \leq \tau_{adm} \Rightarrow D^3 \geq \frac{16 M}{0,5 \pi \tau_{adm}} \Rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{16 M}{0,5 \pi \tau_{adm}}} = \sqrt[3]{\frac{16 * 200000}{0,5 * 3,14 * 100}}$$

$D \geq 27,3 \text{ mm}$; nous adoptons $D = 30 \text{ mm}$ et $d = 0,8 D = 24 \text{ mm}$

$$S_2 = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{3,14}{4} (30^2 - 24^2) = 254,34 \text{ mm}^2$$

- Le rapport des poids : r

$$r = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\varphi_2 V_2}{\varphi_1 V_1} = \frac{\varphi_2 V_2 L_2}{\varphi_1 V_1 L_1} \text{ comme ce sont deux aciers identique cad}$$

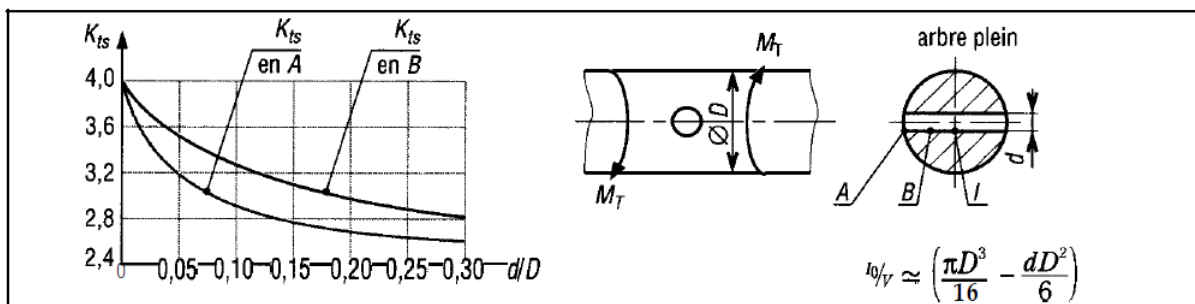
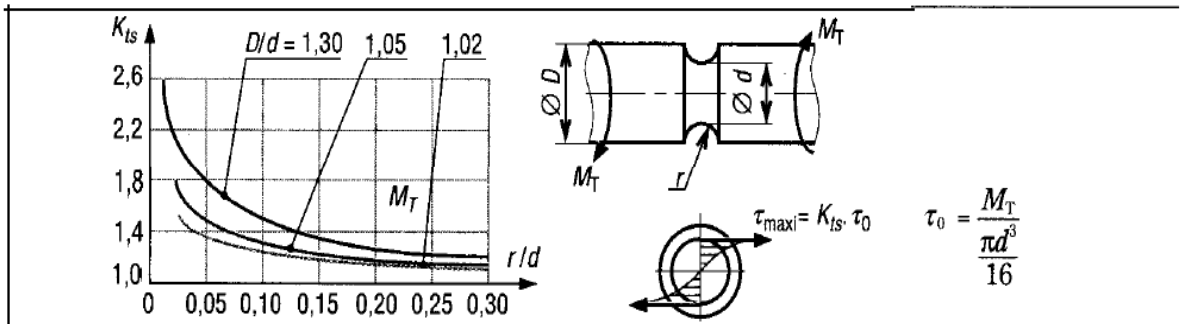
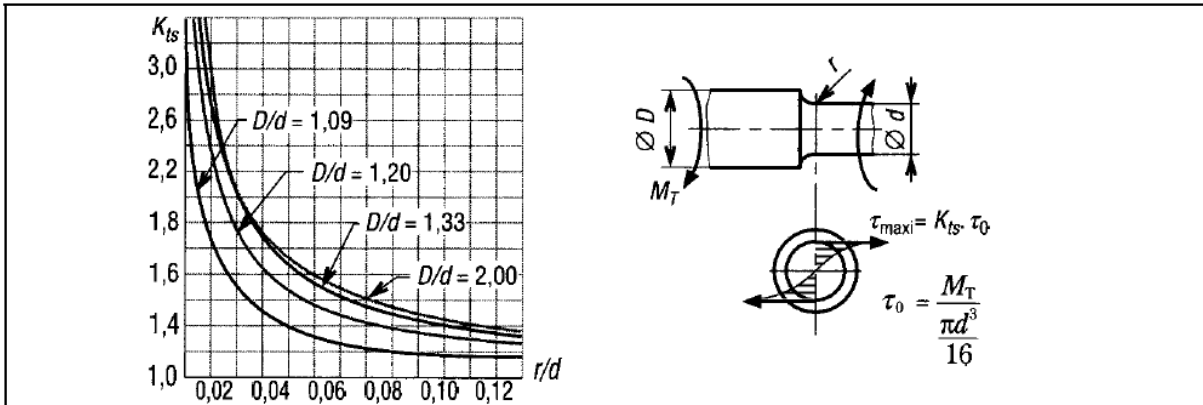
$$L_1 = L_2 \text{ et } \varphi_1 = \varphi_2; \text{ donc } r = \frac{S_2}{S_1} = \frac{254,34}{490,625} = 0,5184 \approx 0,52$$

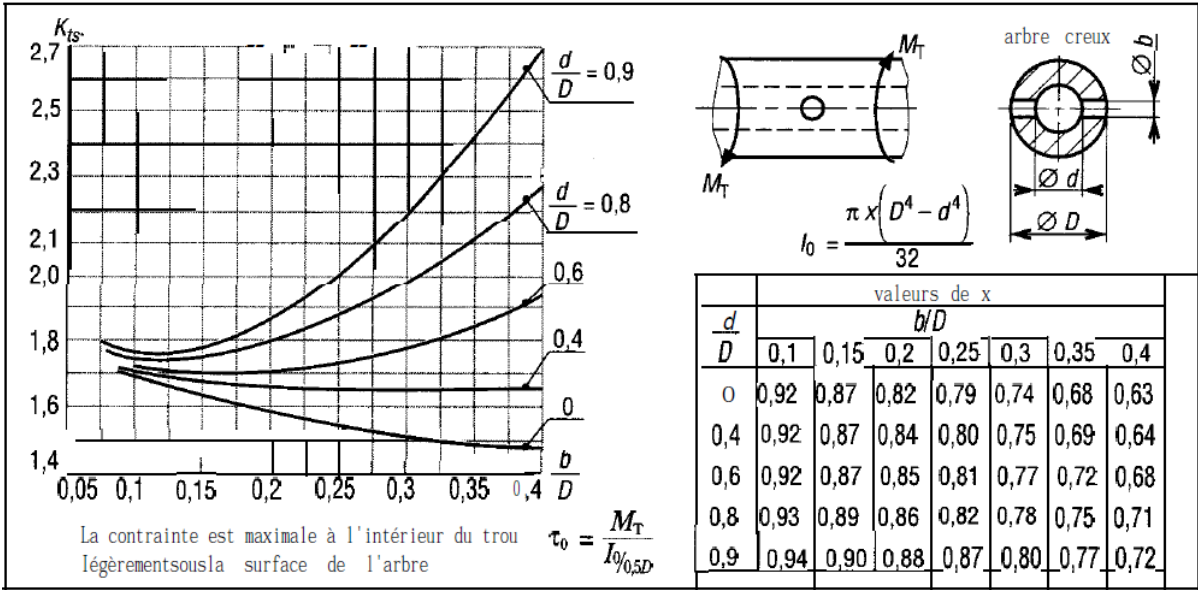
CAS DES SECTIONS VARIABLES

Lorsque les arbres, les barreaux ou les pièces étudiés en torsion présentent de brusques variations des sections (gorge, épaulement, trou de perçage, ...), les formules précédentes ne sont plus applicables au voisinage du changement des sections.

$\tau_{max} = \tau K_{ts}$ donc K_{ts} : coefficient de concentration de contrainte (cfr abaque)

$$\tau = \frac{M R}{I}$$





Remarques : le rapport r dépend des valeurs de d et D de l'arbre creux,

soit $d = k \cdot D$ ($0 < k < 1$) alors

$$r = \frac{(1 - k^2)^{1/3}}{(1 + k^2)^{2/3}}$$

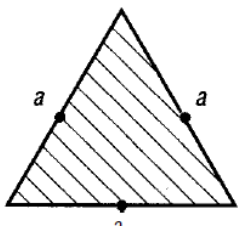
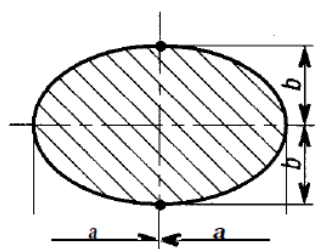
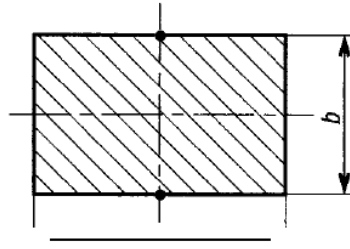
k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
r	0,99	0,96	0,92	0,86	0,78	0,70	0,61	0,51	0,39

Notons qu'à partir de $k = 0,8$, le gain de poids est de 50 %.

1. Formulaire

Lorsque les arbres ne sont plus circulaires, les formules précédentes ne sont plus applicables et il faut utiliser les relations décrites dans ce paragraphe.

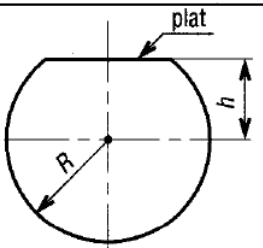
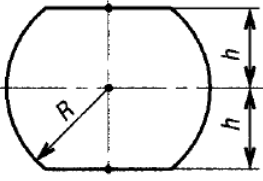
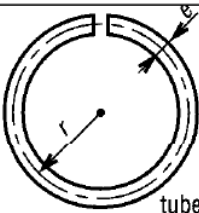
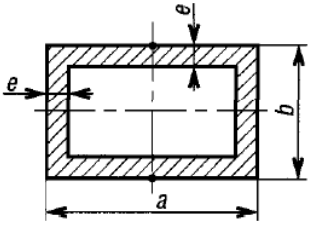
Forme	Section	τ_{\max}	$\theta = \alpha/L$	Observations
Carré		$\frac{4,81 M_T}{a^3}$	$\frac{7,10 M_T}{G a^4}$	contraintes maxi au milieu des côtés

Triangle équilatéral de côté a		$\frac{20 M_T}{a^3}$	$46 \frac{M_T}{G a^4}$	contraintes maxi au milieu des côtés
Ellipse		$\frac{M_T}{\pi a b^2}$	$\frac{(a^2 + b^2) M_T}{\pi a^3 b^3 G}$	contraintes maxi à la périphérie sur le petit axe
Rectangle		$\frac{M_T}{k_1 a d}$	$\frac{M_T}{k_2 a b^3 G}$	contraintes maxi au milieu des deux grands côtés. k_1 et k_2 sont donnés dans le tableau ci-dessous

$\frac{a}{b}$	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	10,0	∞
k_1	0,208	0,219	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,312	0,333
k_2	0,1406	0,1661	0,1958	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,312	0,33

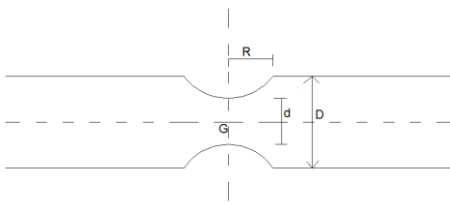
Remarques : des valeurs intermédiaires peuvent être obtenues par interpolation linéaire :

$$\text{Si } \frac{a}{b} \geq 5 : k_1 = k_2 = 0,333 \left(1 - 0,63 \frac{b}{a} \right)$$

Forme section	τ_{maxi}	$\theta = \alpha/L$	Observations .																					
	$\frac{M_T}{k_3 R^3}$	$\frac{M_T}{k_4 R^4 G}$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">$\frac{h}{R}$</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0,4</td> <td style="text-align: center;">0,6</td> <td style="text-align: center;">0,8</td> <td style="text-align: center;">1,0</td> <td style="text-align: center;">1,2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">k_3</td> <td style="text-align: center;">0,35</td> <td style="text-align: center;">0,51</td> <td style="text-align: center;">0,70</td> <td style="text-align: center;">0,92</td> <td style="text-align: center;">1,18</td> <td style="text-align: center;">1,57</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">k_4</td> <td style="text-align: center;">0,30</td> <td style="text-align: center;">0,51</td> <td style="text-align: center;">0,78</td> <td style="text-align: center;">1,06</td> <td style="text-align: center;">1,37</td> <td style="text-align: center;">1,57</td> </tr> </table>	$\frac{h}{R}$	0	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	k_3	0,35	0,51	0,70	0,92	1,18	1,57	k_4	0,30	0,51	0,78	1,06	1,37	1,57
$\frac{h}{R}$	0	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2																		
k_3	0,35	0,51	0,70	0,92	1,18	1,57																		
k_4	0,30	0,51	0,78	1,06	1,37	1,57																		
	$\frac{M_T}{k_5 R^3}$	$\frac{M_T}{k_6 R^4 G}$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">$\frac{h}{R}$</td> <td style="text-align: center;">0,5</td> <td style="text-align: center;">0,6</td> <td style="text-align: center;">0,7</td> <td style="text-align: center;">0,8</td> <td style="text-align: center;">0,9</td> <td style="text-align: center;">1,0</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">k_5</td> <td style="text-align: center;">0,47</td> <td style="text-align: center;">0,60</td> <td style="text-align: center;">0,81</td> <td style="text-align: center;">1,02</td> <td style="text-align: center;">1,25</td> <td style="text-align: center;">1,57</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">k_6</td> <td style="text-align: center;">0,4</td> <td style="text-align: center;">0,67</td> <td style="text-align: center;">0,93</td> <td style="text-align: center;">1,19</td> <td style="text-align: center;">1,39</td> <td style="text-align: center;">1,57</td> </tr> </table>	$\frac{h}{R}$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	k_5	0,47	0,60	0,81	1,02	1,25	1,57	k_6	0,4	0,67	0,93	1,19	1,39	1,57
$\frac{h}{R}$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0																		
k_5	0,47	0,60	0,81	1,02	1,25	1,57																		
k_6	0,4	0,67	0,93	1,19	1,39	1,57																		
 <p style="text-align: center;">tube fendu</p>	$\approx \frac{3 M_T}{2 \pi r e^2}$	$\approx \frac{3 M_T}{2 \pi r e^3 G}$	<p>e doit être petit r = rayon moyen</p> <p>formules établies à partir des résultats du paragraphe 2</p>																					
	$\frac{M_T}{2 e (a - e) (b - e)}$	$\frac{M_T (a + b - 2 e)}{2 e G (a - e)^2 (b - e)^2}$	<p>e doit être petit</p> <p>formules établies à partir de la méthode de la membrane (paragraphe 3)</p>																					

EXERCICES

Déterminons la contrainte au fond d'une gorge d'un arbre de transmission soumis à un couple de torsion de 400 Nm



$R = 3 ; D = 36 ; d = 30 ; M = 400 \text{ Nm} = 400.000 \text{ Nmm}$

RESOLUTIONS

$R/d = 3/30 = 0,1$ et $d/D = 36/30 = 1,2$

Cfr abaque $K_{st} = 1,4$

$$\tau_0 = \frac{M R}{I} = \frac{400000}{\frac{\pi d^3}{16}} = 75,49 \frac{N}{mm^2}$$

$$\tau_{max} = \tau_0 * K_{St} = 75,49 * 1,4 = 105,69 N/mm^2$$

CAS DES POUTRES NON CIRCULAIRES SOLLICITES EN TORSION

Il se peut que des valeurs cherchées ne se trouvent pas dans les tableaux donnés, on peut interpoler pour l'avoir

Par exemple :

$$a \longrightarrow b$$

$$c \longrightarrow X \Rightarrow X = b + \frac{(e-b)(c-d)}{d-a}$$

$$d \longrightarrow e$$

C'est-à-dire connaissant a avec sa valeur b et d avec sa valeur e on peut déduire la valeur x de c.

EXERCICES

Exemple 1.

Une poutre de section carrée (a = b = 30 mm) sollicitée en torsions ayant

$$\tau_{adm} = 40 \text{ MPA} = 40 \frac{N}{mm^2}, \text{ déterminons le couple maximal transmissible}$$

Exemple 2.

Une poutre de section rectangulaire, a = 60 mm et b = 25 mm, avec

$$\tau_{adm} = 40 \text{ MPA} = 40 \frac{N}{mm^2}, \text{ déterminons le moment maximal transmissible}$$

RESOLUTIONS

Exemple 1.

$$\tau_{max} \leq \tau_{adm} \Rightarrow \frac{4,81 M}{a^3} \leq 40 \Rightarrow M \leq \frac{40 * 30^3}{4,81} = 224532,2245 \text{ Nmm}$$

Nous adoptons : M = 200 000 Nmm = 200 Nm

Exemple 2.

$$\frac{a}{b} = \frac{60}{25} = 2,4$$

Pour avoir K_1 et K_2 on interpole

On sait que

$$2 \longrightarrow 0,246$$

$$2,4 \longrightarrow K_1 \Rightarrow K_1 = 0,246 + \frac{(0,258 - 0,246)(2,4 - 2)}{2,5 - 2} = 0,256$$

$$2,5 \longrightarrow 0,258 \text{ et aussi}$$

$$2 \longrightarrow 0,229$$

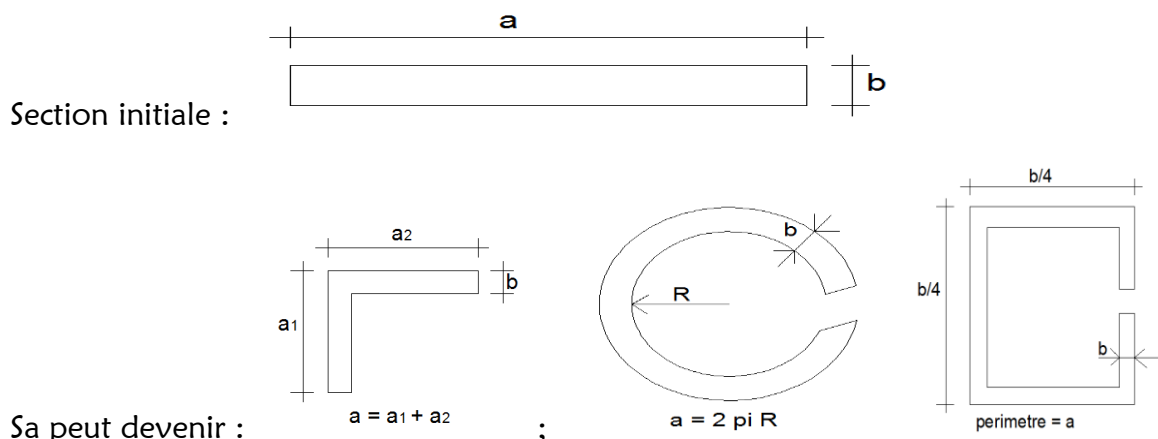
$$2,4 \longrightarrow K_2 \Rightarrow K_2 = 0,229 + \frac{(0,249 - 0,229)(2,4 - 2)}{2,5 - 2} = 0,245$$

$$2,5 \longrightarrow 0,249.$$

$$\tau_{max} = \frac{M}{K_1 a b^2} \leq 40 \Rightarrow M \leq 40 K_1 a b^2 = 40 * 0,256 * 60 * 25^2 = 348 \text{ Nm}$$

Nous adoptons : $M = 320 \text{ Nm}$

CAS DES SECTIONS OUVERTE ET D'ÉPAISSEUR CONSTANTE



Les sections s'obtiennent par pliage ou roulage à partir d'une barre parallélépipédique. Tous les cas se ramènent à l'étude d'une barre de section rectangulaire d'épaisseur b constante et de largeur a élevée.

$$\tau_{max} = \frac{M}{K_1 a b^2} \text{ et } \theta = \frac{M_T}{K_2 a b^3 G}$$

EXERCICE

Soit une poutre de section, calculer le cas en L, $b = 10 \text{ mm}$ et $a_1 = 150 \text{ mm}$,

$$a_2 = 150 \text{ mm}, \tau_{adm} = 50 \text{ MPA} = 50 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ et } G = 70.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

REPONSE

Section en L

$$a = a_1 + a_2 = 300 \text{ mm} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{300}{10} = 30 > 5$$

$$K_1 = K_2 = 0,333 \left(1 - 0,63 * \frac{10}{300} \right) = 0,3326$$

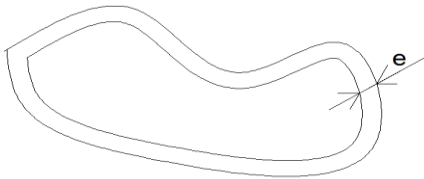
$$\tau_{max} = \frac{M}{K_1 a b^2} \leq \tau_{adm} \Rightarrow M \leq K_1 * a * b^2 * \tau_{adm} = 0,326 * 300 * 10^2 * 50$$

$$M \leq 489000 \text{ Nmm} = 489 \text{ Nm} ; \text{ nous adoptons } M = 450 \text{ Nm}$$

$$\theta = \frac{M}{K_2 a b^3 G} = \frac{450000}{0,326 * 300 * 10^3 * 70000} = 65,7 * 10^{-6} \text{ rad/mm}$$

CAS DES TUBES FERMES A PAROI MINCE

Il est clair raisonnable d'admettre que dans un tube à paroi mince la contrainte de cisaillement est constante dans l'épaisseur et qu'elle est tangente à la ligne médiane entre les surfaces intérieures et extérieures. Les contraintes de cisaillement dans un tel tube on l'aspect représenté dans ce croquis



Pour un tube à paroi mince d'épaisseur constante ou variable le moment de torsion correspondant à un flux de cisaillement donne τ est :

$$M = 2 A \tau \Rightarrow \tau = \frac{M}{2 A} \text{ avec } A = S * e$$

$$\theta = \frac{M}{4 S^2 G} \int \frac{dm}{e}$$

S : surface enclose par la ligne médiane du tube

θ : Angle de torsion par unité de longueur

m : la coordonnée traversant la périphérie du tube

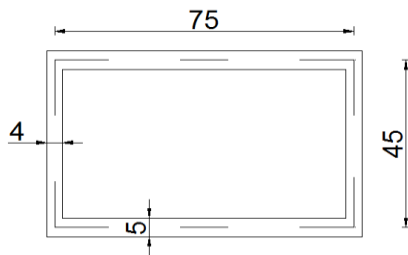
e : épaisseur

EXERCICES

Exemple 1.

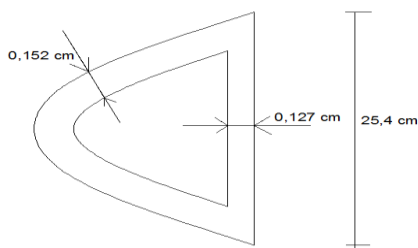
Calculer l'angle de torsion par unité de longueur ainsi que les contraintes aux points indiqués du tube à paroi mince de section rectangulaire ci-dessous si

$$M = 100 \text{ Nm et } G = 40 \text{ GPA}$$



Exemple 2.

Considérons la section à paroi mince du croquis ci – dessous, qui est au bord d'attaque d'une aile d'avion. La portion courbe a pour longueur 81 cm et la surface enclose est de 645 cm^2 . Le matériau est un alliage d'aluminium 2024 T-4 pour lequel la contrainte de cisaillement admissible est de 700 Kg/cm^2 et $G = 2,8 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Calculer le moment de torsion admissible et aussi l'angle de torsion par unité de longueur correspondant au moment de torsion.



RESOLUTIONS

Exemple 1.

$$M = 100 \text{ Nm} = 100.000 \text{ Nmm} ; G = 40.000 \text{ N/mm}^2 ; e_b = 5 \text{ mm}$$

$$\text{et } e_h = 4 \text{ mm} ; S = 76 * 45 = 3420 \text{ mm}^2$$

$$A_1 = e_b * S = 5 * 3420 = 17100 \text{ mm}^3$$

$$A_2 = e_h * S = 4 * 3420 = 13680 \text{ mm}^3$$

$$\bullet \tau_A = \frac{M}{2 A_1} = \frac{100.000}{2 * 17100} = 2,92 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

- $\tau_B = \frac{M}{2 A_2} = \frac{100.000}{2 * 13680} = 3,65 \frac{N}{mm^2}$
- $\theta = \frac{M}{2 S^2 G} \left(\frac{2b}{e_b} + \frac{2h}{e_h} \right) = \frac{100.000}{2 * 3420^2 * 40000} \left(\frac{2 * 76}{5} + \frac{4 * 45}{4} \right)$
 $\theta = 2,86 * 10^6 \text{rad/mm}$

Exemple 2.

$h = 25,4 \text{ cm} ; e_1 = 0,152 \text{ cm} ; e_2 = 0,127 \text{ cm} ; L = 81 \text{ cm} ;$

$S = 645 \text{ cm}^2 ; \tau_{adm} = 700 \frac{kg}{cm^2} = 7000 \text{ N/cm}^2 ;$

$G = 2,8 * 10^5 \frac{kg}{cm^2} = 28 * 10^5 \text{ N/cm}^2$

- $M = 2 A \tau$ or $A = e * S \Rightarrow M = 2 e_2 S \tau = 2 * 0,127 * 645 * 700$

$M = 114.681 \text{ Kg cm}$

- $\theta = \frac{M}{4 S^2 G} \left(\frac{L}{e_1} + \frac{h}{e_2} \right) = \frac{114681}{4 * 645^2 * 28 * 10^5} \left(\frac{81}{0,152} + \frac{25,4}{0,127} \right)$
 $\theta = 180,38 * 10^{-7} \text{ rad/cm}$

CHAPITRE 8. FLAMBEMENT

8.1 DEFINITION

- Le flambage ou flambement est un phénomène d'instabilité d'une structure ou d'un élément d'une structure, qui, soumis à une force de compression, a tendance à fléchir et à se déformer dans une direction perpendiculaire à la force de compression

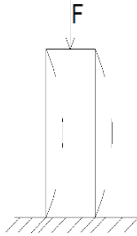


Schéma :

Cet phénomène se passe plus pour les pièces longues soumises à un effort de compression.

- Flambement : Déformation importante d'un matériau sous l'effet d'une compression longitudinale

8.2 CHARGE CRITIQUE D'EULER : F_{CR} ou P_{CR}

D'une manière simple, la charge critique d'Euler c'est la charge à ne pas dépasser pour éviter le flambement : $F \leq F_{CR}$

F_{CR} dépend aux conditions aux appuis d'une pièce à ses extrémités.

$$F_{CR} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L_f^2}$$

Avec : F_{CR} : charge critique d'Euler

I_{min} : moment d'inertie minimal

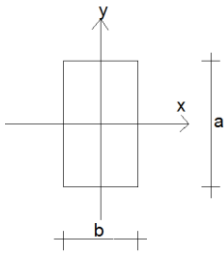
L_f : longueur de flambement

E : module d'élasticité longitudinale

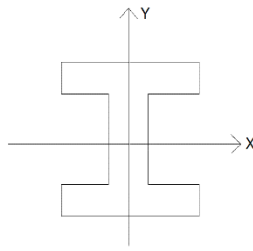
NB : le flambement se produit suivant un axe perpendiculaire à l'axe du moment quadratique le plus faible, c'est pourquoi on a I_{min}

Exemple :

- Section rectangulaire

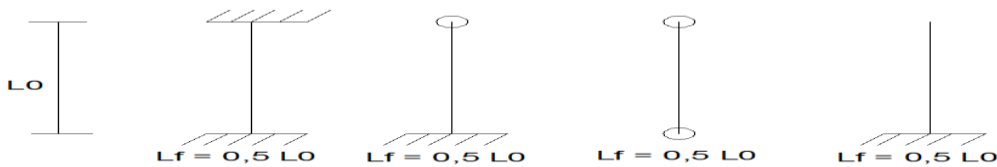


- section en I



$I_Y < I_X$; donc on vas calculer I_{min} par rapport à I_Y donc $I_{min} = I_Y = \frac{a b^3}{12}$

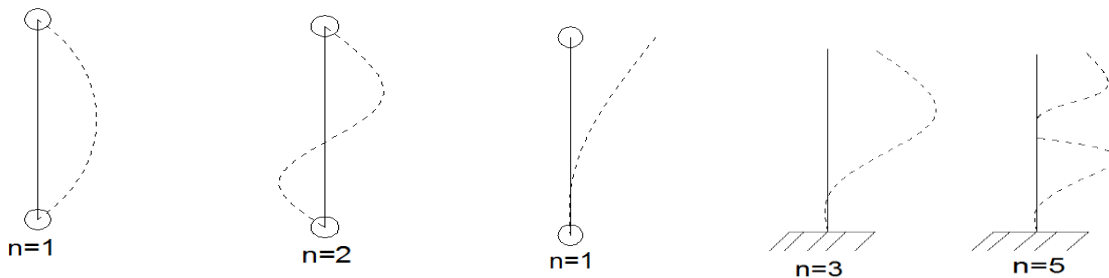
Les conditions aux extrémités des pièces :



Càd pour deux articulations on aura : $F_{RC} = \frac{n^2 \pi^2 E I_{min}}{L^2_0}$

et pour un encastrement : $F_{RC} = \frac{n^2 \pi^2 E I_{min}}{4 L^2_0}$

Avec n : qui dépend aux conditions aux extrémités

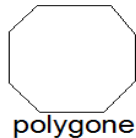
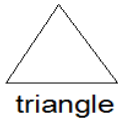
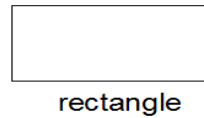
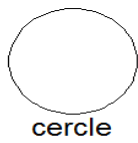


$F_{RC} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L^2_0}$; $F_{RC} = \frac{4 \pi^2 E I_{min}}{L^2_0}$; $F_{RC} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{4 L^2_0}$; $F_{RC} = \frac{9 \pi^2 E I_{min}}{4 L^2_0}$ et

$F_{RC} = \frac{25 \pi^2 E I_{min}}{4 L^2_0}$

- Si $F < F_{CR}$: la structure reste droite, elle est dite en équilibre stable
- Si $F = F_{CR}$: la structure peut ou ne pas flamber, elle est dite en équilibre neutre
- Si $F > F_{CR}$: la structure est instable

- Considérons 5 pièces de même section



C'est la pièce triangulaire qui résiste le mieux au flambement. Il a 21% de plus que la section circulaire

- Si $F \geq 15\% F_{CR}$, la flèche maximum de la structure flambe atteint 11% de sa longueur

8.3 CONTRAINTE CRITIQUE D'EULER (FLAMBEMENT)

A la charge critique d'Euler P_{CR} ou F_{CR} correspond une contrainte critique σ_{cr} , qui peut prendre le nom de contrainte critique limite ou admissible, donnant un élément de sécurité vis-à-vis du flambement

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{CR}}{S} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{S L_f^2} = \frac{\pi^2 E R^2}{L_f^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Avec : σ_{cr} : contrainte critique ; S : section ; R : rayon de giration ;

λ : élancement (caractérise la flexibilité de la poutre et permet de classer les poutres ou colonne longues ou courtes) ; L_f : longueur de flambement

$$\lambda = \frac{L_f}{I_{min}} \text{ et } R = \sqrt{\frac{I}{S}}$$

$$\text{Condition : } \sigma \leq \sigma_{cr} \Rightarrow \frac{P}{S} \leq \sigma_{cr}$$

σ : contrainte de compression simple

Ainsi, il y a des valeurs limite d'élancement pour les matériaux au-dessous de laquelle on peut plus utiliser les formules d'Euler et la pièce est dite courte et on calcul en compression simple

- Acier : $\lambda > \lambda_{lim} = 91$
- Aluminium : $\lambda > \lambda_{lim} = 62$
- Fonte : $\lambda > \lambda_{lim} = 80$
- Bois : $\lambda > \lambda_{lim} = 70$

- Acier doux : $\lambda > \lambda_{lim} = 100$

$$\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_e}} ; \sigma_e : \text{Limite élastique des matériaux}$$

$\sigma_e = 240 \text{ MPA}$: Un acier de construction

$\sigma_e : 180 \text{ MPA}$: alliage d'aluminium

- $\sigma_{cr} < \sigma_e$: il y aura ruine par flambement cad la pièce périra par écrasement des que $\sigma = \sigma_{cr}$
- $\sigma_{cr} > \sigma_e$: la pièce périra par écrasement (ou compression simple sans flambement) dès que $\sigma = \sigma_e$. Dans ce cas il y a aucun risque de flambement. le dimensionnement se fait en compression simple
- Condition de stabilité : $P \leq P_S = \frac{P_{cr}}{n_s}$
- Vérification de la stabilité : $\sigma_{cr} \leq \sigma_S = \frac{\sigma_{cr}}{n_s} = \varphi \sigma$

Avec : n_s : coefficient de la marge de stabilité ;

σ_S : Contraintes admissibles de stabilité

φ : coefficient de réduction de la contrainte admissible en compression

λ	0	40	60	80	90	100	110	120	130	140
Acier doux	1	0,92	0,86	0,75	0,69	0,6	0,52	0,45	0,40	0,36
bois	1	0,87	0,71	0,49	0,38	0,31	0,25	0,22	0,18	0,16

Il se peut que la valeur de l'élanement obtenue ne se trouve pas dans le tableau, dans ce cas on procède par l'interpolation

a ----> b

c ----> X $\Rightarrow X = b + \frac{(e-b)(c-d)}{d-a}$ avec X : Inconnue

d ----> e

- Dans le cas où la poutre a un défaut de rectitude, ou bien les forces de compression aux extrémités de la poutre ne sont pas bien centrées, alors la contrainte réelle maximale subie par la poutre sera supérieure à la contrainte normale : F / S

La contrainte maximale est donnée par : $\sigma_{max} = \frac{F}{S} \left(1 + \frac{\lambda^2}{10000} \right) ; \sigma_m \leq \sigma_s$

8.4 CRITERE DE DIMENSIONNEMENT

En pratique, la formule d'Euler n'est pas directement utilisée pour dimensionner une pièce.

On peut alors déterminer la charge critique P_{cr} applicable sur une structure en comparant sa valeur d'élançement à la valeur d'élançement critique λ_{cr}

8.4.1 POUTRE OU COLONNE EN ACIER

$$F_{adm} \leq F_{cr} ; K = \frac{F_{cr}}{F_{adm}}$$

F_{adm} : Charge admissible par la pièce

K : coefficient de sécurité adopté pour la construction

R_{PC} : Résistance pratique en compression du matériau ou contrainte admissible en compression

- Poutre courte : $\lambda < 20$ calcul en compression : $F_{adm} = R_{PC} * S$
- Poutre moyenne : $20 \leq \lambda \leq 100$; formule de RANKIN : $F_{adm} = \frac{R_{PC} * S}{1 + (\frac{\lambda}{\lambda_{cr}})^2}$
- Poutre longue : $\lambda \geq 100$; formule d'EULER : $F_{adm} = \frac{R_{PC} * S}{2 (\frac{\lambda}{\lambda_{cr}})^2}$

La méthode s'utilise aussi avec des poutres ou poteau en fonte avec $\lambda_{lim} = 80$ à la place de 100

8.4.2 POUTRE OU POTEAU EN ALLIAGE D'ALUMINIUM

- $R_e = 240 \text{ MPA}$
 - $0 \leq \lambda \leq 9,5$: $\sigma_{adm} = R_{PC} = 131 \text{ MPA}$
 - $9,5 < \lambda \leq 66$: $\sigma_{adm} = 139 - 0,868 \lambda \text{ (MPA)}$
 - $\lambda \geq 66$: $\sigma_{adm} = \frac{350}{\lambda^2} \text{ (GPA)}$
- $R_e = 390 \text{ MPA}$
 - $0 \leq \lambda \leq 12$: $\sigma_{adm} = R_{PC} = 193 \text{ MPA}$
 - $12 < \lambda \leq 55$: $\sigma_{adm} = 212 - 1,585 \lambda \text{ (MPA)}$
 - $\lambda \geq 55$: $\sigma_{adm} = \frac{372}{\lambda^2} \text{ (GPA)}$

8.4.3 POUTRE OU POTEAU EN BOIS

Dans le cas des sections carrée et rectangulaire

$$7 \text{ MPA} \leq R_{PC} \leq 12,5 \text{ MPA} ; K = \sqrt{\frac{0,45 E}{R_{PC}}} ; 7 \text{ GPA} \leq E \leq 12,5 \text{ GPA}$$

Et $18 \leq K \leq 30$

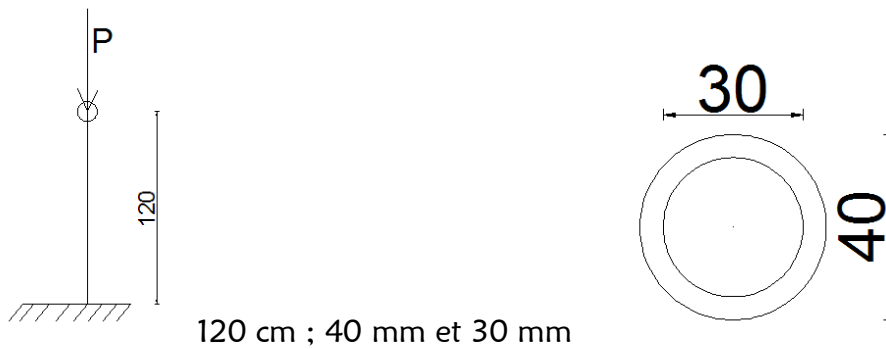
- $0 \leq \lambda \leq 11$: $\sigma_{adm} = R_{PC}$

- $11 \leq \lambda \leq K : \sigma_{adm} = R_{PC} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{L_f}{a} * K^{-1} \right)^2 \right)$
- $K \leq \lambda \leq 50 : \sigma_{adm} = \frac{0,3 E}{\left(\frac{L_f}{a} \right)^2}$

EXERCICES

Exemple 1.

Calculer la force critique P_{cr} et la contrainte critique σ_{cr} d'un tube en dural sachant que $\sigma_e = 180 \frac{N}{mm^2}$ et $E = 0,7 * 10^5 \frac{N}{mm^2}$

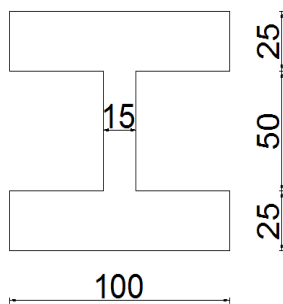


Exemple 2.

Considérons un barreau d'acier des sections suivantes articulée à ses extrémités et soumise à une compression axiale. La longueur de la barre est égale à 2 m et

$E = 200 \text{ GPA}$. Déterminer l'élongement en utilisant l'expression d'Euler si

$\sigma_e = 210 \text{ MPA}$ et la charge critique



Les dimensions sont en mm

Exemple 3.

Une colonne en acier dont les caractéristiques sont les suivantes :

$L = 4 \text{ m} ; E = 200 \text{ GPA} = 2 * 10^{11} \text{ N/m}^2 ; \sigma_e = 240 \text{ MPA} = 24 * 10^7 \frac{N}{mm^2}$

$I = 15442186 \text{ mm}^4 = 15442186 * 10^{-12} \text{ m}^4$

$$S = 5890 \text{ mm}^2 = 5890 * 10^{-6} \text{ m}^2$$

Déterminer la charge critique avec ses doubles articulations

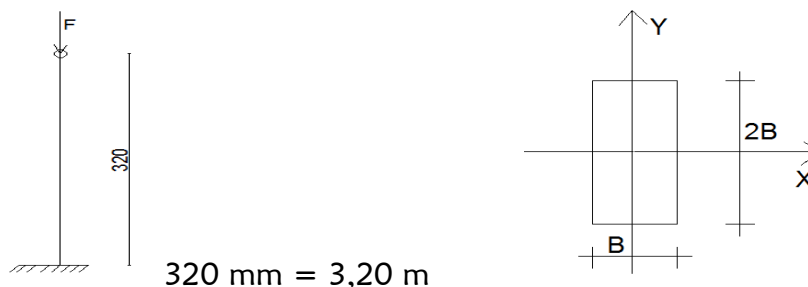
Exemple 4.

Considérons une barre d'acier de 0,50 m de longueur et de section rectangulaire (50 * 20) mm, supposée articulée à ses extrémités.

- Indiquer comment périra la barre dans le cas où elle est constituée en acier de limite élastique 240 MPA ($\sigma_e = 240 \text{ MPA}$)
- Quelle force sera-t-il nécessaire d'appliquer à son extrémité libre pour faire flamber, en supposant que la barre n'est plus articulée, mais encastrée à une extrémité et libre à l'autre.
 $E = 210.000 \text{ MPA} = 210.000 \text{ N/mm}^2$

Exemple 5.

Une colonne d'acier doux est soumise à un effort normal $F = 600 \text{ KN}$. Déterminer la base de sa section rectangulaire si $\sigma = 200 \text{ MPA}$; $E = 210.000 \text{ MPA}$; $\lambda_{lim} = 1000$ et $n_{st} = 2$



RESOLUTIONS

Exemple 1.

$$L = 1,2 \text{ m} ; E = 0,7 * 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} ; \mu = 0,7 \text{ et } \sigma_e = 180 \text{ N/mm}^2$$

- $\sigma_{cr} \leq \sigma_e \Rightarrow \frac{P_{cr}}{S} \leq \sigma_e \Rightarrow P_{cr} \leq \sigma_e * S$
 $S_1 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 * 30^2}{4} = 706,5 \text{ mm}^2 ; S_2 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 * 40^2}{4} = 1250 \text{ mm}^2$
 $S = S_2 - S_1 = 1250 - 706,5 = 549,5 \text{ mm}^2$

$$P_{cr} \leq 180 * 549,5 = 98910 \text{ N} ; \text{ Nous adoptons } P_{cr} = 90.000 \text{ N} = 90 \text{ KN}$$

$$\bullet \sigma_{CR} = \frac{P_{cr}}{S} = \frac{90.000}{549,5} = 155,3 \frac{N}{mm^2}$$

Exemple 2.

$$L_f = L_0 = 2 \text{ m} = 2000 \text{ mm} ; \sigma_e = 210 \text{ MPA} = 21 * \frac{10^7 N}{m^2}$$

$$E = 200 \text{ GPa} = 2 * 10^{11} N/m^2 = 2 * 10^5 N/mm^2$$

$$\bullet P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L_f^2}$$

$$I_1 = I_3 = \frac{100 * 25^3}{12} = 130208,3 \text{ mm}^4 ; I_2 = \frac{15 * 50^3}{12} = 156250 \text{ mm}^4$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 2 * 130208,3 + 156250 = 416666,67 \text{ mm}^4$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L_f^2} = \frac{3,14^2 * 2 * 10^5 * 416666,67}{2000^2} = 65416,67 \text{ N}$$

$$\bullet \sigma_{cr} \leq \sigma_e \Rightarrow \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_e \Rightarrow \lambda^2 \geq \frac{\pi^2 E}{\sigma_e} \Rightarrow$$

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_e}} = \sqrt{\frac{3,14^2 * 2 * 10^{11}}{21 * 10^7}} = 96,9 ; \text{ Nous adoptons } \lambda = 100$$

Exemple 3.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L_f^2} = \frac{3,14^2 * 2 * 10^{11} * 15442186 * 10^{-12}}{4^2} = 1903172,2 \text{ N} = 1903,2 \text{ KN}$$

$$R = \sqrt{\frac{I}{S}} = \sqrt{\frac{15442186 * 10^{-12}}{5890 * 10^{-6}}} = 0,05 \text{ m} = 50 \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{L_f}{R} = \frac{4}{0,05} = 80 ; \text{ donc } \lambda = 80 < \lambda_{lim} = 91$$

La poutre est une poutre courte pour laquelle on ne peut pas appliquer la formule d'Euler. Le calcul est un calcul de résistance en compression, charge limite

$$F_{adm} = \sigma_e * S = 240 * 10^6 * 5890 * 10^{-6} = 1413600 \text{ N}$$

$$F_{adm} = 1413,6 \text{ KN} < F_{cr} = 1903,2 \text{ KN}$$

Exemple 4.

$$\bullet I = \frac{5 * 2^3}{12} = 3,33 \text{ cm}^4 = 33300 \text{ mm}^4$$

$$S = 5 * 2 = 10 \text{ cm}^2 = 1000 \text{ mm}^2$$

$$R = \sqrt{\frac{I}{S}} = \sqrt{\frac{3,33}{10}} = 0,577 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{L_f}{R} \text{ avec } L_f = L_0 = 0,50 \text{ m} = 50 \text{ cm} = 500 \text{ mm} \Rightarrow \lambda = \frac{50}{0,577} = 86,6$$

$$\lambda = 86,6 < \lambda_{cr} = 93 \text{ (barre courte)} ; \text{ le calcul se fait en compression simple}$$

La barre d'acier périra par écrasement sans flambement lorsque $\sigma = \sigma_e$

- $$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{4 L^2_0} = \frac{3,14^2 * 210000 * 33300}{4 * 500^2} = 68948,1828 \text{ N} = 68,948 \text{ KN}$$

$$\sigma_{CR} = \frac{F_{cr}}{S} = \frac{68948,1828}{1000} = 68,948 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 68,948 \text{ MPA}$$

$$\sigma_{CR} = 68,948 \text{ MPA} < \sigma_e = 240 \text{ MPA}$$

CHAPITRE 9 FLEXION COMPOSEE

9.1 DEFINITION

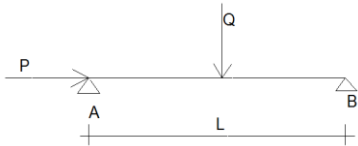
Une section est dite sollicitée à la flexion composée lorsqu'elle supporte à la fois un moment fléchissant M , un effort Normal N et un effort Tranchant T .

Donc, c'est la superposition des résultats obtenus dans l'étude de la compression simple (traction simple) et dans celle de la flexion simple.

9.2 LES SOLLICITATIONS QUI PEUVENT ENGENDRER LA FLEXION COMPOSEE

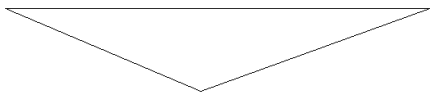
- Flexion composée = Moment fléchissant + Traction ou (compression)
- Flexion composée = M , T et $N \neq 0$

Exemple 1 :

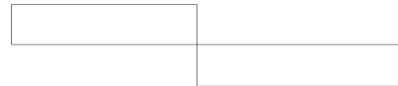


DIAGRAMME

Moment



Effort tranchant

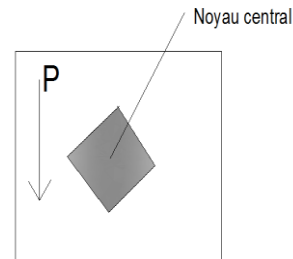
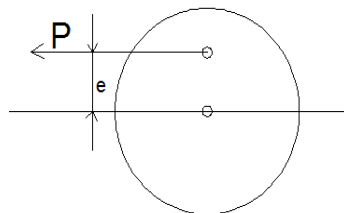
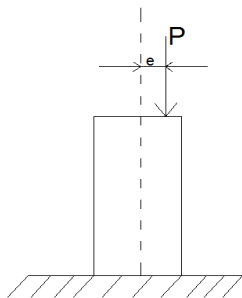


Effort normal



Cette poutre est sollicitée par la force P qui engendre l'effort Normal et Q qui engendre à la fois l'effort Tranchant et le moment fléchissant.

Exemple 2 : Une poutre ou colonne ou structure sollicitée en dehors de son noyau central (càd la charge est excentrée).

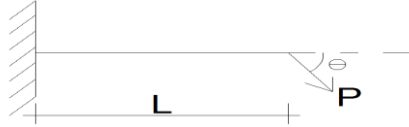


$$M = P * e$$

e : excentricité ; P : la charge et M : moment

La charge P comprime et M engendre le moment

Exemple 3. Une pièce sollicitée par une force inclinée



La charge P peut se décomposer en une charge transversale Py et une charge axiale Px

Py : engendre la flexion avec l'effort tranchant et Px : engendre l'effort Normal

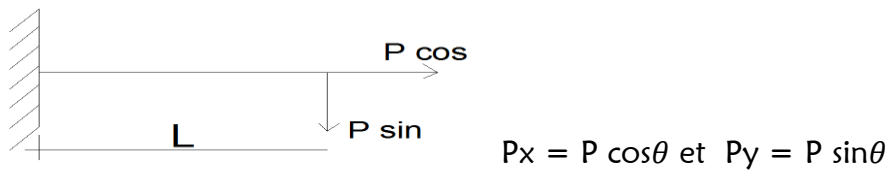


Diagramme :

Moment

Effort Tranchant

Effort Normal



9.3 CONTRAINTE

Comme en flexion composée, il y a superposition des forces ; il y a aussi superposition des contraintes.

$$\sigma_1 = \frac{N}{S} : \text{contrainte de Compression ou Traction}$$

$$\sigma_2 = \frac{MY}{I} : \text{contrainte de Flexion}$$

$$\sigma = \sigma_1 \pm \sigma_2 = \frac{N}{S} \pm \frac{MY}{I} : \text{contrainte en Flexion composée}$$

$$\sigma_{min} = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N}{S} - \frac{MY}{I} : \text{contrainte minimale}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{N}{S} + \frac{MY}{I} : \text{contrainte maximale}$$

$$\text{Condition de stabilité : } \sigma_{calcul} = \frac{N}{S} \pm \frac{MY}{I} \leq \sigma_{adm}$$

$$\tau = \frac{TQ}{I.b} : \text{contrainte de cisaillement}$$

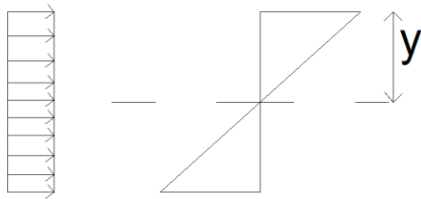
NB : la valeur de τ reste faible comparée à σ , on peut donc le négliger dans le calcul de la contrainte Normale principale.

- L'axe Neutre est défini comme le lieu des contraintes nulles ($\sigma = 0$)

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{MY}{I} = 0 \Rightarrow \frac{N}{S} + \frac{MY}{I} = 0 \Rightarrow \frac{MY}{I} = -\frac{N}{S}$$

$$Y = -\frac{NI}{SN} \text{ (l'axe Neutre ne passe pas par le centre de gravité)}$$

Diagramme des contraintes



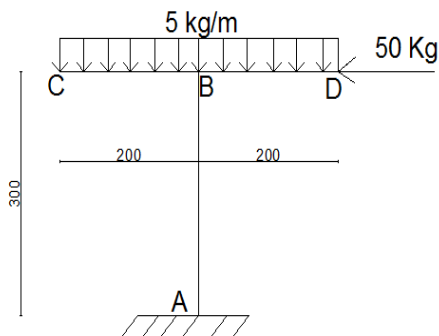
Y : axe Neutre ou plan Neutre

EXERCICES

1. Dimensionner les sections des structures suivantes (poutre et poteau) représentées dans la figure ci-après sachant que les matériaux utilisés sont le bois ayant les caractéristiques suivantes :

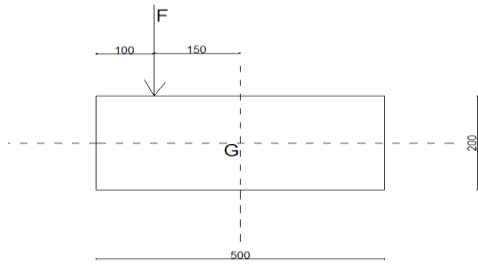
$$E = 1000 \text{ kg/cm}^2 ; \sigma_{adm \text{ bois}} = 5,5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ à la compression}$$

$\sigma_{adm \text{ bois}} = 10,5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ à la flexion , et tracer le diagramme de contrainte à la fondation de cette structure



Les dimensions sont en cm

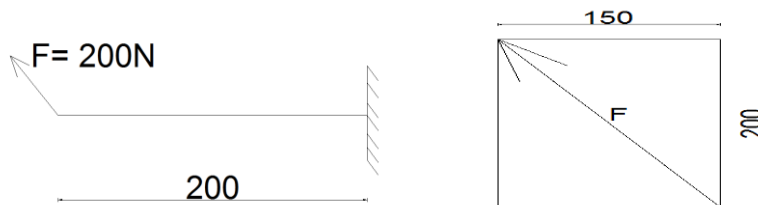
2. Une poutre métallique constituée des caractéristiques suivantes
 $H = 12 \text{ cm}$; $S = 14,2 \text{ cm}^2$; $I = 328 \text{ cm}^4$; $N = 100.000 \text{ N}$
 Et $M = 547000 \text{ N cm}$. Calculer les contraintes et tracer le diagramme
3. Soit la figure suivante représente une fondation qui reçoit une charge excentrée de 1,5 m ($F = 30.000 \text{ N}$)



Considérer le poids propre de la fondation s'il est en B.A avec comme poids spécifique du B.A ($\rho_{BA} = 25000 \text{ N/m}^3$)

- Déterminer la force de compression totale sur la fondation
 - Calculer les contraintes et tracer le diagramme
4. Dimensionner la poutre suivante, tracer le diagramme des contraintes et trouver l'axe central si possible

$$\sigma_{adm \text{ compression}} = 25 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \text{ et } \sigma_{adm \text{ flexion}} = 75 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

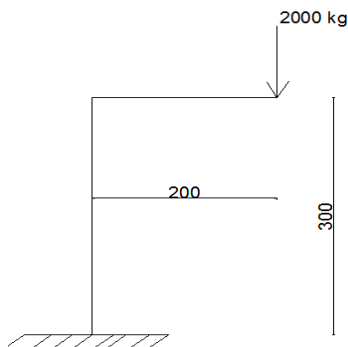


considerer Une section rectangulaire et circulaire.

5. Dimensionner les sections des éléments des structures (poutre et poteau) représentées dans la figure ci-après sachant que les matériaux utiliser est le bois ayant les caractéristiques suivantes :

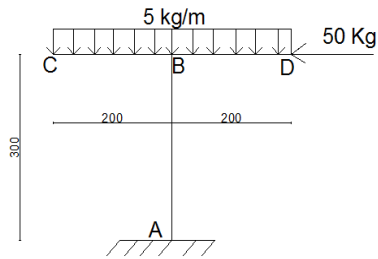
$$\sigma_{adm \text{ bois a la compression}} = 55 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ et } \sigma_{adm \text{ bois a la flexion}} = 105 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

Et, trouver la position de l'axe neutre



RESOLUTIONS

1.



$$R = PL = 5 \cdot 4 = 20 \text{ kg et } X = L/2 = 4/2 = 2 \text{ m}$$

$$R_A = 20 \text{ kg} ; H_A = 50 \text{ kg et } M_A = 150 \text{ kgm} = 15000 \text{ kgcm}$$

ZONE AB : $0 \leq x \leq 3\text{m}$



$$\Sigma N = 0 \Rightarrow -N + R_A = 0 \Rightarrow N = R_A = 20$$

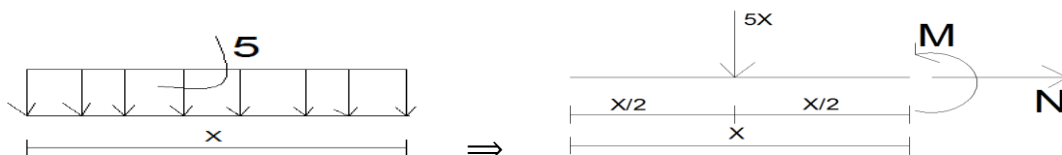
$$\Sigma M = 0 \Rightarrow \odot M + M_A - H_A X = 0 \Rightarrow M = H_A X - M_A = 50X - 150$$

$$T = -dM/dx = -50$$

$$\text{Si } x = 0 ; N = 20 ; T = -50 \text{ et } M = -150$$

$$\text{Si } x = 3 ; N = 20 ; T = -50 \text{ et } M = 0$$

ZONE CB : $0 \leq x \leq 2\text{m}$



$$\Sigma N = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow \odot M + \frac{5X^2}{2} = 0 \Rightarrow M = -\frac{5X^2}{2}$$

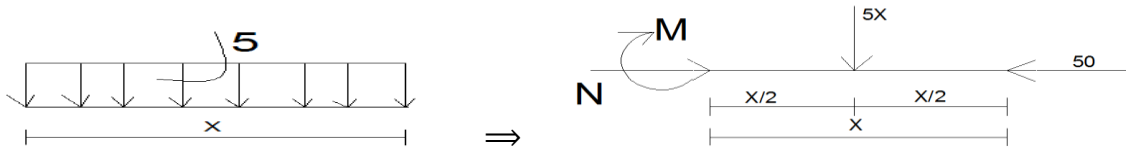
$$T = dM/dx = -5X$$

Si $x = 0$; $N = 0$; $T = 0$ et $M = 0$

Si $x = 1$; $N = 0$; $T = -5$; $M = -2,5$

Si $x = 2$; $N = 0$; $T = -10$ et $M = -10$

ZONE DB : $0 \leq x \leq 2m$



$$\Sigma N = 0 \Rightarrow N - 50 = 0 \Rightarrow N = 50$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow \odot M + \frac{5X^2}{2} = 0 \Rightarrow M = -\frac{5X^2}{2}$$

$$T = -dM/dx = 5X$$

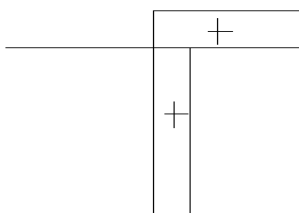
Si $x = 0$; $N = 50$; $T = 0$ et $M = 0$

Si $x = 1$; $N = 50$; $T = 5$; $M = -2,5$

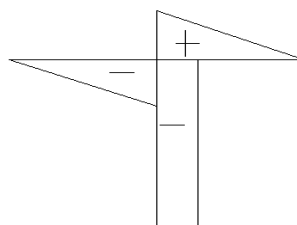
Si $x = 2$; $N = 50$; $T = 10$ et $M = -10$

DIAGRAMME

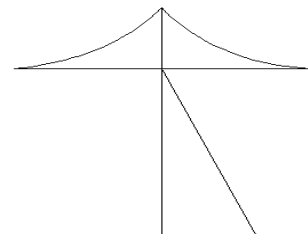
Effort normal



effort tranchant



moment fléchissant



La poutre CB travaille à la flexion simple (M et $T \neq 0$ et $N = 0$)

La poutre BD et le poteau AB travaillent à la flexion composée ($M, N, T \neq 0$)

a) POUTRE CB : $M_{max} = M_B = 10 \text{ kg m} = 1000 \text{ kg cm}$

Condition à la flexion : $\sigma_c = \frac{MY}{I} \leq \sigma_{adm} \text{ a la flexion} \Rightarrow \frac{1000}{\frac{B H^3}{12}} * \frac{H}{2} \leq 10,5$

$$\Rightarrow \frac{6000}{B H^2} \leq 10,5 \text{ or } B = \frac{H}{2} \Rightarrow \frac{6000}{\frac{H}{2} * H^2} \leq 10,5 \Rightarrow \frac{12000}{H^3} \leq 10,5 \Rightarrow H^3 \geq \frac{12000}{10,5}$$

$$H \geq \sqrt[3]{\frac{12000}{10,5}} = 10,45 \text{ cm}$$

Nous adoptons : H = 20 cm et B = 10 cm

b) POUTRE BD : $M_{max} = M_B = 10 \text{ kg m} = 1000 \text{ kg cm}$ et N = 50 kg

$$\sigma = \sigma_1 \pm \sigma_2 = \frac{N}{S} \pm \frac{M}{I} Y$$

$$\text{Condition à la compression : } \sigma = \frac{N}{S} \leq \sigma_{adm} \text{ à la compression} \Rightarrow \frac{50}{B H} \leq 5,5$$

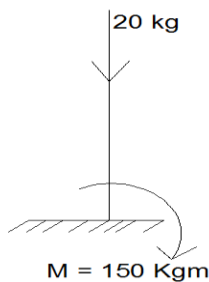
$$\Rightarrow \frac{50}{\frac{H}{2} * H} \leq 5,5 \Rightarrow H^2 \geq \frac{2 * 50}{5,5} \Rightarrow H \geq \sqrt{\frac{100}{5,5}} = 4,26 \text{ cm}$$

Nous adoptons : H = 20 cm et B = 10 cm

$$\sigma = \sigma_1 \pm \sigma_2 = \frac{N}{S} \pm \frac{M}{I} Y = \frac{50}{20 * 10} \pm \frac{1000}{\frac{10 * 20^3}{12}} * \frac{20}{2} = \frac{5}{20} \pm \frac{3}{2}$$

$$\sigma_{max} = \frac{5}{20} + \frac{3}{2} = 2 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ et } \sigma_{min} = \frac{5}{20} - \frac{3}{2} = -1 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

c) COLONNE AB : N = 20 N et $M_{max} = M_A = 150 \text{ kgm} = 15000 \text{ kgcm}$



$$\sigma = \sigma_1 \pm \sigma_2 = \frac{N}{S} \pm \frac{M}{I} Y$$

$$\text{Condition à la compression : } \sigma = \frac{N}{S} \leq \sigma_{adm} \text{ à la compression} \Rightarrow \frac{N}{B H} \leq 5,5$$

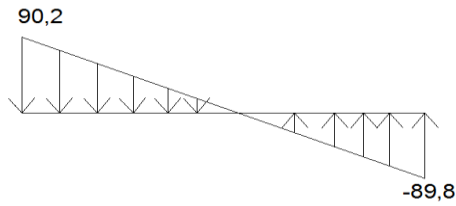
$$\text{Nous considérons la colonne carrée : } B = H \Rightarrow \frac{N}{H * H} \leq 5,5 \Rightarrow \frac{N}{H^2} \leq 5,5$$

$$H \geq \sqrt{\frac{N}{5,5}} = \sqrt{\frac{20}{5,5}} = 1,5 \text{ cm}$$

Nous adoptons : B = H = 10 cm

$$\sigma = \sigma_1 \pm \sigma_2 = \frac{N}{S} \pm \frac{M}{I} Y = \frac{20}{10 * 10} \pm \frac{15000}{10 * 10^2} * \frac{10}{2} = 0,2 \pm 90$$

$$\sigma_{max} = 0,2 + 90 = 90,2 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ et } \sigma_{min} = 0,2 - 90 = -89,8 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$



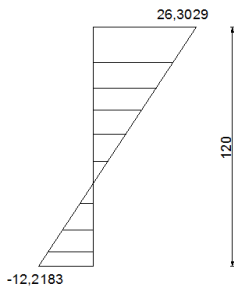
2. $\sigma = \sigma_1 \pm \sigma_2 = \frac{N}{S} \pm \frac{M}{I} Y$

- à la compression : $\sigma_1 = \frac{N}{S} = \frac{100000}{14,2} = 7042,3 \frac{N}{cm^2}$
- à la flexion : $\sigma_2 = \frac{M}{I} Y = \frac{M}{\frac{B * H^3}{12}} * \frac{H}{2}$ or $S = B H \Rightarrow \sigma_2 = \frac{6 M}{S * H}$

$$\sigma_2 = \frac{6 * 547000}{14,2 * 12} = 19260,6 \frac{N}{cm^2}$$

Donc : $\sigma = \sigma_1 \pm \sigma_2 = 7042,3 \pm 19260,6$

$$\sigma_{max} = 26302,9 \frac{N}{cm^2} \text{ et } \sigma_{min} = -12218,3 \frac{N}{cm^2}$$



3.

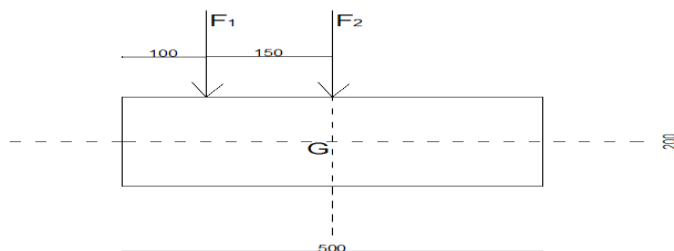
- $F_1 = 30.000 N$

$\phi = \frac{P}{V} \Rightarrow P = \phi * V$ or $V = L * l * h = 5 * 2 * 1 = 10 m^3$; nous considérons une largeur d'un mètre ($l = 1 m$)

$$F_2 = 25000 * 10 = 250.000 N$$

$$N = F_C = F_1 + F_2 = 30.000 + 250.000 = 280.000 N$$

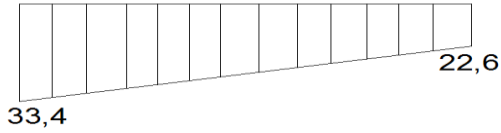
- $\sigma = \sigma_1 \pm \sigma_2 = \frac{N}{S} \pm \frac{M}{I} Y = \frac{N}{S} \pm \frac{6 M}{b h^2}$ avec $M = F * e$



$$M = F_1 * e_1 + F_2 * e_2 = 30.000 * 1,5 + F_2 * 0 = 45.000 \text{ Nm}$$

$$\sigma = \frac{280.000}{5 * 2} \pm \frac{6 * 45.000}{2 * 5^2} = 28000 \pm 5400$$

$$\sigma_1 = 28000 + 5400 = 33400 \frac{N}{m^2} \text{ et } \sigma_2 = 28000 - 5400 = 22600 \frac{N}{m^2}$$



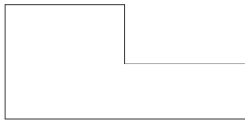
CHAPITRE 10 FLEXION DEVIEE

10.1. Définition

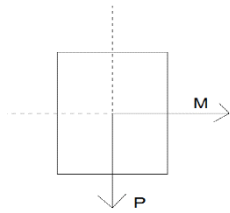
La flexion déviée ce la superposition ou l'addition de deux flexion, définie à partir des plans de symétrie c.à.d. décomposer les sollicitations en deux flexion planes (My et Mz).

La flexion déviée apparait aux structures non symétriques et dans les structures non chargée dans leur plan de symétrie

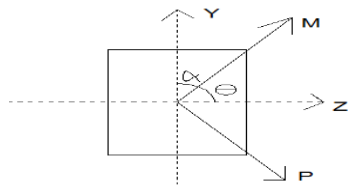
Structure non symétrique



Exemple :



Cas de la flexion



Cas de la flexion Déviée

Ce moment peut se composer en My et Mz

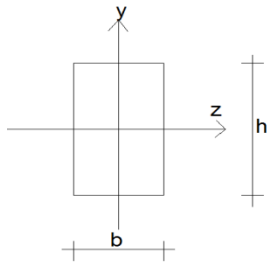
$$Mz = M \cos \theta \text{ ou } Mz = M \sin \alpha$$

$$My = M \sin \theta \quad My = M \cos \alpha$$

10.2 CONTRAINTE

$$\sigma = \frac{My}{Iy} z \pm \frac{Mz}{Iz} y$$

Dans le cas d'une structure rectangulaire



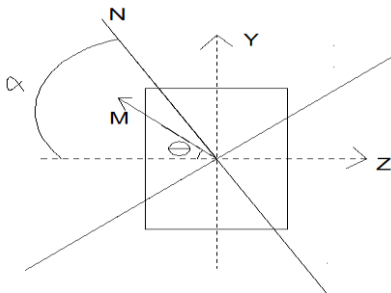
$$I_Y = \frac{h b^3}{12} ; I_Z = \frac{b h^3}{12} ; y = \frac{h}{2} \text{ et } z = \frac{b}{2}$$

Pour avoir l'axe neutre ou le plan neutre, on pose $\sigma = 0$

$$\sigma = \frac{My}{I_y} * z + \frac{Mz}{I_z} * Y = 0 \Rightarrow Y = -\frac{My}{Mz} * \frac{I_z}{I_y} * Z$$

NB : les contraintes maximales se localisent aux points les plus éloignés de l'axe neutre.

Ou soit pour avoir l'axe du plan neutre, nous devons avoir l'angle d'inclinaison du moment par rapport à l'axe Z



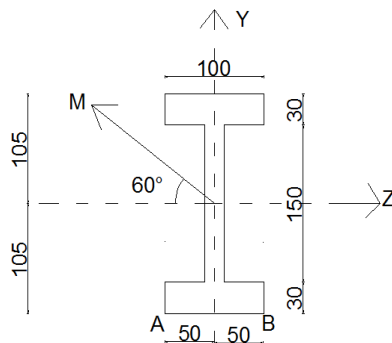
Avec N : axe neutre ou plan neutre

α : angle d'inclinaison du plan neutre par rapport à l'axe Z

$$\text{tg } \alpha = \frac{I_z}{I_y} \text{tg } \theta \Rightarrow \alpha = \text{arc tg } \frac{I_z}{I_y} \text{tg } \theta$$

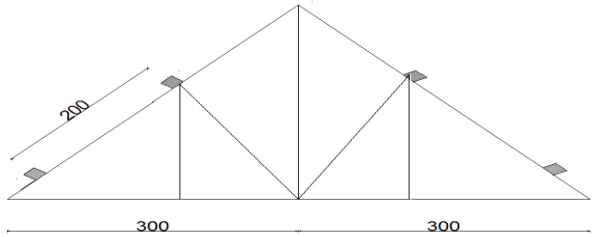
EXERCICES

- Un profilé en I supporte un moment fléchissant $M = 5000 \text{ Nm}$ incliné par rapport à l'axe Z de 60° , les caractéristiques sont les suivantes : $I_Y = 200 \text{ cm}^4$ et $I_Z = 2000 \text{ cm}^4$, déterminer les contraintes aux pieds de la plaque (semelle)



Les dimensions sont en mm

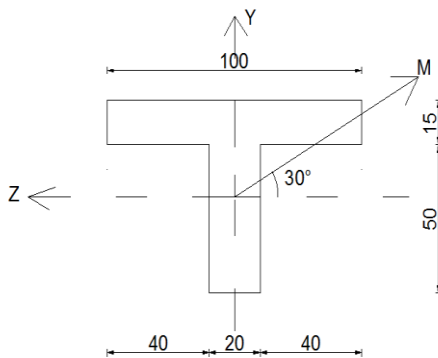
2. Soit la charpente en bois d'une ferme d'une maison



On vous demande de déterminer les dimensions transversales à donner à ces pannes afin d'assurer la stabilité de la couverture, la contrainte admissible $\sigma = 700$ bars, nous avons une portée de 5m

- Charge due à la pluie : $P_1 = 2,1 \frac{KN}{m^2}$
- Charge due à la couverture : $P_2 = 1,5 \frac{KN}{m^2}$
- Charge due au vent : $P_3 = 2 \frac{KN}{m^2}$

3. Une poutre en T supporte un moment fléchissant max de 1875 Nm incliné de 30° par rapport à l'axe Z. Déterminer les contraintes en A et B et l'orientation du plan neutre



RESOLUTION

1. $Z_A = -50 \text{ mm} = -5 \text{ cm}$; $Y_A = -105 \text{ mm} = -10,5 \text{ cm}$
 $Z_B = 50 \text{ mm} = 5 \text{ cm}$; $Y_B = -105 \text{ mm} = -10,5 \text{ cm}$
 $M_Z = -M \cos 60 = -5000 * \cos 60 = -2500 \text{ Nm} = -250000 \text{ Ncm}$
 $M_Y = M \sin 60 = 5000 * \sin 60 = 4330 \text{ Nm} = 433000 \text{ Ncm}$
 $\sigma_A = \frac{M_Y}{I_Y} Z_A \pm \frac{M_Z}{I_Z} Y_A = \frac{433000}{200} * (-5) \pm \frac{-250000}{2000} * (-10,5)$
 $\sigma_A = -10,825 \pm 1312,5$
 $\sigma_{Amax} = 1301,7 \frac{N}{cm^2}$ et $\sigma_{Amin} = -1323,3 \frac{N}{cm^2}$
 $\sigma_B = \frac{M_Y}{I_Y} Z_B \pm \frac{M_Z}{I_Z} Y_B = \frac{433000}{200} * 5 \pm \frac{-250000}{2000} * (-10,5)$
 $\sigma_B = 10,825 \pm 1312,5$
 $\sigma_{Bmax} = 1323,3 \frac{N}{cm^2}$ et $\sigma_{Bmin} = -1301,7 \frac{N}{cm^2}$

2. Surface d'influence : $S_I = 2 * 5 = 10 \text{ m}^2$

- $P = \frac{p * S_I}{L}$

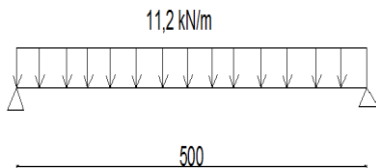
- Pluie : $P_1 = \frac{2,1 * 10}{5} = 4,2 \frac{KN}{m}$

- Couverture : $P_2 = \frac{1,5 * 10}{5} = 3 \frac{KN}{m}$

- Vent : $P_3 = \frac{2 * 10}{5} = 4 \frac{KN}{m}$

- $P = P_1 + P_2 + P_3 = 11,2 \frac{KN}{m}$

On aura :



$$M_{max} = \frac{P L^2}{8} = \frac{11,2 * 5^2}{8} = 35 \text{ KNm} = 3500 \text{ daNm} = 350000 \text{ daN cm}$$

$$\text{On aura : } \sigma = \frac{My}{I_y} z \pm \frac{Mz}{I_z} y \leq \sigma_{adm} \Rightarrow \frac{M}{I_y} z + \frac{M}{I_z} Y \leq \sigma_{adm}$$

$$\frac{M}{\frac{H B^3}{12}} \frac{B}{2} + \frac{M}{\frac{B H^3}{12}} \frac{H}{2} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow \frac{6 M}{H B^2} + \frac{6 M}{B H^2} \leq \sigma_{adm} \text{ or } B = H/2$$

$$\frac{6 M}{H \left(\frac{H}{2}\right)^2} + \frac{6 M}{\frac{H}{2} H^2} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow \frac{36 M}{H^3} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow H^3 \geq \frac{36 M}{\sigma_{adm}} \Rightarrow H \geq \sqrt[3]{\frac{36 M}{\sigma_{adm}}}$$

$$H \geq \sqrt[3]{\frac{36 * 350000}{700}} = 26,2 \text{ cm}$$

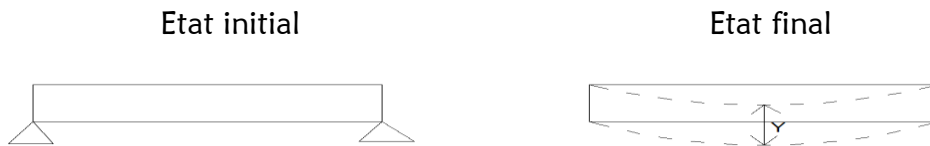
Nous adoptons : $H = 30 \text{ cm}$ et $B = 15 \text{ cm}$

CHAPITRE 11. DEFORMATION (FLECHE ET ROTATION)

11.1 DEFINITION

Par déformation, on entend la déformation de la surface neutre d'une poutre depuis sa position initiale jusqu'à la position finale.

Exemple :



Y est trouvé sous l'effet du moment fléchissant, c'est pourquoi tout au long du chapitre nous évaluerons que l'expression du moment fléchissant.

11.2. BUT

- le dimensionnement d'une structure exige deux conditions

1. le contrôle de la résistance : $\sigma_c \leq \sigma_{adm}$

2. le contrôle des déformations : $f_c \leq f_{adm}$

σ_c et f_c : la contrainte et la flèche qu'on calcul

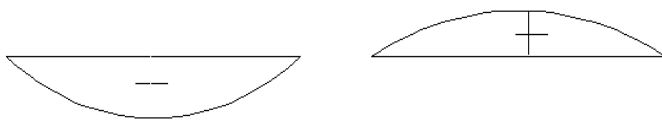
σ_{adm} et f_{adm} : la contrainte et la flèche admissible donc à ne pas dépasser

- le calcul des déformations nous permet de calculer les poutres Hyperstatique

11.3. DEFORMATION (FLECHE ET ROTATION)

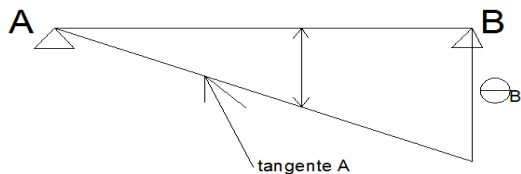
11.3.1. FLECHE OU DEFLEXION OU DEPLACEMENT VERTICAL (f ou Δ ou Y)

La déflection d'une poutre est habituellement mesurée par la Déformation de la surface neutre de la poutre à partir de sa position non chargée jusqu'à sa position charge



11.3.2. ROTATION OU PENTE OU DEVIATION (θ)

On appelle la Déviation d'un point B par rapport au point A (θ_B) la distance entre la position de B sur la poutre déformée et sa position sur la tangente à la poutre déformée tracée à partir du point A.



Dans ce chapitre, on aura 10 méthodes de calcul des déformations différentes.

Les valeurs de déflexion maximale ou admissible ont été déjà établies par les associations des normes et dans les abaques

Exemple :

- les américains : $f_{max} = \frac{L}{360}$
- Une association : $f_{max} = \frac{L}{1500}$ à $\frac{L}{2000}$ (pour les salles des machines)
- : $f_{max} = \frac{L}{350}$ pour les charges d'exploitation seule
- : $f_{max} = \frac{L}{300}$ pour le poids propre

Mais, d'une manière générale la déflexion ou la rotation ne peut pas être visible à l'œil nu. Une structure doit avoir une déformation raisonnable pour les raisons suivantes :

- Éviter des fissures
- Éviter d'avoir une structure trop souple
- Éviter de perdre l'esthétique.

11.4. METHODE DE DOUBLE INTEGRALE OU METHODE DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE

Forme générale : $EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$ ou $EI y'' = M$

On aura : $EI \frac{d^2y}{dx^2} = M \Rightarrow EI d^2y = M dx^2$

$$EI \int d^2y = \int M dx^2 \Rightarrow EI dy = Mx + C_1$$

$$EI \int dy = \int (Mx + C_1) dx$$

$$EI y = \frac{Mx^2}{2} + C_1 + C_2 \Rightarrow Y = \Delta = f = \frac{1}{EI} \left(\frac{Mx^2}{2} + C_1 + C_2 \right)$$

Ou $EI \theta = \int M dx$ et $EI f = \iint M dx$

NB : la première intégrale donne l'expression de la rotation et le second l'expression de la flèche

- M : L'expression du moment fléchissant
- $C_1 + C_2$: les constantes d'intégration à déterminer à partir des conditions aux limites ou condition aux appuis.

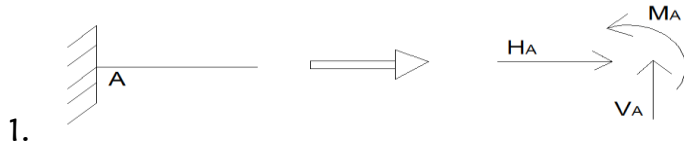
Les conditions aux limites sont liées aux liaisons des Appuis

- La flèche, c'est le déplacement vertical

- La rotation, c'est le moment

NB : On ne posera les conditions aux limites que là où la déformation est nulle pour déduire les constantes.

Exemple :



$\Delta = 0$; parce que V_A existe (cad elle annule le déplacement vertical)

$\theta = 0$; parce que M_A existe (cad il annule la rotation)



$\Delta = 0$; parce que V_A existe (cad elle annule le déplacement vertical)

$\theta \neq 0$; parce que M_A n'existe pas (c.à.d. on ne posera pas $\theta = 0$ à ce point)



$\Delta = 0$; parce que V_A existe (cad elle annule le déplacement vertical)

$\theta \neq 0$; parce que M_A n'existe pas (cad on ne posera pas $\theta = 0$ à ce point)

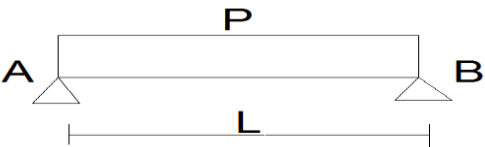
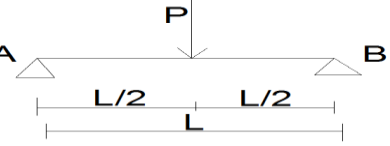
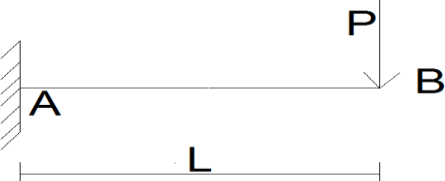


$\Delta \neq 0$; parce qu'il y a aucune réaction vertical qui annule le déplacement vertical

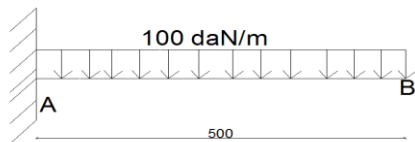
$\theta = 0$; parce que dans l'espace libre la rotation est nulle

EXERCICES

QUESTION : calculer la flèche et la rotation aux points indiqués des structures suivantes :

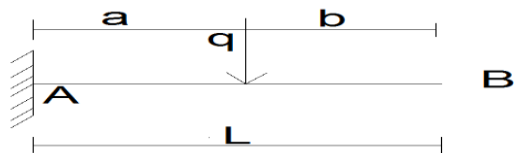
N°	STRUCTURE
1	
2	
3	

4. Dimensionner la structure suivante et donner les valeurs réelles de la flèche et de la rotation au point B. Si $E = 20000 \text{ daN/mm}^2$



5. Démontrer que :

$$\theta_A = \frac{q a^3}{6 EI} \text{ et } f_B = \frac{-q a^3 (4L - a)}{24 EI} \text{ De la structure suivante}$$



6. Démontrer que :

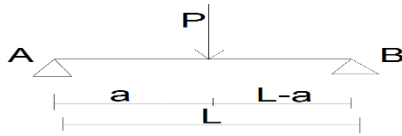
$$A - C : \theta = \frac{1}{EI} \left(P \left(1 - \frac{a}{L} \right) \frac{X^2}{2} - \frac{P a (L - a) (2L - a)}{6 L} \right)$$

$$f = \frac{1}{EI} \left(P \left(1 - \frac{a}{L} \right) \frac{X^3}{6} - \frac{P a (L - a) (2L - a) X}{6 L} \right)$$

$$C - B : \theta = \frac{1}{EI} \left(P a X - \frac{P a X^2}{2 L} - \frac{P a (2L^2 + X^2)}{6 L} \right)$$

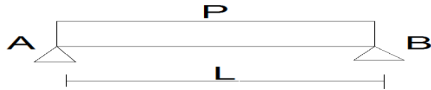
$$f = \frac{1}{EI} \left(\frac{P a X^2}{2} - \frac{P a X^3}{6 L} - \frac{P a (2L^2 + a^2) X}{6 L} + \frac{P a^3}{6 L} \right)$$

De la structure suivante



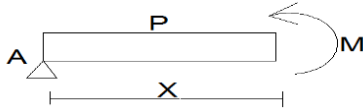
RESOLUTIONS

1.



$$R_a = R_b = \frac{PL}{2}$$

Zone AB



$$M + PX * \frac{X}{2} - R_A X = 0 \Rightarrow M = R_A X - \frac{PX^2}{2} = \frac{PLX}{2} - \frac{PX^2}{2}$$

$$EIy'' = M \Rightarrow EIy'' = \frac{PLX}{2} - \frac{PX^2}{2} \Rightarrow EIY' = EI\theta = \int \left(\frac{PLX}{2} - \frac{PX^2}{2} \right) dx$$

$$EI\theta = \frac{PLX^2}{4} - \frac{PX^3}{6} + C_1$$

$$EIY = EIf = \int \left(\frac{PLX^2}{4} - \frac{PX^3}{6} + C_1 \right) dx = \frac{PLX^3}{12} - \frac{PX^4}{24} + C_1 X + C_2$$

Les conditions aux limites :

Au point A ; $X = 0$; $f = 0$

$$\frac{PL0^3}{12} - \frac{P0^4}{24} + C_1 * 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

Au point B ; $X = L$; $f = 0$

$$\frac{PL}{12} * L^3 - \frac{P}{24} * L^4 + C_1 * L + 0 = 0 \Rightarrow \frac{PL^4}{12} - \frac{PL^4}{24} + C_1 L = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{PL^3}{24}$$

Donc les expressions de la flèche et la rotation sont :

$$EI\theta = \frac{PLX^2}{4} - \frac{PX^3}{6} - \frac{PL^3}{24}$$

$$EIf = \frac{PLX^3}{12} - \frac{PX^4}{24} = \frac{PL^3 X}{24}$$

- Si on demande de calculer la rotation et la flèche au point ; $x = 0$ m

$$\theta = \frac{-1}{EI} \frac{PL^3}{24}$$

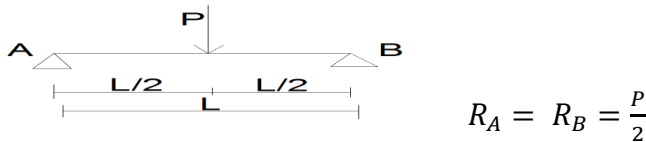
$$f = 0$$

- Si on demande de calculer la rotation et la flèche au point ; $x = \frac{L}{2}$ m

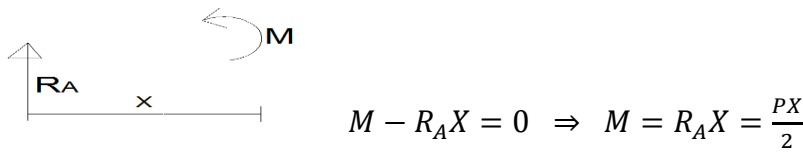
$$\theta = \frac{1}{EI} \left[\frac{PL}{4} * \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{P}{6} \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{PL^3}{24} \right] = 0$$

$$f = \frac{1}{EI} \left[\frac{PL}{12} \left(\frac{L}{2}\right)^3 \downarrow - \frac{P}{24} \left(\frac{L}{2}\right)^4 - \frac{PL^3}{24} * \frac{L}{2} \right] = \frac{-1}{EI} \frac{5PL^4}{384}$$

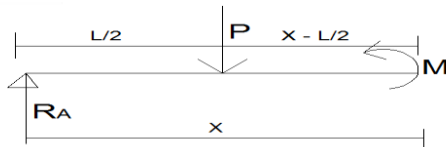
2.



Zone AC



Zone CB



$$M + P \left(X - \frac{L}{2} \right) - R_{AX} = 0 \Rightarrow M + PX - \frac{PL}{2} - \frac{PX}{2} = 0 \Rightarrow M = \frac{PL}{2} - \frac{PX}{2}$$

Zone AC

$$EIy'' = M \Rightarrow EIY'' = \frac{PX}{2} \Rightarrow EIy' = EI\theta_1 = \frac{PX^2}{4} + C_1$$

$$EIY = EI f_1 = \frac{PX^3}{12} + C_1X + C_2$$

Au point A ; $X = 0$; $f = 0$

$$\frac{P \cdot 0^3}{12} + C_1 * 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (1)$$

Zone CB

$$EIy'' = M \Rightarrow EIY'' = \frac{PL}{2} - \frac{PX}{2} \Rightarrow EIY' = EI\theta_2 = \frac{PLX}{2} - \frac{PX^2}{4} + C_3$$

$$EIY = EIf_2 = \frac{PLX^2}{4} - \frac{PX^3}{12} + C_3X + C_4$$

Au point B ; $X = L$; $f = 0$

$$\frac{PL}{4} * L^2 - \frac{P}{12} * L^3 + C_3 * L + C_4 = 0 \Rightarrow \frac{PL^3}{4} - \frac{PL^3}{12} + C_3L + C_4 = 0$$

$$C_4 = \frac{-PL^3}{6} - C_3L \quad (2)$$

Au point $X = L/2$; $\theta_1 = \theta_2$ et $f_1 = f_2$

$$EIy'_1 = EIy'_2 \Rightarrow \frac{P}{4} * \left(\frac{L}{2}\right)^2 + C_1 = \frac{PL}{2} * \frac{L}{2} - \frac{P}{4} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + C_3$$

$$\frac{PL^2}{16} + C_1 = \frac{PL^2}{4} - \frac{PL^2}{16} + C_3 \Rightarrow \frac{PL^2}{16} + C_1 - \frac{PL^2}{4} + \frac{PL^2}{16} - C_3 = 0$$

$$C_1 - C_3 = \frac{PL^2}{8} \quad (3)$$

$$EIf_1 = EIf_2$$

$$\frac{P}{12} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + C_1 * \frac{L}{2} + C_2 = \frac{PL}{4} * \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{P}{12} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + C_3 * \frac{L}{2} + C_4$$

$$\frac{P}{12} * \frac{L^3}{8} + \frac{L}{2} C_1 = \frac{PL^3}{16} - \frac{PL^3}{96} + \frac{L}{2} C_3 - \frac{PL^3}{6} - LC_3$$

$$\frac{PL^3}{8} + \frac{L}{2} C_1 + \frac{L}{2} C_3 = 0 \Rightarrow LC_1 + LC_3 = -\frac{PL^3}{4} \quad (4)$$

Nous avons un système d'équation à résoudre

$$C_2 = 0 \quad (1)$$

$$C_4 = \frac{-PL^3}{6} - C_3L \quad (2)$$

$$C_1 - C_3 = \frac{PL^2}{8} \quad (3)$$

$$C_1 + C_3 = \frac{-PL^2}{4} \quad (4)$$

$$\text{de (3) : } C_1 = C_3 + \frac{PL^2}{8} \quad (5)$$

$$(5) \text{ Dans (4) : } C_3 + \frac{PL^2}{8} + C_3 = \frac{-PL^2}{4} \Rightarrow C_3 = \frac{-3PL^2}{16} \quad (6)$$

$$(6) \text{ Dans (2) : } C_4 = \frac{-PL^3}{6} + \frac{3PL^3}{16} = \frac{PL^3}{48}$$

$$(6) \text{ Dans (5) : } C_1 = \frac{-3PL^2}{16} + \frac{PL^2}{8} = \frac{-PL^2}{16}$$

$$\text{AC : } EI\theta = \frac{PX^2}{4} - \frac{PL^2}{16}$$

$$EI f = \frac{PX^3}{4} - \frac{PL^2X}{16}$$

$$\text{CB : } EI\theta = \frac{PLX}{2} - \frac{PX^2}{4} - \frac{3PL^2}{16}$$

$$EI f = \frac{PLX^2}{4} - \frac{PX^3}{12} - \frac{3PL^2X}{16} - \frac{PL^3}{16}$$

Calculer la flèche et la rotation au point $x = \frac{L}{2}$

$$\text{AC : } \theta = \frac{1}{EI} \left[\frac{P}{4} \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \frac{PL^2}{16} \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{PL^2}{16} - \frac{PL^2}{16} \right] = 0$$

$$f = \frac{1}{EI} \left[\frac{P}{12} \left(\frac{L}{2} \right)^3 - \frac{PL^2}{16} * \frac{L}{2} \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{PL^3}{96} - \frac{PL^3}{32} \right] = \frac{-1}{EI} \frac{PL^3}{48}$$

$$\text{CB : } \theta = \frac{1}{EI} \left[\frac{PL}{2} * \frac{L}{2} - \frac{P}{4} \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \frac{3PL^2}{16} \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{PL^2}{4} - \frac{PL^2}{16} - \frac{3PL^2}{16} \right] = 0$$

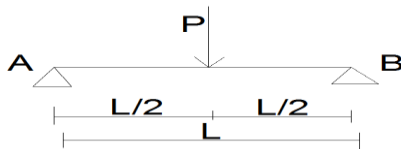
$$f = \frac{1}{EI} \left[\frac{PL}{4} \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \frac{P}{12} \left(\frac{L}{2} \right)^3 - \frac{3PL^2}{16} * \frac{L}{2} + \frac{PL^3}{48} \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{PL^3}{16} - \frac{PL^3}{96} - \frac{3PL^3}{32} + \frac{PL^3}{48} \right]$$

$$f = \frac{1}{EI} \frac{PL^3}{48}$$

NB : voir les conditions aux appuis

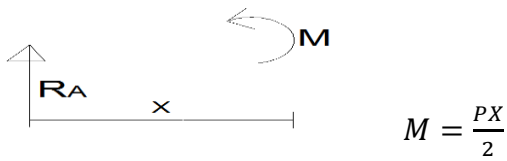
- Aux Appuis simple extrême d'une poutre la flèche est nulle
- En Travée la rotation est nulle

Autre méthode de résolution



$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

ZONE AC = BC



$$EIy'' = M \Rightarrow EIY'' = \frac{PX}{2} \Rightarrow EIy' = EI\theta = \frac{PX^2}{4} + C_1$$

$$EIy = EIf = \frac{PX^3}{12} + C_1X + C_2$$

Les conditions aux appuis sont :

$$Si X = 0; f = 0 \Rightarrow \frac{P \cdot 0^3}{12} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$Si X = \frac{L}{2}; \theta = 0 \Rightarrow \frac{P}{4} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{-PL^2}{16}$$

On a les expressions de la déformation suivantes :

$$EI\theta = \frac{PX^2}{4} - \frac{PL^2}{16}$$

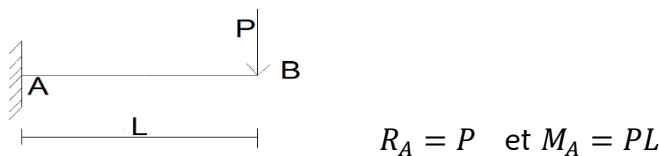
$$EIf = \frac{PX^3}{12} - \frac{PL^2X}{16}$$

Calculer la flèche et la rotation au point $X = \frac{L}{2}$

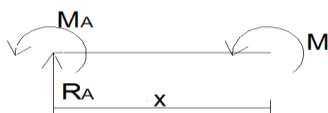
$$\theta = \frac{1}{EI} \left[\frac{P}{4} \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{PL^2}{16} \right] = 0$$

$$f = \frac{1}{EI} \left[\frac{P}{12} \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{PL^2}{16} * \frac{L}{2} \right] = \frac{1}{EI} \left(\frac{PL^3}{96} - \frac{PL^3}{32} \right) = \frac{-1}{EI} \frac{PL^3}{48}$$

3.



Zone AB :



$$M + M_A - R_A X = 0 \Rightarrow M = R_A X - M_A = PX - PL$$

$$EIy'' = M = PX - PL \Rightarrow EIy' = \frac{PX^2}{2} - PLX + C_1$$

$$EIy = \frac{PX^3}{6} - \frac{PLX^2}{2} + C_1X + C_2$$

$$\text{Si } X = 0 ; f = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{Si } X = 0 ; \theta = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$EI\theta = \frac{PX^2}{2} - PLX$$

$$EI f = \frac{PX^3}{6} - \frac{PLX^2}{2}$$

Calculer la flèche et la rotation au point $X = L$

$$\theta = \frac{1}{EI} \left[\frac{P}{2} * L^2 - PL * L \right] = \frac{1}{EI} \left(\frac{PL^2}{2} - PL^2 \right) = -\frac{1}{EI} \frac{PL^2}{2}$$

$$f = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{6} L^3 - \frac{PL^3}{2} \right) = \frac{1}{EI} \left(\frac{PL^3 - 3PL^3}{6} \right) = \frac{-1}{EI} \frac{PL^3}{3}$$

11.5. METHODE DE CASTIGLIANO

Théorème de CASTIGLIANO :

$$1. f = \frac{1}{EI} \int_0^L M * \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

Avec M : expression du moment fléchissant ; P : la charge fictive imposée au point demandé ou la charge qui se situe au point demandé pour évaluer la flèche

$$2. \theta = \frac{1}{EI} \int_0^L M * \frac{\partial M}{\partial m} dx$$

Avec M : expression du moment fléchissant ; m : le moment fictif imposé au point demandé ou le moment qui se situe au point demandé pour évaluer la flèche.

NB : la méthode de Castigliano est plus facile plus pour les charges concentrées.

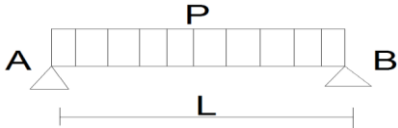
Marche à suivre :

- ✓ Si le point où l'on demande de calculer la déformation la charge s'y trouve, posez cette charge P pour la flèche (ou m pour la rotation) et puis calculez la structure normalement.
- ✓ Si le point où l'on demande de calculer la déformation la charge ne s'y trouve pas, mettez une charge fictive $P = 0$ pour la flèche (ou $m = 0$ pour la rotation) et puis calculez la structure normalement.

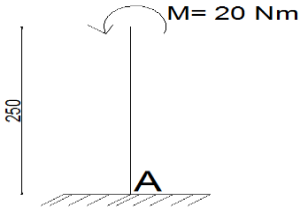
$$\text{Formule général : } f = \sum_{i=1}^n \int_a^b M_i * \frac{\partial M_i}{\partial P} \frac{dx}{E_i I_i} \text{ et } \theta = \sum_{i=1}^n \int_a^b M_i * \frac{\partial M_i}{\partial m} \frac{dx}{E_i I_i}$$

EXERCICES

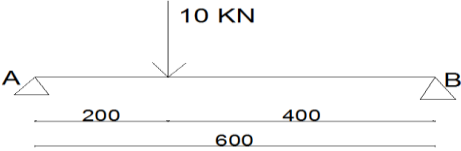
1. Démontre que : $f = \frac{1}{EI} \frac{5PL^4}{384}$ à l'aide du théorème de castigliano



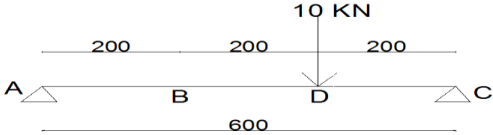
2. Calculer la rotation au sommet de la colonne qui supporte un couple de 20 Nm avec H = 250 cm = 2,5 m



3. Calculer la flèche du l'aide du théorème de castigliano au point B

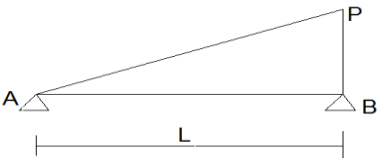


4. Calculer la flèche et la rotation au point B

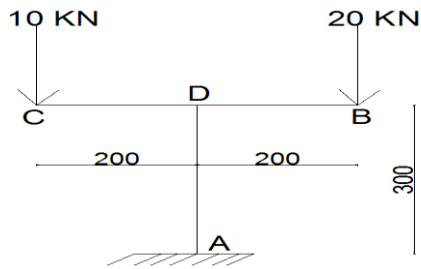


5. Démontrer avec le théorème de Castigliano que

$$\theta_A = \frac{-7PL^3}{360 EI} \text{ et } \theta_B = \frac{PL^3}{45 EI}$$

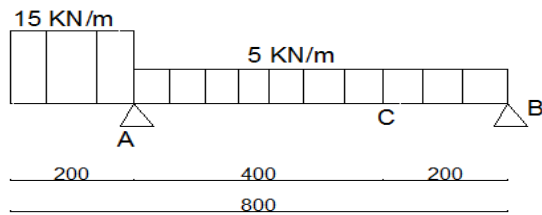


6. Calculer le déplacement Horizontal et la Rotation au point D



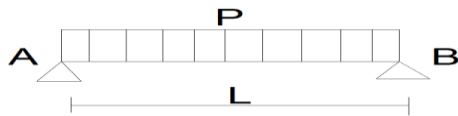
Les dimensions sont en cm

7. Calculer le déplacement au point C

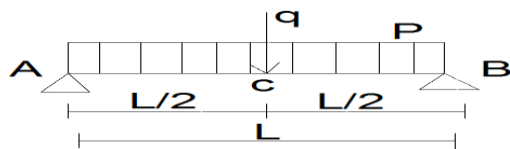


RESOLUTIONS

1.

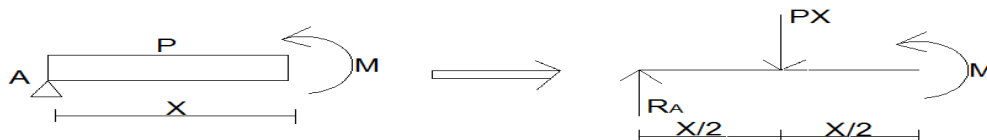


Comme on calcul la flèche au point $X = L/2$, nous allons introduire une charge fictive ($q = 0$) à ce point



$$R_A = R_B = \frac{PL}{2} + \frac{q}{2}$$

Zone AC = Zone BC : $0 \leq X \leq L/2$



$$M + PX * \frac{X}{2} - R_A X = 0 \Rightarrow M = R_A X - \frac{PX^2}{2} = \frac{PLX}{2} + \frac{qX}{2} - \frac{PX^2}{2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial q} = \frac{X}{2}$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial q} = \left(\frac{PLX}{2} + \frac{qX}{2} - \frac{PX^2}{2} \right) * \frac{X}{2} = \frac{PLX^2}{4} + \frac{qX^2}{4} - \frac{PX^3}{4} \text{ or } q = 0$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial q} = \frac{PLX^2}{4} - \frac{PX^3}{4}$$

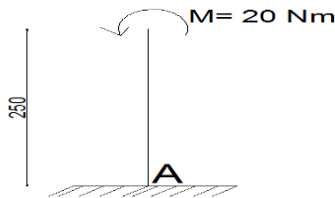
NB : On a deux intégrales parce qu'on a deux zones AC et BC, mais identiques

$$\begin{aligned} EIf &= \int_0^{L/2} \left(\frac{PLX^2}{4} - \frac{PX^3}{4} \right) dx + \int_0^{L/2} \left(\frac{PLX^2}{4} - \frac{PX^3}{4} \right) dx \\ &= 2 \int_0^{L/2} \left(\frac{PLX^2}{4} - \frac{PX^3}{4} \right) dx = 2 \left\{ \frac{PL}{4} \left[\frac{X^3}{3} \right]_0^{L/2} - \frac{P}{4} \left[\frac{X^4}{4} \right]_0^{L/2} \right\} \end{aligned}$$

$$EIf = 2 \left[\frac{PL}{4} * \frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right)^3 - \frac{P}{4} * \frac{1}{4} * \left(\frac{L}{2} \right)^4 \right] = 2 \left[\frac{PL}{4} * \frac{1}{3} * \frac{L^3}{8} - \frac{P}{16} * \frac{L^4}{16} \right]$$

$$EIf = \frac{320PL^4}{24576} \Rightarrow f = \frac{1}{EI} \frac{5PL^4}{384}$$

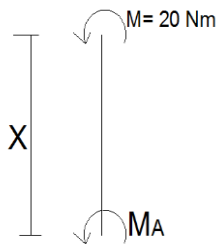
2.



Posons : $m = 20 \text{ Nm}$

$$H_A = V_A = 0 \text{ et } M_A = -m$$

Zone AB: $0 \leq X \leq 2,5$



$$M + M_A = 0 \Rightarrow M = -M_A = -m$$

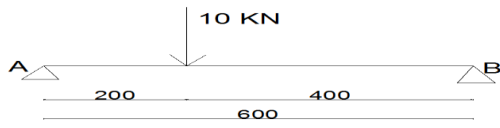
$$\frac{\partial M}{\partial m} = -1$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial m} = -m (-1) = m \text{ or } m = 20 \text{ Nm donc } M * \frac{\partial M}{\partial m} = 20$$

$$\theta = \frac{1}{EI} \int_0^{2,5} M * \frac{\partial M}{\partial m} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{2,5} 20 dx = \frac{1}{EI} 20 [X]_0^{2,5}$$

$$\theta = \frac{1}{EI} 50$$

3.



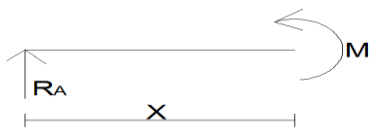
Posons $P = 10 \text{ KN}$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_C - P = 0 \Rightarrow R_A + R_C = P \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow + 2P - 6R_C = 0 \Rightarrow R_C = \frac{2P}{6} = \frac{P}{3} \quad (2)$$

(2) Dans (1): $R_A = P - R_C = P - \frac{P}{3} \Rightarrow R_A = \frac{2P}{3}$

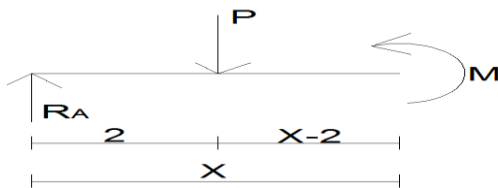
Zone AB : $0 \leq X \leq 2$



$$M - R_A X = 0 \Rightarrow M = R_A X = \frac{2PX}{3} \text{ et } \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{2X}{3}$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{2PX}{3} * \frac{2X}{3} = \frac{4PX^2}{9} \text{ or } P = 10 \text{ donc } M * \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{40X^2}{9}$$

Zone BC : $2 \leq X \leq 6$



$$M + P(X - 2) - R_A X = 0 \Rightarrow M + PX - 2P - \frac{2PX}{3} = 0 \Rightarrow M = 2P - \frac{PX}{3}$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = 2 - \frac{X}{3}$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial P} = \left(2P - \frac{PX}{3}\right) * \left(2 - \frac{X}{3}\right) = \frac{PX^2}{9} - \frac{4PX}{3} + 4P$$

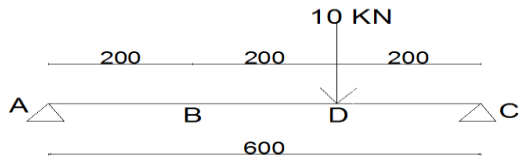
Or $P = 10$ donc $M * \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{20X^2}{9} - \frac{40X}{3} + 40$

Nous aurons : $EI\Delta = \int_0^2 \frac{40X^2}{9} dx + \int_2^6 \left(\frac{20X^2}{9} - \frac{40X}{3} + 40\right) dx$

$$= \frac{40}{9} \left[\frac{X^3}{3}\right]_0^2 + \frac{20}{9} \left[\frac{X^3}{3}\right]_2^6 - \frac{40}{3} \left[\frac{X^2}{2}\right]_2^6 + 40[X]_2^6$$

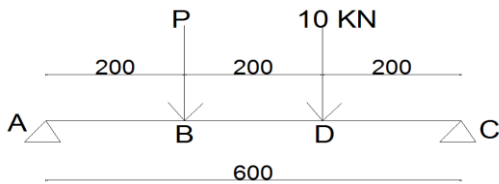
$$= \frac{40}{9} * \frac{8}{3} + \frac{20}{9} \left(\frac{216}{3} - \frac{8}{3}\right) - \frac{40}{3} \left(\frac{36}{2} - \frac{4}{2}\right) + 40(6 - 2) = \frac{1}{EI} * \frac{3100}{27}$$

4.



• Flèche

Introduisons une force fictive $P = 0$ au point B

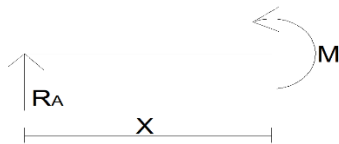


$$\sum R_y = 0 \Rightarrow R_A + R_C - P - 10 \Rightarrow R_A = P + 10 - R_C \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \odot 2P + 4 * 10 - 6R_C = 0 \Rightarrow 2P + 40 - 6R_C = 0 \Rightarrow R_C = \frac{1}{3}P + \frac{20}{3} \quad (2)$$

(2) Dans (1) : $R_A = P + 10 - \frac{1}{3}P - \frac{20}{3} = \frac{2P}{3} + \frac{10}{3}$

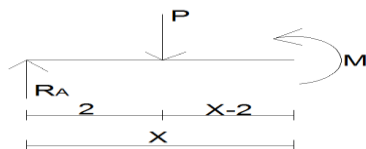
Zone AB : $0 \leq X \leq 2$



$$M - R_A X = 0 \Rightarrow M = R_A X = \frac{2PX}{3} + \frac{10X}{3} \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{2X}{3}$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial P} = \left(\frac{2PX}{3} + \frac{10X}{3} \right) * \left(\frac{2X}{3} \right) = \frac{4PX^2}{9} + \frac{20X^2}{9} \text{ or } P = 0 \text{ donc } M * \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{20X^2}{9}$$

Zone BD : $2 \leq X \leq 4$



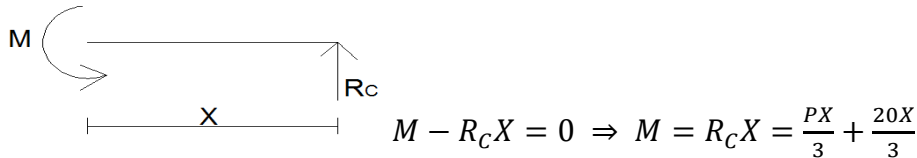
$$M + P(X - 2) - R_A X = 0 \Rightarrow M + PX - 2P - \frac{2PX}{3} - \frac{10X}{3} = 0$$

$$M = \frac{10X}{3} + 2P - \frac{PX}{3} \text{ avec } \frac{\partial M}{\partial P} = \left(2 - \frac{X}{3} \right)$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial P} = \left(\frac{10X}{3} + 2P - \frac{PX}{3} \right) * \left(2 - \frac{X}{3} \right) = \frac{20X}{3} + 4P - \frac{2PX}{3} - \frac{10X^2}{9} - \frac{2PX}{3} + \frac{PX^2}{9}$$

Or $P = 0$ donc $M * \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{20X}{3} - \frac{10X^2}{9}$

Zone CD : $0 \leq X \leq 2$



$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{X}{3}$$

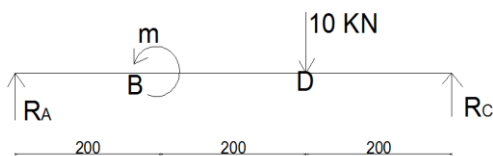
$$M * \frac{\partial M}{\partial P} = \left(\frac{PX}{3} + \frac{20X}{3} \right) * \frac{X}{3} = \frac{PX^2}{9} + \frac{20X^2}{9} \quad \text{or } P = 0 \text{ donc } M * \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{20X^2}{9}$$

$$\begin{aligned} EI\Delta &= \int_0^2 \frac{20X^2}{9} dx + \int_2^4 \left(\frac{20X}{3} - \frac{10X^2}{9} \right) dx + \int_0^2 \frac{20X^2}{9} dx \\ &= 2 \int_0^2 \frac{20X^2}{9} dx + \int_2^4 \left(\frac{20X}{3} - \frac{10X^2}{9} \right) dx = \frac{40}{9} \left[\frac{X^3}{3} \right]_0^2 + \frac{20}{3} \left[\frac{X^2}{2} \right]_2^4 - \frac{10}{9} \left[\frac{X^3}{3} \right]_2^4 \\ &= \frac{40}{9} * \frac{9}{3} + \frac{20}{3} * \left(\frac{16}{2} - \frac{4}{2} \right) - \frac{10}{9} \left(\frac{64}{3} - \frac{8}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{1}{EI} \frac{880}{27}$$

- La rotation

Introduisons un moment fictif ($m = 0$) au point B

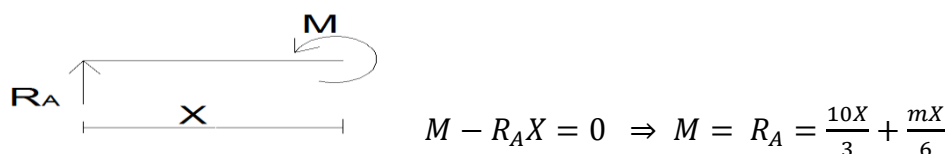


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_C - 10 = 0 \Rightarrow R_A = 10 - R_C \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \odot -m + 10 \cdot 4 - 6R_C = 0 \Rightarrow 6R_C = -m + 40 \Rightarrow R_C = \frac{-m}{6} + \frac{20}{3} \quad (2)$$

(2) Dans (1): $R_A = 10 - \frac{20}{3} + \frac{m}{6} = \frac{10}{3} + \frac{m}{6}$

Zone AB : $0 \leq X \leq 2$

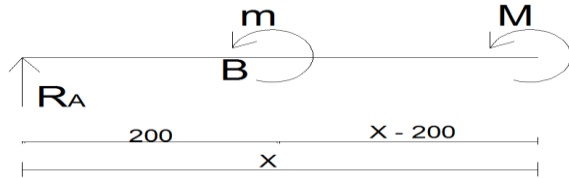


$$\frac{\partial M}{\partial m} = \frac{X}{6}$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial m} = \left(\frac{10X}{3} + \frac{mX}{6} \right) * \frac{X}{6} = \frac{10X^2}{18} + \frac{mX^2}{36}$$

$$\text{Avec } m = 0 ; M * \frac{\partial M}{\partial m} = \frac{10X^2}{18} = \frac{5X^2}{9}$$

Zone BD : $2 \leq X \leq 4$



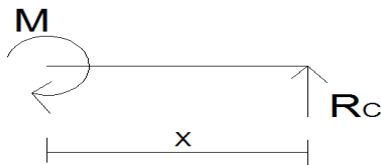
$$M + m - R_A X = 0 \Rightarrow M = R_A X - m$$

$$M = \frac{10X}{3} + \frac{mX}{6} - m \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial m} = \frac{X}{6} - 1$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial m} = \left(\frac{10X}{3} + \frac{mX}{6} - m \right) * \left(\frac{X}{6} - 1 \right) = \frac{10X^2}{18} + \frac{mX^2}{36} - \frac{mX}{6} - \frac{10X}{3} - \frac{mX}{6} + m$$

$$\text{Avec } m = 0 ; M * \frac{\partial M}{\partial m} = \frac{10X^2}{18} - \frac{10X}{3} = \frac{5X^2}{9} - \frac{10X}{3}$$

Zone CD : $0 \leq X \leq 2$



$$M - R_C X = 0 \Rightarrow M = R_C X = \frac{-mX}{6} + \frac{20X}{3} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial m} = \frac{-X}{6}$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial m} = \left(\frac{-mX}{6} + \frac{20X}{3} \right) * \left(\frac{-X}{6} \right) = \frac{mX^2}{36} - \frac{20X^2}{18}$$

$$\text{Avec } m = 0 ; M * \frac{\partial M}{\partial m} = \frac{-20X^2}{18} = \frac{-10X^2}{9}$$

$$EI\theta = \int_0^2 \frac{5X^2}{9} dx + \int_2^4 \left(\frac{5X^2}{9} - \frac{10X}{3} \right) dx + \int_0^2 \frac{-10X^2}{9} dx$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{X^3}{3} \right]_0^2 + \frac{5}{9} \left[\frac{X^3}{3} \right]_2^4 - \frac{10}{3} \left(\frac{X^2}{2} \right)_2^4 - \frac{10}{9} \left[\frac{X^3}{3} \right]_0^2$$

$$= \frac{5}{9} \left(\frac{8}{3} \right) + \frac{5}{9} \left(\frac{64}{3} - \frac{8}{3} \right) - \frac{10}{3} \left(\frac{16}{2} - \frac{4}{2} \right) - \frac{10}{9} \left(\frac{8}{3} \right) = \frac{45}{27} + \frac{280}{27} - \frac{60}{3} - \frac{90}{27}$$

$$\theta = -\frac{1}{EI} \frac{265}{27}$$

11.6 Méthode de Travail Virtuel

Cette peut encore s'appeler méthode de la force unitaire ou méthode de Travail

Formule :

$$1. \Delta = \sum_{i=1}^m \frac{1}{E_i I_i} \int_0^L m_i \cdot M_i dx$$

Avec M : Moment due à la charge réel

m : Moment due à la charge fictif ($P = 1$) unitaire placé au point où l'on veut calculer la deflexion

$$2. \theta = \sum_{i=1}^m \frac{1}{EI} \int_0^L m_i M_i dx$$

Avec M : Moment due à la charge réel

m : Moment due au couple fictif ($m = 1$) unitaire placé au point où l'on veut calculer la rotation.

Principe :

- Introduire à l'endroit où on veut calculer le déplacement une charge unitaire $P = 1KN$ s'il on veut évaluer le déplacement et $P = 1KNm$; s'il on veut calculer la rotation ;
- Faites l'étude complète d'une structure
- Etablir l'expression des moments pour tous les tronçons

NB : La Méthode de Travail Virtuel est la mieux indiquée pour étudier n'importe quelle structure portique, poutre, et treilles.

$$3. \Delta = \frac{N_i m_i L_i}{E_i A_i}; \text{ la formule du treillis}$$

N : Charge réel (effort dans les barres due à la charge réel)

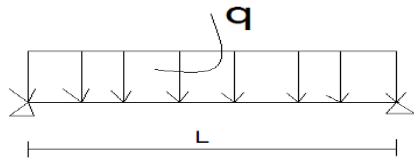
n : Effort dans les Barre due à la charge fictif unitaire ;

L : Longueur des Barres

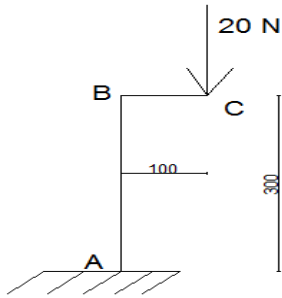
A : Surface

EXERCICES

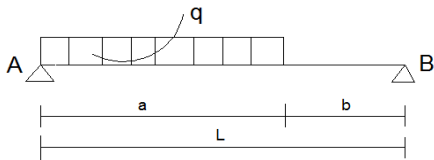
Exemple 1. Démontrer à l'aide de la méthode du Travail virtuel que : $f = \frac{1}{EI} \frac{5PL^4}{384}$ au point $L/2$ de la poutre suivante.



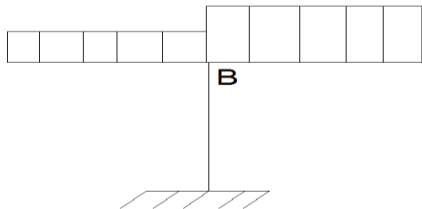
Exemple 2. Calculer Δ_C et θ_B de la console suivant



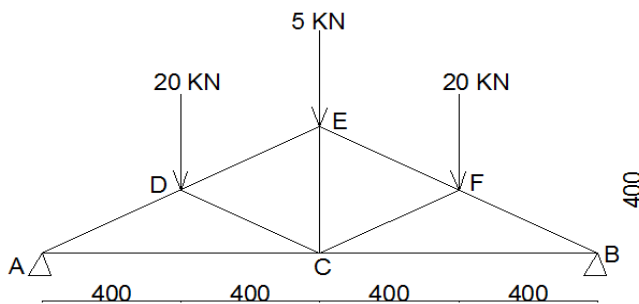
Exemple 3. Démontrer que $\theta_B = \frac{-qa^2(2L-b)^2}{24LEI}$ de la poutre suivante, à l'aide du théorème de Travail virtuel



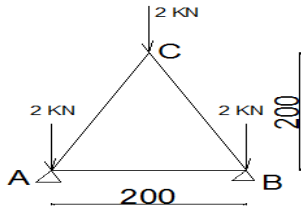
Exemple 4. Calculer le déplacement de Nœud B, avec les charges au choix et les dimensions



Exemple 5. Calculer la flèche du Treillis suivant au point C



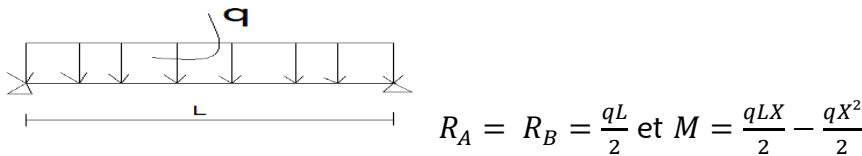
Exemple 6. Calculer la flèche du treillis suivant à l'aide du théorème de travail virtuel au point C.



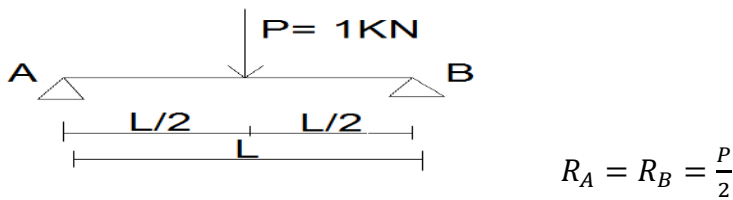
RESOLUTIONS

Exemple 1.

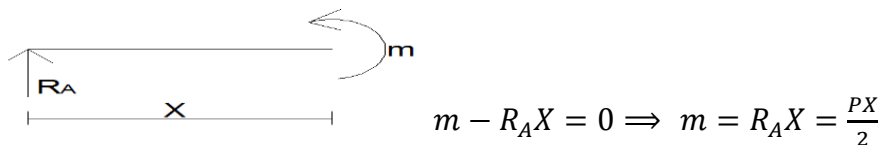
- Chargement Réel.



- Chargement fictif



Zone AB = Zone BC : $0 \leq X \leq L/2$



On aura : $EI\Delta = \int_0^{L/2} mM dx + \int_0^{L/2} mM dx = 2 \int_0^{L/2} mM dx$

$EI\Delta = 2 \int_0^{L/2} \left(\frac{qPLX^2}{4} - \frac{qPX^3}{4} \right) dx$ Avec $P = 1$

$EI\Delta = 2 \int_0^{L/2} \left(\frac{qLX^2}{4} - \frac{qX^3}{4} \right) dx = 2 \left\{ \frac{qL}{4} \left[\frac{X^3}{3} \right]_0^{L/2} - \frac{q}{4} \left[\frac{X^4}{4} \right]_0^{L/2} \right\}$

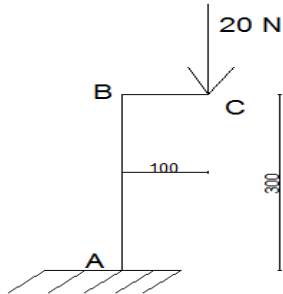
$= 2 \left[\frac{qL}{4} * \frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right)^3 - \frac{q}{4} * \frac{1}{4} \left(\frac{L}{2} \right)^4 \right]$

$= 2 \left[\frac{qL}{12} * \frac{L^3}{8} - \frac{q}{16} * \frac{L^4}{16} \right] = 2 \left[\frac{qL^4}{96} - \frac{qL^4}{256} \right] = \frac{qL^4}{48} - \frac{qL^4}{128} = \frac{1}{EI} \frac{5PL^4}{384}$

Exemple 2.

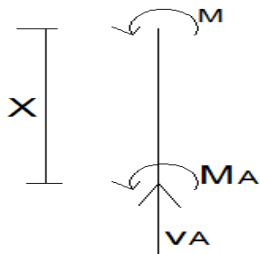
A . La flèche au point C

- Structure réelle



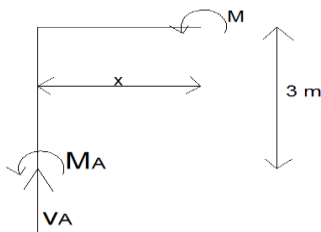
$$H_A = 0 ; V_A = 20 \text{ N et } M_A = 20 \text{ N}$$

Zone AB : $0 \leq X \leq 3$



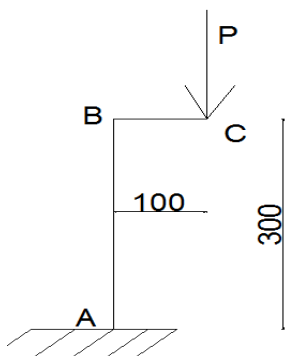
$$M + M_A = 0 \Rightarrow M = -M_A = -20$$

Zone BC : $0 \leq X \leq 1$



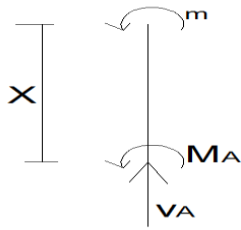
$$M - V_A X + M_A = 0 \Rightarrow M = V_A X - M_A = 20X - 20$$

- Structure fictive : $P = 1 \text{ N}$ au point C



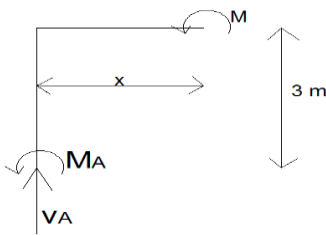
$$V_A = P \text{ et } M_A = P$$

Zone AB : $0 \leq X \leq 3$



$$m + M_A = 0 \Rightarrow m = -M_A = -P$$

Zone BC : $0 \leq X \leq 1$



$$m + M_A - V_A X = 0 \Rightarrow m = V_A X - M_A = PX - P$$

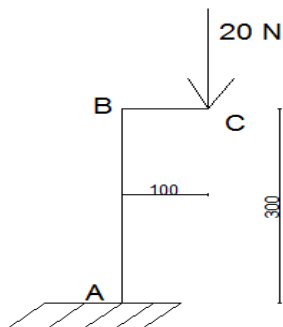
$$\begin{aligned} EI\Delta_c &= \int_0^3 m * M dx + \int_0^1 m * M dx \\ &= \int_0^3 (-P) * (-20) dx + \int_0^1 (PX - P) * (20X - 20) dx \\ &= \int_0^3 20P dx + \int_0^1 (20PX^2 - 20PX - 20PX + 20P) dx \end{aligned}$$

Avec $P = 1N$

$$\begin{aligned} EI\Delta_c &= \int_0^3 20 dx + \int_0^1 (20X^2 - 40X + 20) dx \\ &= 20[X]_0^3 + 20 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - 40 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + 20[X]_0^1 \\ &= 20(3) + \frac{20}{3} - \frac{40}{2} + 20 \Rightarrow EI\Delta_c = \frac{1}{EI} \frac{200}{3} \end{aligned}$$

B. La Rotation au point B

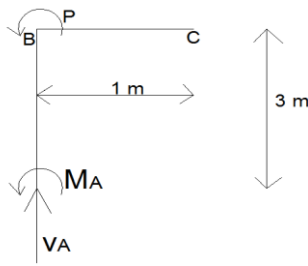
- Structure REELLE



$$H_A = 0 ; V_A = 20 N \text{ et } M_A = 20 Nm$$

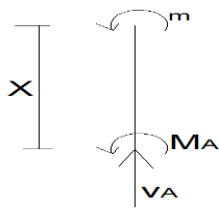
Zone AB : $M = -20$ et Zone BC : $M = 20X - 20$

- STRUCTURE FICTIVE Avec $P = 1 \text{ Nm}$ au point B



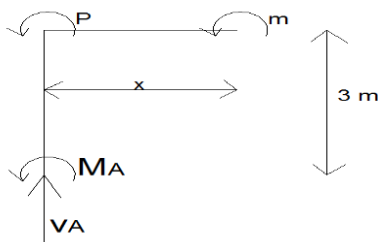
$$V_A = 0 \text{ et } M_A + P = 0 \Rightarrow M_A = -P$$

Zone AB : $0 \leq X \leq 3$



$$m + M_A = 0 \Rightarrow m = -M_A = P$$

Zone BC : $0 \leq X \leq 1$



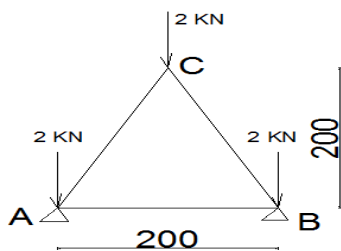
$$m + P + M_A - V_A X = 0 \Rightarrow m = V_A X - P - M_A \Rightarrow m = -P + P = 0$$

$$EI\theta_B = \int_0^3 (-20) * P dx + \int_0^1 (20X - 20) * 0 dx = \int_0^3 -20P dx$$

$$\text{Avec } P = 1 ; EI\theta_B = \int_0^3 -20 dx = -20[X]_0^3 = -60 \Rightarrow \theta_B = -\frac{60}{EI}$$

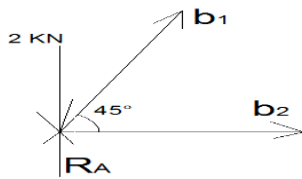
Exemple 6.

- Chargement réel



$$R_A = R_B = 3 \text{ KN}$$

Nœud A :



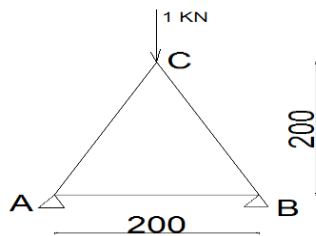
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow b_2 + b_1 \cos 45 = 0 \Rightarrow b_2 = -b_1 \cos 45 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - 2 + b_1 \sin 45 = 0 \Rightarrow b_1 = \frac{-1}{\sin 45} = -\sqrt{2} b_1 = -1,414 \text{ KN} \quad (2)$$

(2) Dans (1) : $b_2 = -b_1 \cos 45 = 1,414 \cos 45 = 0,999 \text{ KN}$

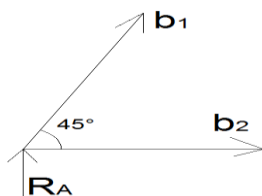
Par Symétrie : $b_1 = b_3 = -1,414$

- Chargement fictif



$$R_A = R_B = \frac{1}{2} = 0,5$$

Nœud A



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow b_2 + b_1 \cos 45 = 0 \Rightarrow b_2 = -b_1 \cos 45$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow b_1 \sin 45 + R_A = 0 \Rightarrow b_1 = \frac{-R_A}{\sin 45} = \frac{-0,5}{\sin 45} \Rightarrow b_1 = -0,707 \quad (2)$$

(2) Dans (1) : $b_2 = 0,707 \cos 45 = 0,499$

Par Symétrie : $b_1 = b_3 = -0,707$

Barre	L_i	N_i	n_i	$N_i L_i n_i / EA$
1	2,8	-1,44	-0,707	2,85
2	2	0,999	0,499	0,988
3	2,8	-1,44	-0,707	2,85
				6,688/EA

11.7. TRAVAIL REEL ou TRAVAIL ET ENERGIE

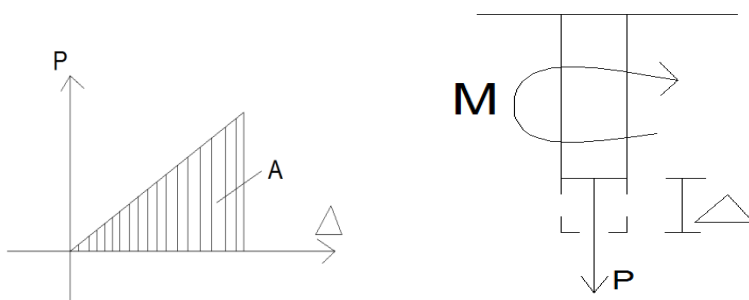
1. **Principe** : le système des forces et des moments extérieurs appliqués produit un Travail externe W_E .

Ce Travail est emmagasiné par la structure sous forme d'énergie potentiel interne W_I ($W_E = W_I$)

2. Travail externe et potentiel Interne

a) Travail externe : W_E

Soit une barre sollicitée par un effort de Traction croissant graduellement de 0 à P . Le travail externe peut être calculé par la surface formée entre l'axe de Δ et celui de P



$$W_E = \frac{P \cdot \Delta}{2} \quad (1)$$

Si à la place de P on avait un couple M, Δ allant correspondre à une rotation et le travail externe produit allait équivaloir

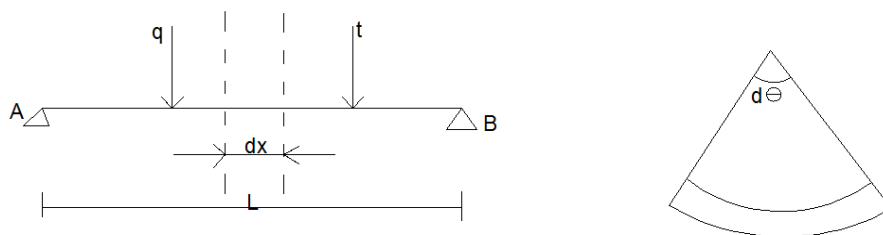
$$W_E = \frac{m \cdot \theta}{2} \quad (2)$$

b) Potentiel Interne : W_I

on sait que à Traction : $\Delta = \frac{P \cdot L}{A \cdot E} \quad (3)$

(3) Dans (1) : $W_I = \frac{P}{2} \cdot \frac{PL}{AE} = \frac{P^2 L}{2AE} \quad (4)$

- Cas d'une poutre : Considérons un petit tronçon de l'angle de rotation



Partant de (2) : $dW = \frac{M}{2} d\theta$ (5) Or $d\theta = \frac{M}{EI} dx$ (6)

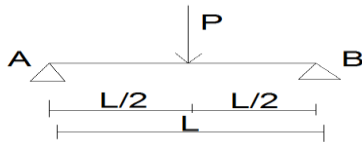
(6) Dans (5) : $dW_I = \frac{M^2}{2EI} dx$

D'où, l'énergie installée sur toute la poutre : $W_I = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$

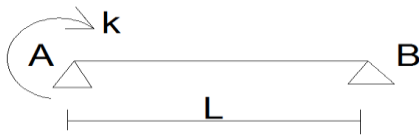
- ❖ Pour le calculer de la déformation, on utilise le principe : $W_E = W_I$
- ❖ Pour le cas de déplacement : $\frac{PA}{2} = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$
- ❖ Pour le cas de rotation : $\frac{m\theta}{2} = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$

EXERCICES

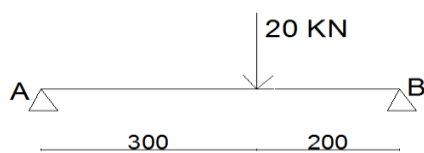
Exemple 1. Démontrer avec ce principe de travail et énergie que $f = \frac{-PL^3}{48EI}$ de la poutre suivant



Exemple 2.

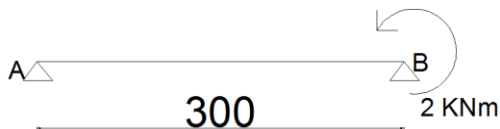


Exemple 3. Calculer la flèche de cette poutre



$$E = 200\,000 \text{ MPA} \text{ et } I = 10^4 \text{ Cm}^4$$

Exemple 4. Calculer la rotation de l'appui B



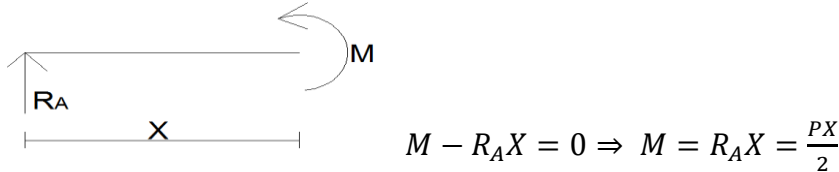
RESOLUTIONS

Exemple 1.

$$R_A = R_B = P/2$$

$$W_E = \frac{P\Delta}{2} \text{ et } W_I = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

Zone AC = BC : 0 ≤ X ≤ L/2



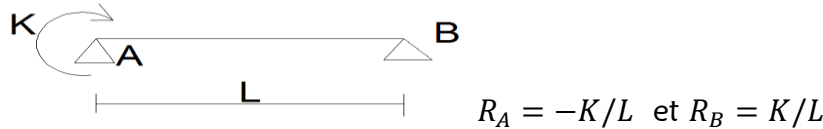
$$M^2 = \left(\frac{PX}{2}\right)^2 = \frac{P^2 X^2}{4}$$

$$W_E = W_I \Rightarrow \frac{P\Delta}{2} = \int_0^{L/2} \frac{P^2 X^2}{4} * \frac{1}{2} \frac{dx}{EI} + \int_0^{L/2} \frac{P^2 X^2}{4} * \frac{1}{2} \frac{dx}{EI}$$

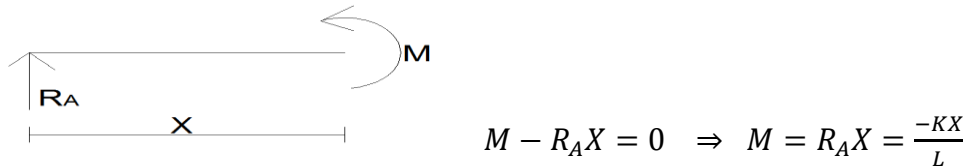
$$\frac{P\Delta}{2} = 2 \int_0^{L/2} \frac{P^2 X^2}{8} \frac{dx}{EI} = \frac{2P^2}{8} \int_0^{L/2} X^2 \frac{dx}{EI} = \frac{2P}{8EI} \left[\frac{X^3}{3}\right]_0^{L/2} = \frac{2P}{8} * \frac{1}{3} \left[\frac{L}{2}\right]^3 * \frac{1}{EI}$$

$$\frac{P\Delta}{2} = \frac{2P^2}{24} * \frac{L^3}{8EI} = \frac{P^2 L^3}{96EI} \Rightarrow \Delta = \frac{2}{P} * \frac{P^2 L^3}{96EI} \Rightarrow \Delta = \frac{PL^3}{48EI}$$

Exemple 2.



Zone AB : 0 ≤ X ≤ L



$$M^2 = \frac{K^2 X^2}{L^2}$$

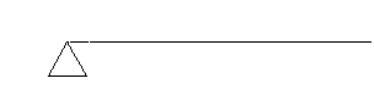
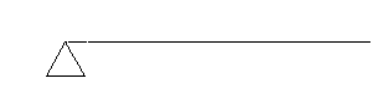
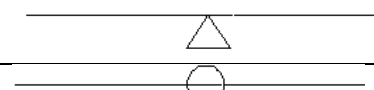

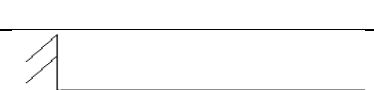
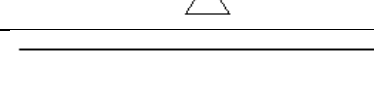
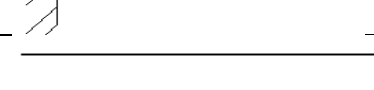

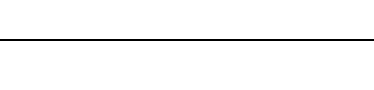

$$\frac{K\theta}{2} = \int_0^L \frac{K^2 X^2}{L^2} * \frac{1}{2} * \frac{dx}{EI} \Rightarrow \frac{K\theta}{2} = \frac{K^2}{2L^2} \left[\frac{X^3}{3}\right]_0^L * \frac{1}{EI} \Rightarrow \frac{K\theta}{2} = \frac{K^2 L^3}{6L^2} * \frac{1}{EI}$$

$$\theta = \frac{2}{K} * \frac{K^2 L^3}{6L^2} * \frac{1}{EI} \Rightarrow \theta = \frac{KL}{3EI}$$

11.8. METHODE DE MOMENT SECONDAIRE METHODE DE LA POUTRE CONJUGUEE

Cette méthode consiste à considérer le Diagramme des moments fléchissant de la poutre réelle comme une charge fictive agissant sur une poutre fictive.

Règles de Construction de la poutre fictive.

N°	Poutre réelle	Poutre fictive
1		
2		
3		
4		
5		

En résumé :

- Un appui simple extrême dans la poutre réelle ne change pas dans la poutre fictive
- Un appui simple intermédiaire de la poutre réelle devient une articulation dans la poutre fictive
- Une articulation intermédiaire dans la poutre réelle devient un appui simple dans la poutre fictive
- Un encastrement dans la poutre réelle devient une extrémité libre dans la poutre fictive et vice versa.

Principe :

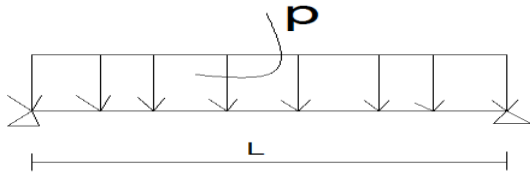
- Dans la poutre réelle, on calcule le diagramme de moment
- On applique les conditions aux appuis décrit ci haut dans la poutre fictive avec le diagramme de moment de la poutre réelle
- On calcul la nouvelle structure de la poutre fictive
- La rotation en un point donné de la poutre est donnée par les réactions d'appuis ou l'effort tranchant en ce point de la poutre fictive
- La flèche en un point de la poutre est égale à la valeur du moment en ce point de la poutre fictive

NB :

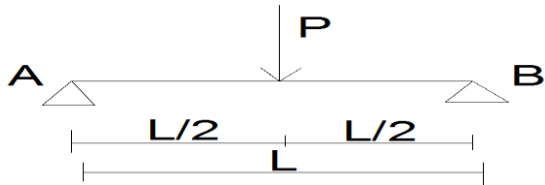
- Si le diagramme de moment est – les charges sont ascendantes ↑↑
- Si le diagramme de moment est + les charges sont descendantes ↓↓

EXERCICES

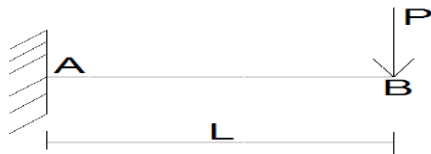
Exemple 1. Calculer la flèche au point $X = L/2$ et les rotations aux points A et B de la poutre suivante



Exemple 2. Calculer la flèche à mi portée et la rotation à mi portée et au point A.

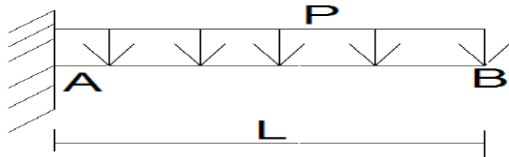


Exemple 3. Calculer la flèche et la rotation au point B

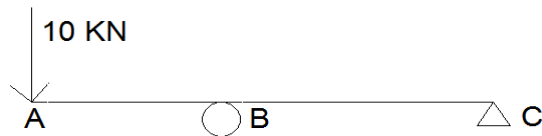


Exemple 4. Démontrer avec le théorème de la poutre conjugué que

$\theta_B = \frac{P L^3}{6 EI}$ et $f_B = \frac{-P L^4}{8 EI}$ Du porte-à-faux suivant



Exemple 5. Calculer θ_A , θ_B et Δ_A de la poutre suivante

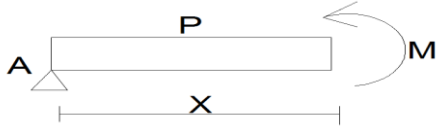


RESOLUTIONS

Exemple 1.

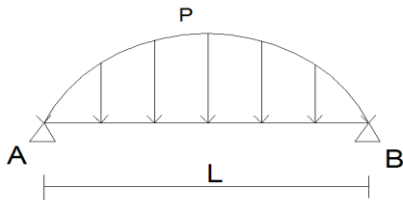
$$R_A = R_B = \frac{PL}{2}$$

ZONE AB : $0 \leq X \leq L$



$$M = \frac{PLX}{2} - \frac{PX^2}{2}$$

Le diagramme avec la poutre fictive



$$p(\alpha) = \frac{1}{EI} \left(\frac{PL\alpha}{2} - \frac{P\alpha^2}{2} \right)$$

$$R_A = R_B = \int_0^L p(\alpha) \left(1 - \frac{\alpha}{L} \right) d\alpha = \int_0^L \frac{1}{EI} \left(\frac{PL\alpha}{2} - \frac{P\alpha^2}{2} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{L} \right) d\alpha$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{PL\alpha}{2} - \frac{P\alpha^2}{2} - \frac{P\alpha^2}{2L} + \frac{P\alpha^3}{2L} \right) d\alpha$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{PL}{2} \left(\frac{\alpha^2}{2} \right)_0^L - P \left(\frac{\alpha^3}{3} \right)_0^L + \frac{P}{2L} \left(\frac{\alpha^4}{4} \right)_0^L \right) = \frac{1}{EI} \left(\frac{PL}{2} * \frac{L^2}{2} - \frac{PL^3}{3} + \frac{PL^4}{8L} \right) = \frac{1}{EI} \frac{PL^3}{24}$$

$$M = R_A X - \int_0^X p(\alpha) (X - \alpha) d\alpha = \frac{PL^3 X}{24 EI} - \int_0^X \frac{1}{EI} \left(\frac{PL\alpha}{2} - \frac{P\alpha^2}{2} \right) (X - \alpha) d\alpha$$

$$= \frac{PL^3 X}{24 EI} - \int_0^X \frac{1}{EI} \left(\frac{PL\alpha X}{2} - \frac{PL\alpha^2}{2} - \frac{P\alpha^2 X}{2} + \frac{P\alpha^3}{2} \right) d\alpha$$

$$= \frac{PL^3 X}{24 EI} - \frac{1}{EI} \left(\frac{PLX}{2} \left(\frac{\alpha^2}{2} \right)_0^X - \frac{PL}{2} \left(\frac{\alpha^3}{3} \right)_0^X - \frac{PX}{2} \left(\frac{\alpha^2}{2} \right)_0^X + \frac{P}{2} \left(\frac{\alpha^4}{4} \right)_0^X \right)$$

$$= \frac{PL^3 X}{24 EI} - \frac{1}{EI} \left(\frac{PLX}{2} * \frac{X^2}{2} - \frac{PL}{2} * \frac{X^3}{3} - \frac{PX}{2} * \frac{X^2}{2} + \frac{P}{2} * \frac{X^4}{4} \right) = \frac{PL^3 X}{24 EI} - \frac{PLX^3}{12 EI} + \frac{PX^4}{24 EI}$$

La flèche au point $X = L/2$

$$M = f = \Delta = \frac{PL^3}{24 EI} * \frac{L}{2} - \frac{PL}{12 EI} * \left(\frac{L}{2} \right)^3 + \frac{P}{24 EI} \left(\frac{L}{2} \right)^4 = \frac{5 PL^4}{384 EI}$$

La rotation au point A = au point B : $\theta_A = R_A = \theta_B = R_B = \frac{PL^3}{24 EI}$

Ou soit pour avoir la rotation par l'effort tranchant

$$T = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{PL^3X}{24EI} - \frac{PLX^3}{12EI} + \frac{PX^4}{24EI} \right) = \frac{PL^3}{24EI} - \frac{PLX^2}{4EI} + \frac{PX^3}{6EI}$$

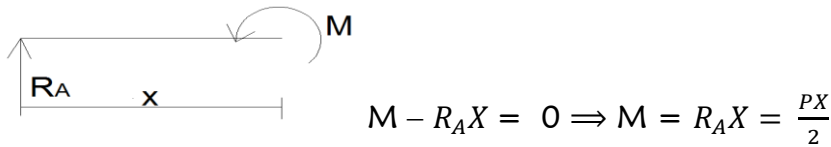
La rotation au point A : $x = 0 \Rightarrow \theta_A = \frac{PL^3}{24EI}$

La rotation au point B : $x = L \Rightarrow \theta_B = \frac{PL^3}{24EI}$

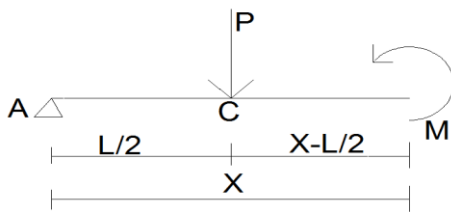
Exemple 2.

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

Zone AC : $0 \leq X \leq L/2$



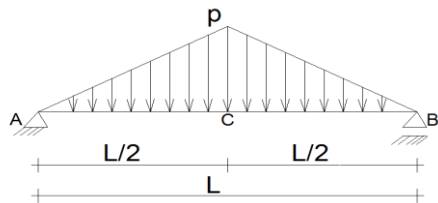
Zone CB : $L/2 \leq X \leq L$



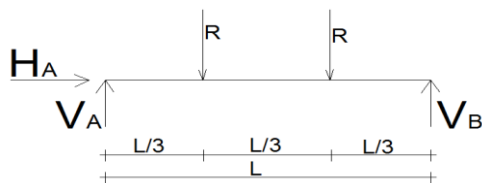
$$M + P \left(X - \frac{L}{2} \right) - R_A X = 0 \Rightarrow M + PX - \frac{PL}{2} - \frac{PX}{2} = 0 \Rightarrow M = \frac{PL}{2} - \frac{PX}{2}$$

Diagramme avec la poutre fictive

$$P = \frac{1}{EI} \left(\frac{PL}{2} - \frac{P\alpha}{2} \right)$$



Partie AC = partie CB : $R = \frac{BH}{2} = \frac{\frac{P\alpha}{2} * \frac{L}{2}}{2}$ or $\alpha = \frac{L}{2} \Rightarrow R = \frac{\frac{P}{2} * \frac{L}{2} * \frac{L}{2}}{2} = \frac{PL^2}{16EI}$



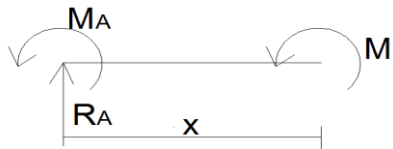
Par symétrie : $R_A = \theta_A = \frac{P L^2}{16 EI}$

$\theta_C = R_C = R_A - \frac{P L^2}{16 EI} = \frac{P L^2}{16 EI} - \frac{P L^2}{16 EI} = 0$

$f = M_C = \frac{P L^2}{16 EI} * \frac{L}{6} - R_A * \frac{L}{2} = \frac{P L^3}{96 EI} - \frac{P L^2}{16 EI} * \frac{L}{2} = \frac{P L^3}{48 EI}$

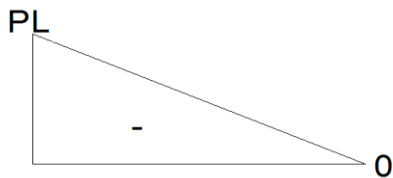
Exemple 3.

$R_A = P$ et $M_A = PL$

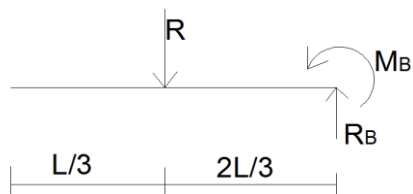
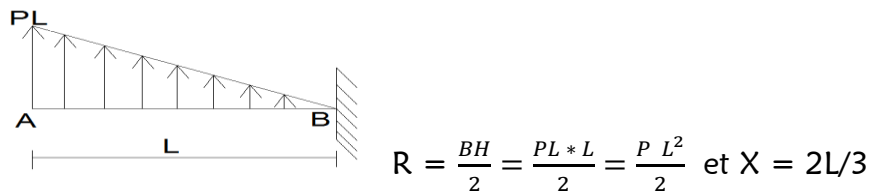


$M + M_A - R_A X = 0 \Rightarrow M = R_A X - M_A = P X - PL$

Si $x = 0$; $M = PL$ et si $x = L$; $M = 0$



Poutre fictive avec la charge du diagramme



$R_B = \theta_B = \frac{P L^2}{2 EI}$ et $f_B = M_B = -\frac{P L^2}{2} * \frac{2L}{3} = -\frac{P L^3}{3 EI}$

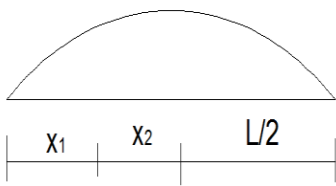
11.9. METHODE SIMPLIFIEE OU METHODE GEOMETRIQUE OU METHODE PAR L'AIRES DE MOMENT OU THEOREME DE MOMENT DE SURFACE

Cette forme des méthodes demande une notion sur des surfaces et le centre de gravité. Généralement les diagrammes des moments décrivent les figures géométriques suivantes : Carré, rectangle, triangle, parabole et demi parabole

$$S_{\text{carré}} = BH \text{ et } X = \frac{B}{2}; S_{\text{rectangle}} = BH \text{ et } X = \frac{B}{2}$$

$$S_{\text{triangle}} = \frac{BH}{2} \text{ et } X = \frac{2B}{3}; S_{\text{parabole}} = \frac{BH}{3} \text{ et } X = \frac{3B}{4}$$

$$S_{\text{semi parabole}} = \frac{2BH}{3} \text{ et } X_1 = \frac{5L}{18}; X_2 = \frac{3L}{16}$$



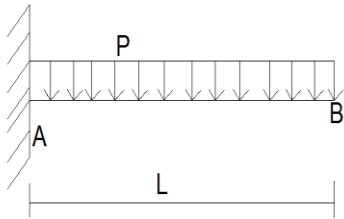
Cette méthode est appliquée plus aisément pour des poutres avec des charges concentrées, car les diagrammes de moment sont formés des lignes droites.

Principe :

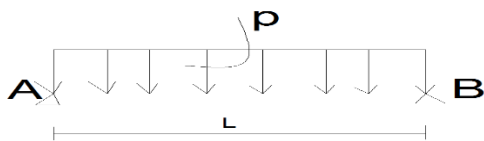
- Faites l'étude complète de la structure jusqu'à calculer le moment (effort intérieur)
- Tracer le diagramme $\frac{M}{EI}$
- La rotation est donnée par la surface formée par le diagramme $\frac{M}{EI}$
- La flèche, c'est le produit de la surface formée par le diagramme $\frac{M}{EI}$ avec le centre de gravité de cette surface
- Si possible sectionner la surface du diagramme $\frac{M}{EI}$ à des figures géométriques élémentaires pour faciliter le calcul
- Si possible dessiner séparément le diagramme pour chacune des charges, et ensuite on détermine pour chacune la flèche et la rotation

EXERCICES

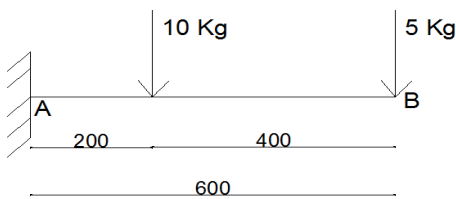
Exemple 1. Calculer la flèche au point B et la rotation de la poutre suivante



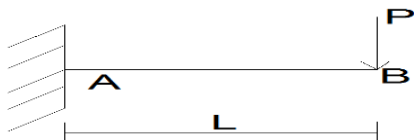
Exemple 2. Calculer la flèche à mi portée et la rotation au point A de la poutre suivante



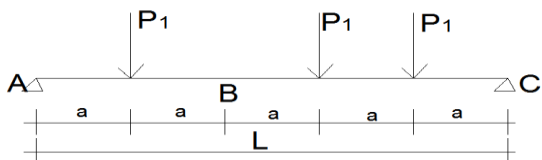
Exemple 3. Calculer la flèche et la rotation au point B et C



Exemple 4. Déterminer la pente et la déflexion au point B de la poutre suivante

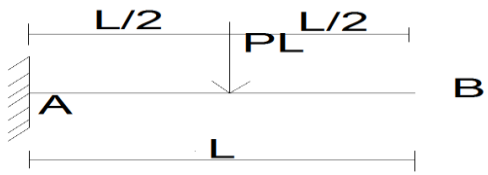


Exemple 5. Déterminer la pente et la déflexion au point B de la poutre suivante



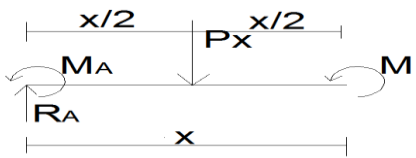
RESOLUTIONS

Exemple 1. $R = PL$ et $X = L/2$



$$R_A = PL \text{ et } M_A = \frac{PL^2}{2}$$

Zone AB :

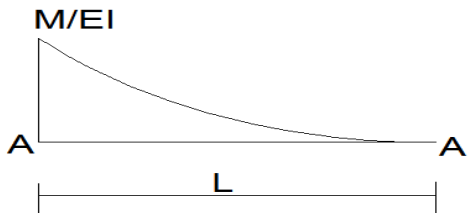


$$M + Px * \frac{x}{2} - R_A x + M_A = 0 \Rightarrow M = - Px * \frac{x}{2} + R_A x - M_A$$

$$M = PLx - \frac{PL^2}{2} - \frac{Px^2}{2}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow M = - \frac{PL^2}{2} ; \text{ si } x = L \Rightarrow M = PL^2 - \frac{PL^2}{2} - \frac{PL^2}{2} = 0$$

Diagramme $\frac{M}{EI} = \frac{-1}{EI} \frac{PL^2}{2}$



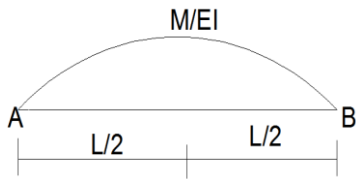
$$S = BH/3 = \frac{1}{3} * \frac{PL^3}{2} * L = \frac{PL^2}{6} \text{ et } X = 3L/4$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI} * \frac{PL^2}{6} \text{ et } \Delta_B = \frac{PL^2}{6} * \frac{1}{EI} * \frac{3L}{4} = \frac{PL^3}{8EI}$$

Exemple 2.

$$R_A = R_B = \frac{PL}{2}$$

Diagramme M/EI



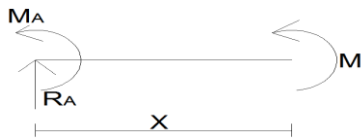
$$S = 2BH/3 = \frac{2}{3} * \frac{PL^2}{8} * \frac{L}{2} * \frac{1}{EI} \text{ et } X = \frac{5L}{8} = \frac{5L}{16}$$

$$\theta_A = S = \frac{PL^3}{24EI} \text{ et } \Delta_C = S * X = \frac{PL^3}{24EI} * \frac{5L}{16} = \frac{5PL^4}{384EI}$$

Exemple 3.

$$R_A = 15 \text{ et } M_A = 2 * 10 + 5 * 6 = 50 \text{ Kgm}$$

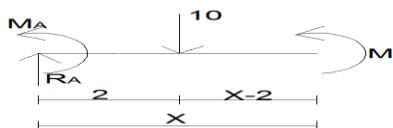
Zone AB : $0 \leq X \leq 2$



$$M + M_A - R_A X = 0 \Rightarrow M = -M_A + R_A X = 15x - 50$$

$$\text{Si } x = 0, M = -50 \text{ et si } x = 2, M = -20$$

Zone BC : $2 \leq X \leq 4$

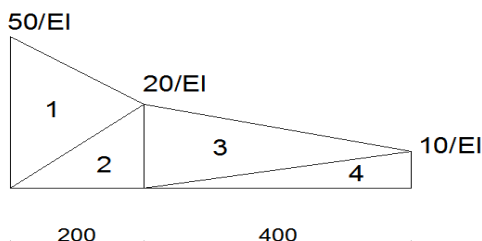


$$M + 10(x - 2) - R_A X + M_A = 0 \Rightarrow M + 10X - 20 - 15X + 50 = 0$$

$$M - 5X + 30 = 0 \Rightarrow M = 5x - 30$$

$$\text{Si } x = 2, M = -20 \text{ et si } x = 4, M = -10$$

Diagramme M/EI



Pour y parvenir nous le divisons en 4 petits triangles.

$$S_1 = \frac{BH}{2} = \frac{50 \cdot 2}{2} = 50 \text{ et } X_1 = \frac{2}{3}L = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$$

$$S_2 = \frac{BH}{2} = \frac{20 \cdot 2}{2} = 20 \text{ et } X_2 = \frac{L}{3} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{BH}{2} = \frac{20 \cdot 4}{2} = 40 \text{ et } X_3 = \frac{2}{3}L = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$$

$$S_4 = \frac{BH}{2} = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20 \text{ et } X_4 = \frac{L}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\theta_C = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = (50 + 20 + 40 + 20) \frac{1}{EI} = \frac{130}{EI}$$

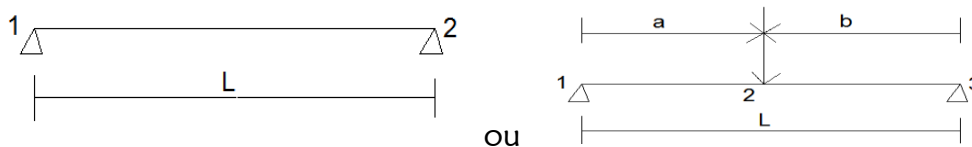
$$\Delta_C = (s_1 * (x_1 + l_1) + s_2(x_2 + l_1) + s_3 * x_3 + s_4 * x_4) \frac{1}{EI}$$

$$= (50 * (\frac{4}{3} + 4) + 20 * (\frac{2}{3} + 4) + 40 * \frac{8}{3} + 20 * \frac{4}{3}) \frac{1}{EI} = \frac{1480}{3EI}$$

Avec L_1 : la distance pour atteindre le point C parce que la surface considérée n'atteint pas le point C ou l'on calcul la flèche.

11.10 METHODE DE BRESSE

Illustrons l'équation de Bresse à l'aide d'une poutre simplement appuyée.



- $\mathcal{W} = W_1 + \int_0^X \frac{M}{EI} dx$

Avec : \mathcal{W} : la rotation (son existence est liée aux conditions ci-dessous)

W_1 : La rotation au premier appui

X : coordonnée du point où l'on calcul la flèche

M : moment due aux efforts intérieurs

- $V = V_1 + W_1(X_2 - X_1) + \int_0^X \frac{M}{EI} (X_2 - \xi) dx$

Avec : V : flèche (son existence est liée aux conditions ci-dessous)

V_1 : Flèche au premier appui

W_1 : La rotation au premier appui ou calculer par la formule au-dessus

X_1 : Coordonnée du premier appui ou point

X_2 : Coordonnée du second appui ou point

X : coordonnée où l'on veut calculer la flèche

$\xi = X$

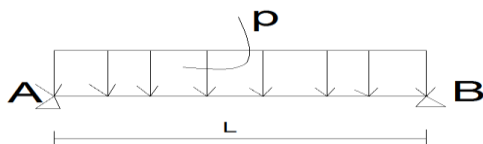
M : moment du aux efforts intérieurs

Les conditions sont :

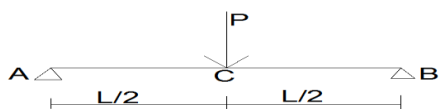
- Appui simple extrême : $V = 0$ et $W \neq 0$
- Encastrement : $V = 0$ et $W \neq 0$
- Extrémité libre : V et $W \neq 0$
- Travée : $V \neq 0$ et $W = 0$

EXERCICES

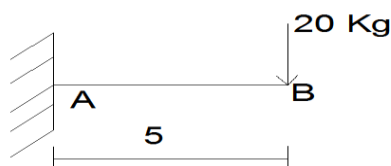
Exemple 1. Démontrer à l'aide du théorème de Bresse que $f = \frac{-5 P L^4}{384 EI}$ de la poutre suivante à mi portée



Exemple 2. Démontrer à l'aide du théorème de Bresse que $f = \frac{P L^3}{48 EI}$ de la poutre suivante à mi portée

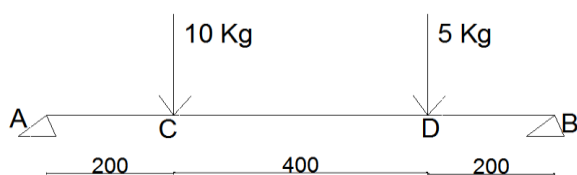


Exemple 3. Calculer la flèche au point B de la poutre suivante



$$I = 2000 \text{ cm}^4 \text{ et } E = 2,1 * 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

Exemple 4. La flèche au point D



RESOLUTIONS

Exemple 1. $R_A = R_B = \frac{PL}{2}$ et $M = \frac{PLX}{2} - \frac{PX^2}{2}$

$V \neq 0$ et $W = 0$

$$\bullet \quad W = W_A + \int_0^X \frac{M}{EI} dx \Rightarrow 0 = W_A + \frac{1}{EI} \int_0^X \left(\frac{PLX}{2} - \frac{PX^2}{2} \right) dx$$

$$0 = W_A + \frac{1}{EI} \left(\frac{PL}{2} \left(\frac{X^2}{2} \right)_0^L - \frac{P}{2} \left(\frac{X^3}{3} \right)_0^L \right) \Rightarrow 0 = W_A + \frac{1}{EI} \left(\frac{PL}{4} * \frac{L}{2} - \frac{P}{6} * \frac{L^3}{8} \right)$$

$$0 = W_A + \frac{1}{EI} \frac{PL^3}{24} \Rightarrow W_A = -\frac{PL^3}{24EI}$$

$$\bullet \quad V = V_A + W_A(X_B - X_A) + \int_0^X \frac{M}{EI} (X_B - \xi) dx$$

$$V = 0 - \frac{PL^3}{24EI} (L - 0) + \int_0^{L/2} \left(\frac{PLX}{2} - \frac{PX^2}{2} \right) (L - X) \frac{dx}{EI}$$

$$V = -\frac{PL^4}{24EI} + \int_0^{L/2} \left(\frac{PL^2X}{2} - \frac{PLX^2}{2} - \frac{PLX^2}{2} + \frac{PX^3}{2} \right) \frac{dx}{EI}$$

$$V = -\frac{PL^4}{24EI} + \left(\frac{PL^2}{2} \left(\frac{X^2}{2} \right)_0^{L/2} - \frac{PL}{2} \left(\frac{X^3}{3} \right)_0^{L/2} - \frac{PL}{2} \left(\frac{X^3}{3} \right)_0^{L/2} + \frac{P}{2} \left(\frac{X^4}{4} \right)_0^{L/2} \right) \frac{1}{EI}$$

$$V = -\frac{PL^4}{24EI} + \left(\frac{PL^4}{16} - \frac{PL^4}{48} - \frac{PL^4}{48} - \frac{PL^4}{128} \right) \frac{1}{EI} = -\frac{5PL^4}{384EI}$$

Exemple 2. $R_A = R_B = \frac{P}{2}$ et $M = R_A X = \frac{PX}{2}$

$V \neq 0$ et $W = 0$

$$\bullet \quad W = W_A + \int_0^X \frac{M}{EI} dx \Rightarrow 0 = W_A + \int_0^{L/2} \frac{PX}{2} \frac{dx}{EI}$$

$$0 = W_A + \frac{P}{2} \left(\frac{X^2}{2} \right)_0^{L/2} \frac{1}{EI} \Rightarrow 0 = W_A + \frac{P}{4} * \frac{L^2}{4} * \frac{1}{EI} \Rightarrow W_A = -\frac{PL^2}{16EI}$$

$$\bullet \quad V = V_A + W_A(X_B - X_A) + \int_0^X \frac{M}{EI} (X_B - \xi) dx$$

$$V = 0 - \frac{PL^2}{16EI} \left(\frac{L}{2} - 0 \right) + \int_0^{L/2} \frac{PX}{2} \left(\frac{L}{2} - X \right) \frac{dx}{EI} \Rightarrow V = -\frac{PL^3}{32EI} + \int_0^{L/2} \left(\frac{PLX}{4} - \frac{PX^2}{2} \right) \frac{dx}{EI}$$

$$V = -\frac{PL^3}{32EI} + \left(\frac{PL}{4} * \left(\frac{X^2}{2} \right)_0^{L/2} - \frac{P}{2} \left(\frac{X^3}{3} \right)_0^{L/2} \right) \frac{1}{EI} = -\frac{PL^3}{32EI} + \left(\frac{PL}{8} * \frac{L^2}{4} - \frac{P}{6} * \frac{L^3}{6} \right) \frac{1}{EI}$$

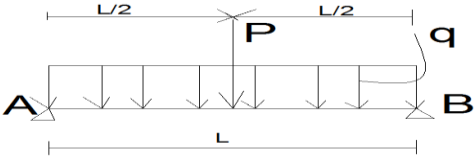
$$V = -\frac{PL^3}{48EI}$$

11.11 METHODE DE SUPERPOSITION

Cette méthode est la conséquence des méthodes précédentes. C'est les déformations dues à plusieurs cas des charges peuvent être donc superposées ou accumulées.

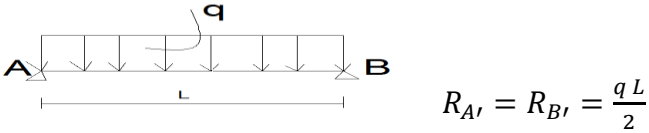
Celle méthode est surtout utilisée quand les déformations qu'on veut évaluer sont constituées des plusieurs cas élémentaires qui sont connus cas par cas.

Exemple

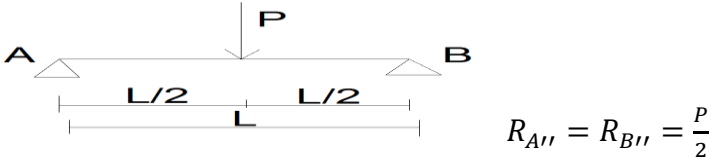


Réponse

1^{ère} partie



2^{ème} partie



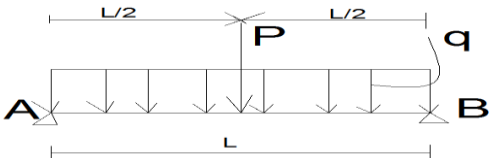
On aura : $R_A = R_B = R_{A'} + R_{A''} = R_{B'} + R_{B''} = \frac{qL}{2} + \frac{P}{2}$

Idem avec les déformations

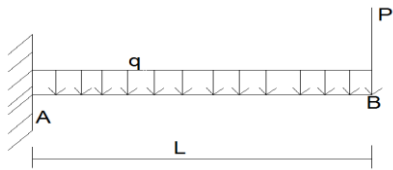
NB : voir les abaques des déformations déjà préétablies.

EXERCICES

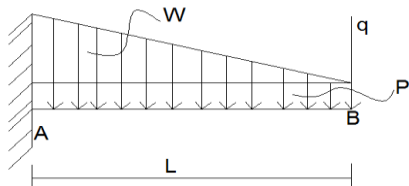
Exemple 1. Calculer la flèche maximale de cette poutre



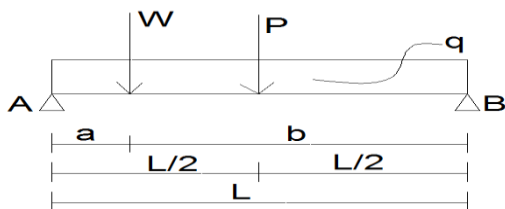
Exemple 2. Calculer la flèche maximale de cette poutre



Exemple 3. A l'aide du principe de superposition calculer la flèche de cette poutre



Exemple 4. . A l'aide du principe de superposition calculer la flèche maximale de cette poutre



RESOLUTIONS

Exemple 1.

On sait que : $f_1 = -\frac{5 q L^4}{384 EI}$ pour la charge répartie

$f_2 = -\frac{P L^3}{48 EI}$ Pour la charge concentrée

Donc : $f = f_1 + f_2 = -\left(\frac{5 q L^4}{384 EI} + \frac{P L^3}{48 EI}\right)$

Exemple 2.

On sait que : $f_1 = -\frac{q L^4}{8 EI}$ (pour la charge uniforme)

$f_2 = -\frac{P L^3}{3 EI}$ (Pour la charge concentrée)

On aura : $f_{max} = f_1 + f_2 = -\frac{q L^4}{8 EI} - \frac{P L^3}{3 EI}$

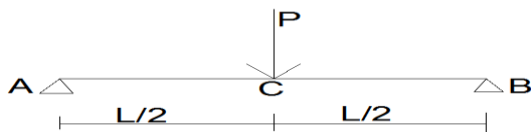
11.12 DIMENSIONNEMENT A L'AIDE DES DEFORMATIONS

EXERCICES

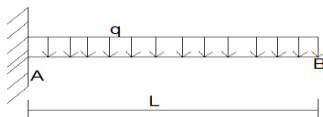
Exemple 1. Dimensionnement la poutre suivante ayant les caractéristiques suivantes ci-après

$$P = 5000 \text{ kg} , \sigma_{adm} = 2500 \text{ Kg/cm}^2 , E = 200000 \text{ Kg/cm}^2 , f_{max} = \frac{L}{500}$$

Et $L = 5 \text{ m}$



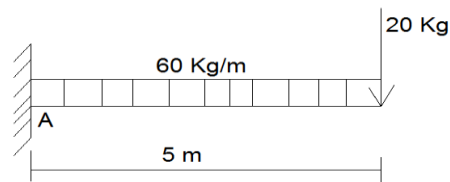
Exemple 2. Dimensionner la poutre suivante dont $f_{max} = \frac{L}{600}$



Exemple 3. Calculer la contrainte max (σ_{max}) si $f_{max} = \frac{L}{500}$ de la poutre suivante

$$P = 50 \text{ Kg/m} ; q = 20 \text{ Kg} ; L = 6\text{m} \text{ et } E = 200000 \text{ kg/cm}^2$$

Exemple 4. Dimensionner la poutre suivante dont : $\tau = 25 \text{ Kg/cm}^2$ et $f_{max} = \frac{L}{600}$



RESOLUTIONS

Exemple 1. $R_A = R_B = \frac{P}{2} = \frac{5000}{2} = 2500 \text{ kg}$

$$M = \frac{PL}{4} = \frac{5000 * 5}{4} = 6250 \text{ Kgm} = 625000 \text{ kg cm}$$

1. Stabilité due aux contraintes : $\sigma_{calc} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow \frac{MY}{I} \leq \sigma_{adm}$

$$\frac{625000}{\frac{BH^3}{12}} * \frac{H}{2} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow \frac{3750000}{BH^2} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow B \geq \frac{3750000}{H^2 \sigma_{adm}} = \frac{3750000}{2500 * H^2}$$

$$B \geq \frac{1500}{H^2} \quad (1)$$

2. Stabilité due aux déformations : $f_{cal} \leq f_{max}$

$$\text{Or : - } f_{calc} = \frac{P L^3}{48 EI} = \frac{5000 * 500^3}{48 * 200000 * \frac{B H^3}{12}} = \frac{625000}{8B H^3}$$

$$\text{- } f_{max} = \frac{L}{500} = \frac{5}{500} = \frac{1}{100}$$

$$\text{On aura : } f_{cal} \leq f_{max} \Rightarrow \frac{625000}{8B H^3} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow B \geq \frac{78125000}{H^3} \quad (2)$$

$$(1) \geq (2) : \frac{1500}{H^2} \geq \frac{78125000}{H^3} \Rightarrow H \geq 52083,3$$

Nous adoptons : $H = 53000$ cm et $B = H/2 = 26500$ cm

Exemple 2. $R_A = PL$ et $M_A = \frac{PL^2}{2}$

$$\text{Condition : } f_{cal} \leq f_{max} \Rightarrow \frac{P L^4}{8 EI} \leq \frac{L}{600} \Rightarrow \frac{P L^4}{8 E \frac{B H^3}{12}} \leq \frac{L}{600} \text{ avec } B = \frac{H}{2}$$

$$\frac{24 P L^4}{8 E H^4} \leq \frac{L}{600} \Rightarrow H^4 \geq \frac{24 P L^4 * 600}{8 E L} \Rightarrow H \geq \sqrt[4]{\frac{24 P L^4 * 600}{8 E L}}$$

CHAPITRE 12. SYSTEME HYPERSTATIQUE

12.1 Définition

Une structure est dite hyperstatique lorsque les réactions aux appuis ne peuvent pas être déterminées par les seules équations d'équilibre statique.

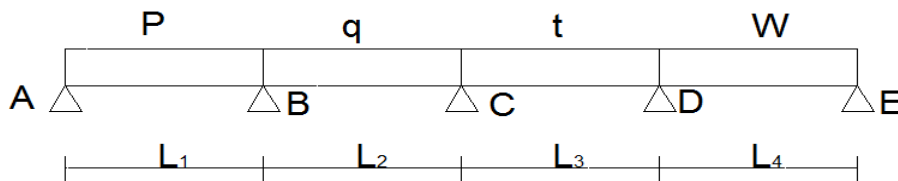
Nombre des réactions aux appuis > 3 équations d'équilibre statique

NB : - On va utiliser plusieurs méthodes de résolution des structures hyperstatiques

- Après avoir déterminé les réactions aux appuis surabondants, on peut aisément faire l'étude complète d'une structure (calcul des réactions aux appuis, diagramme, déformation ...)
- On ne peut pas résoudre une structure hyperstatique sans lever l'hyperstaticité afin de le rendre isostatique, cette opération passe par les méthodes ci-dessous.

A. LA METHODE DES 3 MOMENTS OU METHODE DE CLAPEYRON

Cette méthode nous permet d'avoir les moments aux appuis intermédiaires d'une poutre continue tout en considérant des systèmes de 3 appuis successifs et on traite chaque travée comme une poutre isostatique



$M_A = M_E = 0$, parce que le moment aux appuis simple extrême est nul.

Degré d'hyperstaticité : nombre de travée $- 1 : 4 - 1 = 3$, ou soit appui A = 2 réactions, appuis B, C, D et E = 1 réaction chacune (en somme nous avons 6 rections - les 3 équations d'équilibre statique = 3) donc la poutre est 3 fois hyperstatique.

Les systèmes ayant 3 appuis consécutifs sont ABC, BCD et CDE

Formule générale :

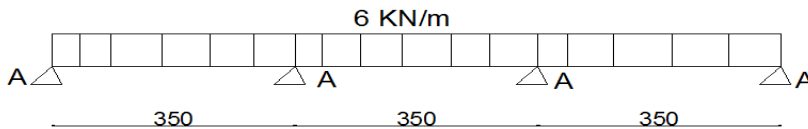
$$1^{ere} : L_1 M_1 + 2(L_1 + L_2) M_2 + L_2 M_3 = -\frac{1}{4}(P_1 L_1^3 + P_2 L_2^3)$$

Cette formule est appliquée pour chaque système, le 1 symbolise le premier appui du système considéré et la première portée ainsi de suite.

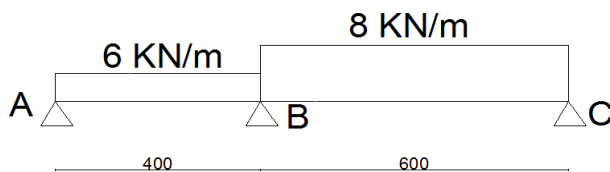
Après l'établissement des équations de 3 moments pour chaque système, on aura un système d'équation à résoudre ayant comme inconnue les moments aux appuis intermédiaires.

EXERCICES

Exemple 1. Calculer et faites le diagramme M, N et T de cette poutre



Exemple 2. Calculer et faites le diagramme M, N et T de cette poutre



REPONSE

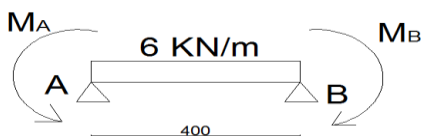
Exemple 2.

Degré d'hyperstaticité : $2 - 1 = 1$

$$M_A = M_C = 0$$

$$4M_A + 2(4 + 6) M_B + 6M_C = -\frac{1}{4}(6 * 4^3 + 8 * 6^3) \Rightarrow 20 M_B = - 26,4 \text{ KNm}$$

Travée AB

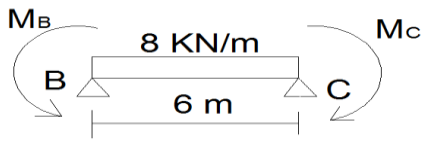


$$T_{AB} = \frac{q L}{2} + \frac{M_A - M_B}{L} = \frac{6 * 4}{2} + \frac{0 - 26,4}{4} = 5,4 \text{ KN}$$

$$T_{BA} = \frac{q L}{2} + \frac{M_B - M_A}{L} = \frac{6 * 4}{2} + \frac{26,4 - 0}{4} = 18,6 \text{ KN}$$

$$M_{max} = \frac{T_{AB}^2}{2 q} - M_A = \frac{5,4^2}{2 * 6} - 0 = 2,43 \text{ KNm ou soit}$$

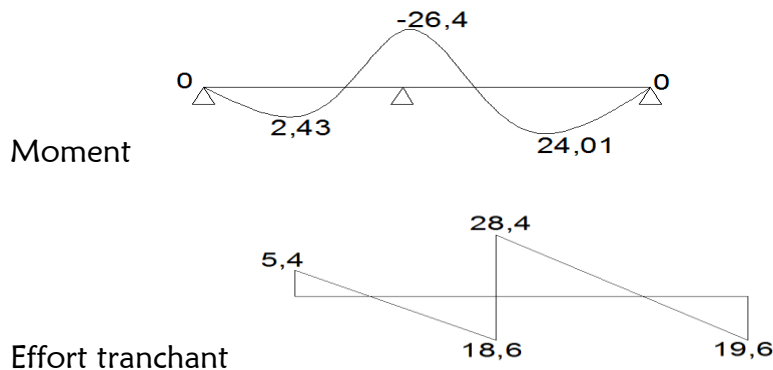
$$M_{max} = \frac{T_{BA}^2}{2 q} - M_B = \frac{18,6^2}{2 * 6} - 26,4 = 2,43 \text{ KNm}$$

Travée BC

$$T_{BC} = \frac{qL}{2} + \frac{M_B - M_C}{L} = \frac{8 \cdot 6}{2} + \frac{26,4 - 0}{6} = 28,4 \text{ KN}$$

$$T_{CB} = \frac{qL}{2} + \frac{M_C - M_B}{L} = \frac{8 \cdot 6}{2} + \frac{0 - 26,4}{6} = 19,6 \text{ KN}$$

$$M_{max} = \frac{T_{BC}^2}{2q} - M_B = \frac{28,4^2}{2 \cdot 8} - 26,4 = 24,01 \text{ KNm ou soit}$$

Diagramme

NB : - cette formule de 3 moments ne concerne que des poutres continues avec charge uniforme et des appuis simples

- Les E (module d'élasticité) et I (moment d'inertie) sont constants
- Les deux moments max doivent être identiques.

$$2^{eme} : L_1 M_1 + 2(L_1 + L_2) M_2 + L_2 M_3 = -6 EI (\theta_1 + \theta_2)$$

Avec : θ_1 : désigne la rotation à gauche du système considéré

Et θ_2 : désigne la rotation à droite du système considéré

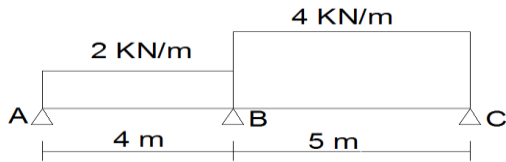
NB : - Les valeurs de θ sont en valeur absolue

- Les valeurs de θ peuvent être déterminées par n'importe quelle méthode vue au chapitre 11.
- Cette formule garde le même principe que le précédent qui consiste à considérer 3 appuis consécutifs
- Les rotations ne sont déterminées qu'aux appuis intermédiaires à gauche et à droite

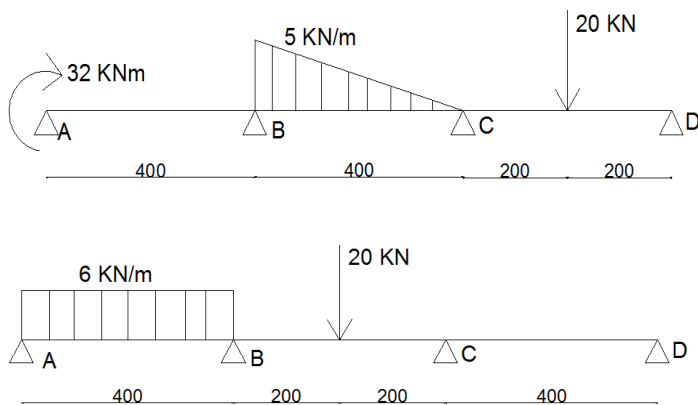
- Cette deuxième formule c'est pour toute forme de chargement et appui

EXERCICES

Exemple 1.



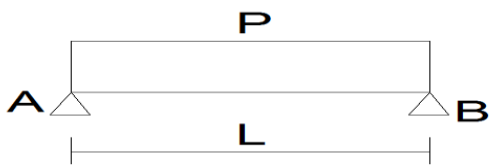
Exemple 2. Faites l'étude complète de ces poutres



REPONSES

Exemple 1. Le système ABC

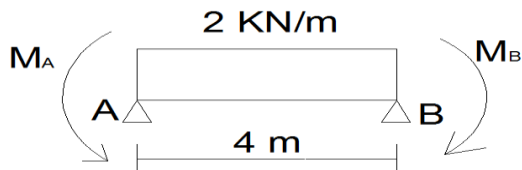
On sait que pour une poutre avec charge uniforme la rotation est donnée comme suite :



$$\theta_{Bd} = \frac{PL^3}{24EI} = \frac{4 * 5^3}{24EI} = \frac{125}{6EI} \text{ et } \theta_{Bg} = \frac{PL^3}{24EI} = \frac{2 * 4^3}{24EI} = \frac{32}{6EI}$$

$$4M_A + 2(4 + 5) M_B + 5M_C = -6EI \left(\frac{125}{6EI} + \frac{32}{6EI} \right)$$

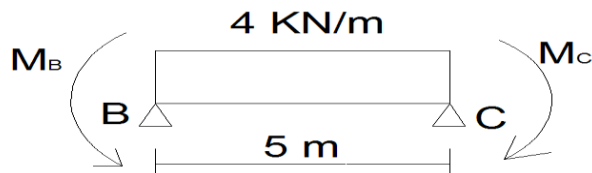
$$18 M_B = -157 \Rightarrow M_B = -8,7 \text{ KNm}$$

Travée AB

$$T_{AB} = \frac{qL}{2} + \frac{M_A - M_B}{L} = \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{0 - 8,7}{4} = 1,825 \text{ KN}$$

$$T_{BA} = \frac{qL}{2} + \frac{M_B - M_A}{L} = \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{8,7 - 0}{4} = 6,175 \text{ KN}$$

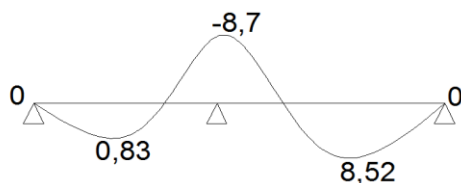
$$M_{max} = \frac{T_{AB}^2}{2q} - M_A = \frac{1,825^2}{2 \cdot 2} - 0 = 0,83 \text{ KNm}$$

Travée BC

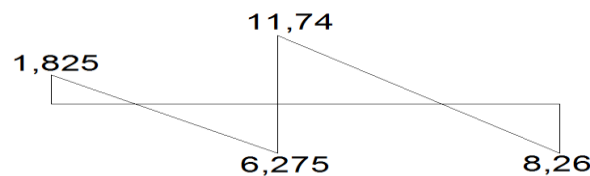
$$T_{BC} = \frac{qL}{2} + \frac{M_B - M_C}{L} = \frac{4 \cdot 5}{2} + \frac{8,7 - 0}{5} = 11,74 \text{ KN}$$

$$T_{CB} = \frac{qL}{2} + \frac{M_C - M_B}{L} = \frac{4 \cdot 5}{2} + \frac{0 - 8,7}{5} = 8,26 \text{ KN}$$

$$M_{max} = \frac{T_{BC}^2}{2q} - M_B = \frac{11,74^2}{2 \cdot 4} - 8,7 = 8,52 \text{ KNm ou soit}$$

Diagramme

Moment



Effort tranchant

B. METHODE DES FLECHES

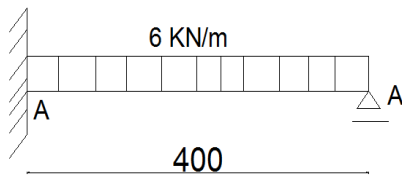
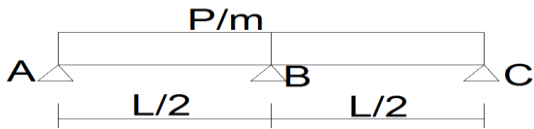
Cette méthode consiste à lever l'hyperstaticité à l'aide des flèches.

Principe :

- Supprimer les appuis surabondants.
- Calculer la flèche de la poutre isostatique (f_1)
- Calculer la (les) flèche (s) de la (des) poutre (s) fictive avec comme inconnues les appuis surabondant ($f_2, f_3 \dots$)
- Faire la somme de $f_1 + f_2 = 0$, tirer l'inconnue (la valeur de la réaction surabondant)

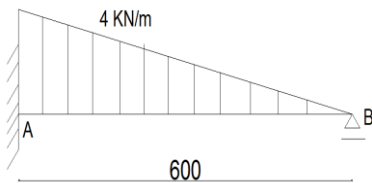
EXERCICES

Exemple 1. Calculer les réactions d'appuis de la poutre ci-dessous

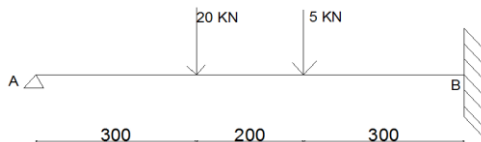


Exemple 2.

Exemple 3. Calculer la flèche de cette poutre au point B



Exemple 4. Tracer le diagramme de la poutre suivante

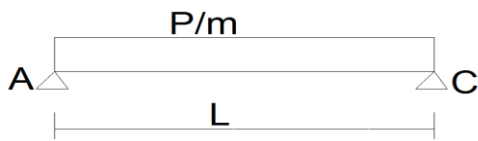


REPONSES

Exemple 1.

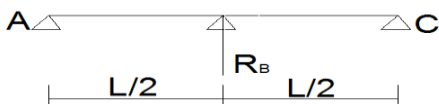
- On supprime l'appui B

- On calcul la flèche sans appui B



On sait que : $f_1 = \frac{5 P L^4}{384 E I}$

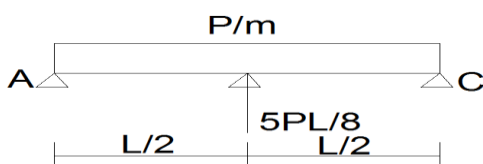
- On calcul la flèche avec la poutre fictive



On sait que : $f_2 = \frac{P L^3}{48 E I} = -\frac{R_B L^3}{48 E I}$

Donc on aura : $f_1 + f_2 = 0 \Rightarrow \frac{5 P L^4}{384 E I} - \frac{R_B L^3}{48 E I} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{5 P L}{8}$

La structure deviendra :



$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow R_A + R_B + R_C - PL = 0 \Rightarrow R_A = PL - R_B - R_C$

$R_A = PL - \frac{5 PL}{8} - R_C = \frac{3 PL}{8} - R_C$ (1)

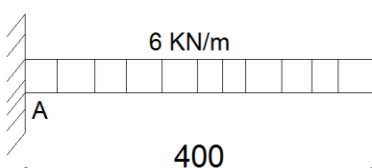
$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \odot PL \frac{L}{2} - R_B \frac{L}{2} - L R_C = 0 \Rightarrow \frac{PL^2}{2} - \frac{5PL^2}{16} - L R_C = 0$

$R_C = \frac{3PL}{16}$ (2)

(2) dans (1) : $R_A = \frac{3PL}{8} - \frac{3PL}{16} = \frac{3PL}{16}$

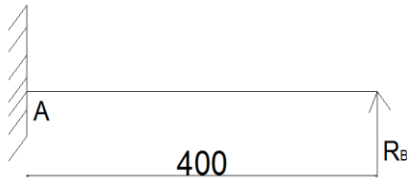
Exemple 2.

- On supprime l'appui B
- On calcul la flèche sans appui B



On sait que : $f_1 = \frac{P L^4}{8 E I} = \frac{6 * 4^4}{8 E I} = \frac{192}{E I}$

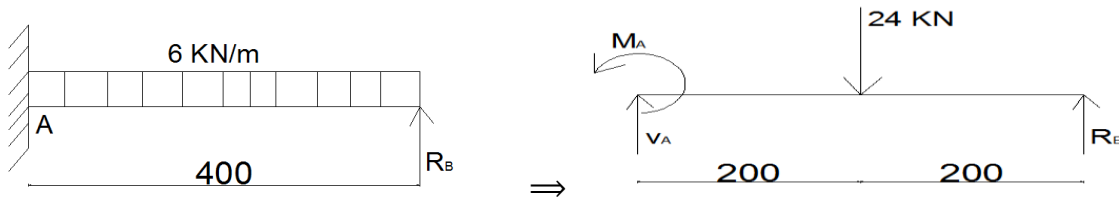
- On calcul la flèche avec la poutre fictive



On sait que $f_2 = \frac{P L^3}{3 EI} = -\frac{R_B * 4^3}{3 EI} = -\frac{64 R_B}{3 EI}$

On aura : $f_1 + f_2 = 0 \Rightarrow \frac{192}{EI} - \frac{64 R_B}{3 EI} = 0 \Rightarrow R_B = 9 KN$

La poutre deviendra :

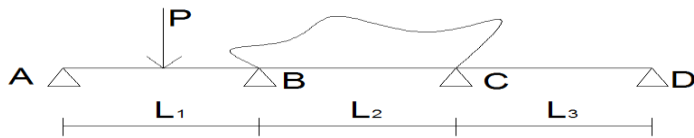


$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 9 - 24 = 0 \Rightarrow V_A = 15 KN$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \odot M_A - 24 * 2 + 4 * 9 = 0 \Rightarrow M_A = 12 KNm$

C. METHODE DES DEFORMATIONS

Considérons une poutre pour illustrer la méthode des déformations



$$M_{AB} = \frac{2 EI}{L_{AB}} \left(2\theta_A + \theta_B - \frac{3 \Delta_{AB}}{L_{AB}} \right) \pm \mu_{AB}$$

$$M_{BA} = \frac{2 EI}{L_{BA}} \left(2\theta_B + \theta_A - \frac{3 \Delta_{BA}}{L_{BA}} \right) \pm \mu_{BA}$$

Ainsi de suite pour toutes les travées

A la fin, nous allons former un système d'équation provenant de la somme des moments à un point intermédiaire càd un point où les barres concourent afin de déduire les inconnues qui sont des déformations (θ et Δ)

Exemple :

$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow M_{BA} + M_{BC} = 0$

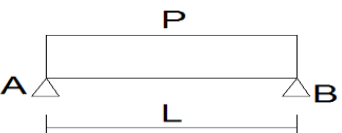
$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow M_{CB} + M_{CD} = 0$

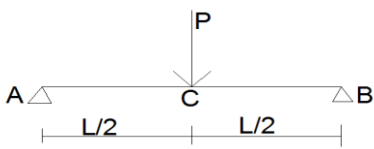
Hypothèse : - les moments aux appuis extrêmes simples sont nuls

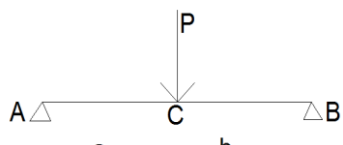
(exemple : $M_A = M_D = 0$ ici c'est plutôt $M_{AB} = M_{DC} = 0$)

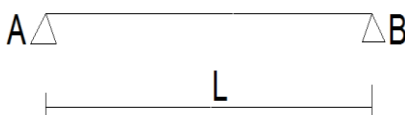
- Les barres horizontales : $\Delta = 0$
- Pour les barres encastrées : $\Delta = \theta = 0$
- μ : le moment d'encastrement parfait

Nous illustrons quelques expressions des μ

Exemple 1.  $\mu_{AB} = -\frac{P L^2}{12}$ et $\mu_{BA} = \frac{P L^2}{12}$

Exemple 2.  $\mu_{AB} = -\frac{P L}{8}$ et $\mu_{BA} = \frac{P L}{8}$

Exemple 3.  $\mu_{AB} = -\frac{P a b^2}{L^2}$ et $\mu_{BA} = \frac{P a^2 b}{L^2}$

Exemple 4.  $\mu_{AB} = \mu_{BA} = 0$

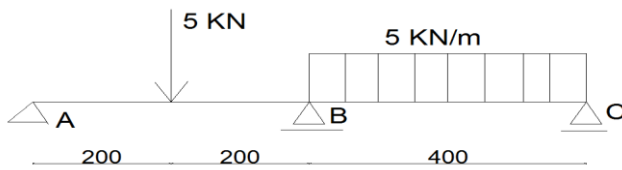
Exemple 5. Les autres types des chargements, cfr le formulaire des poutres de R.D.M

- On traite chaque travée comme une poutre isostatique
- Déterminer le degré d'hyperstaticité
- M_{AB}, M_{BA}, \dots Sont des moments aux appuis

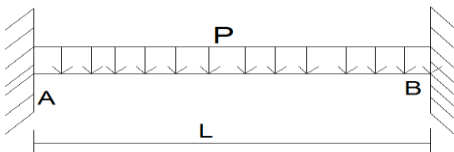
NB : - la plupart des valeurs de μ pour une travée sont identiques à la différence des signes ($\mu_{AB} = \mu_{BA}$) et les flèches ($\Delta_{AB} = \Delta_{BA}$)

EXERCICES

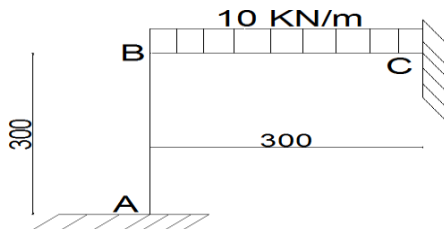
Exemple 1. Calculer les réactions d'appuis de cette poutre



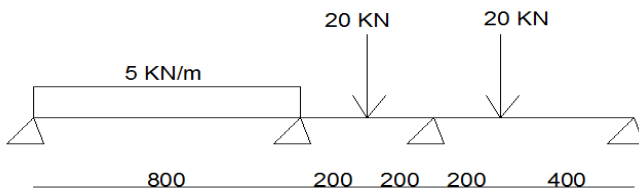
Exemple 2. Tracer le diagramme de cette poutre



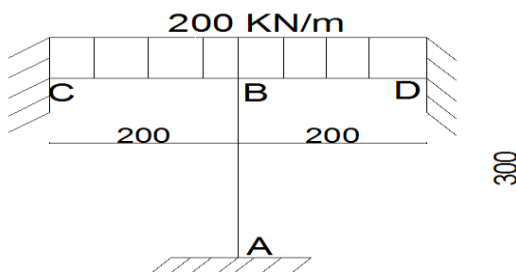
Exemple 3. Calculer les moments dans cette poutre



Exemple 4. Calculer les réactions aux appuis de cette poutre



Exemple 5. Calculer les réactions aux encastremets, les moments d'encastremets et la flèche à mi portée de BC de cette structure



REPONSES

Exemple 1.

Appui A = 2 réactions, Appui B = 1 réaction et Appui C = 1 réaction

La somme = 4 réactions

4 – 3 équations d'équilibre statique = 1 (la structure est une fois hyperstatique)

$$\text{avec } \Delta_{AB} = \Delta_{BC} = 0 ; \mu_{AB} = \pm \frac{PL}{8} = \pm \frac{5 \cdot 4}{8} = \pm \frac{5}{2}$$

$$\mu_{BC} = \pm \frac{PL^2}{12} = \pm \frac{5 \cdot 4^2}{12} = \pm \frac{20}{3} \text{ et } M_A = M_C = 0$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L_{AB}} \left(2\theta_A + \theta_B - \frac{3\Delta_{AB}}{L_{AB}} \right) + \mu_{AB}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{4} (2\theta_A + \theta_B) - \frac{5}{2} = EI\theta_A + \frac{1}{2}EI\theta_B - \frac{5}{2}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L_{BA}} \left(2\theta_B + \theta_A - \frac{3\Delta_{BA}}{L_{BA}} \right) + \mu_{BA} = \frac{2EI}{4} (2\theta_B + \theta_A) + \frac{5}{2} = EI\theta_B + \frac{1}{2}EI\theta_A + \frac{5}{2}$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{L_{BC}} \left(2\theta_B + \theta_C - \frac{3\Delta_{BC}}{L_{BC}} \right) + \mu_{BC} = \frac{2EI}{4} (2\theta_B + \theta_C) - \frac{20}{3}$$

$$= EI\theta_B + \frac{1}{2}EI\theta_C - \frac{20}{3}$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{L_{CB}} \left(2\theta_C + \theta_B - \frac{3\Delta_{CB}}{L_{CB}} \right) + \mu_{CB} = \frac{2EI}{4} (2\theta_C + \theta_B) + \frac{20}{3}$$

$$= EI\theta_C + \frac{1}{2}EI\theta_B + \frac{20}{3}$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow M_{BA} + M_{BC} = 0 \Rightarrow EI\theta_B + \frac{1}{2}EI\theta_A + \frac{5}{2} + EI\theta_B + \frac{1}{2}EI\theta_C - \frac{20}{3} = 0$$

$$\Rightarrow 2EI\theta_B + \frac{1}{2}EI\theta_A + \frac{1}{2}EI\theta_C - \frac{25}{6} = 0 \quad (1)$$

$$M_A = 0 \Rightarrow EI\theta_A + \frac{1}{2}EI\theta_B - \frac{5}{2} = 0 \quad (2)$$

$$M_C = 0 \Rightarrow EI\theta_C + \frac{1}{2}EI\theta_B + \frac{20}{3} = 0 \quad (3)$$

Nous avons un système d'équation à résoudre :

$$2EI\theta_B + \frac{1}{2}EI\theta_A + \frac{1}{2}EI\theta_C - \frac{25}{6} = 0 \quad (1)$$

$$EI\theta_A + \frac{1}{2}EI\theta_B - \frac{5}{2} = 0 \quad (2)$$

$$EI\theta_C + \frac{1}{2}EI\theta_B + \frac{20}{3} = 0 \quad (3)$$

De (2) : $EI\theta_A = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}EI\theta_B$ (4)

(4) dans (1) : $2EI\theta_B + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}EI\theta_B\right) - \frac{1}{2}EI\theta_C - \frac{25}{6} = 0$

$\Rightarrow EI\theta_B = \frac{2}{3}EI\theta_C + \frac{35}{9}$ (5)

(5) dans (3) : $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}EI\theta_C + \frac{35}{9}\right) + EI\theta_C + \frac{20}{3} = 0 \Rightarrow EI\theta_C = -\frac{93}{144}$ (6)

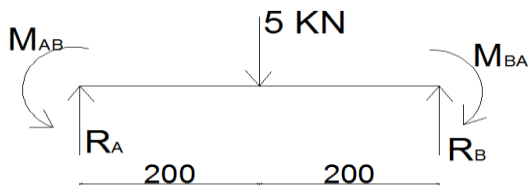
(6) dans (5) : $EI\theta_B = \frac{2}{3}\left(-\frac{93}{144}\right) + \frac{35}{9} = \frac{83}{24}$ (7)

(7) dans (4) : $EI\theta_A = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{83}{24}\right) = \frac{37}{48}$

Introduisons ces valeurs dans les expressions des moments

$M_{BA} = \frac{83}{24} + \frac{37}{48} + \frac{5}{2} = \frac{323}{48}$ et $M_{BC} = \frac{86}{24} + \frac{1}{2}\left(-\frac{93}{144}\right) - \frac{20}{3} = -\frac{1017}{288}$

Travée AB



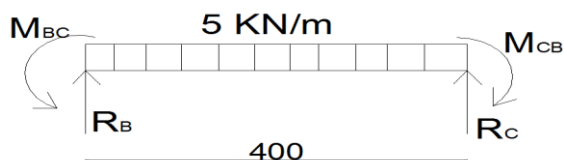
$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - 5 = 0 \Rightarrow R_A = 5 - R_B$ (1)

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \odot M_{BA} + 5 * 2 - 4R_B = 0 \Rightarrow \frac{232}{48} + 10 - 4R_B = 0$

$R_B = \frac{803}{192}$ (2)

(2) dans (1) : $R_A = 5 - \frac{803}{192} = \frac{157}{192}$

Travée BC



$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow R_B + R_C - 20 = 0 \Rightarrow R_B = 20 - R_C$ (1)

$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow \odot M_{CB} + 20 * 2 - 4R_C = 0 \Rightarrow -\frac{1017}{288} + 40 - 4R_C = 0$

$R_C = 9,117$ (2)

$$(2) \text{ dans (1) : } R_B = 20 - \frac{10503}{1152} = \frac{12537}{1152}$$

$$\text{On aura au point B : } R_B = R_{B1} + R_{B2} = \frac{803}{192} + \frac{12537}{1152} = 15,065$$

Exemple 2.

Appui A = 3 réactions ; appui B = 3 réactions

En somme nous avons 6 réactions

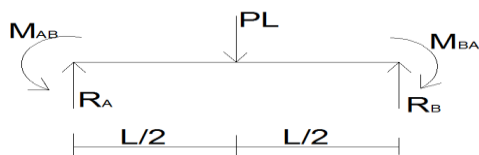
$$6 - 3 = 3 \text{ (3 fois hyperstatique)}$$

$$\text{Avec } \theta_A = \theta_B = \Delta_{AB} = 0 \text{ et } \mu_{AB} = \mu_{BA} = \frac{PL^2}{12}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L_{AB}} \left(2\theta_A + \theta_B - \frac{3\Delta_{AB}}{L_{AB}} \right) + \mu_{AB} = -\frac{PL^2}{12}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L_{BA}} \left(2\theta_B + \theta_A - \frac{3\Delta_{BA}}{L_{BA}} \right) + \mu_{BA} = \frac{PL^2}{12}$$

Travée AB

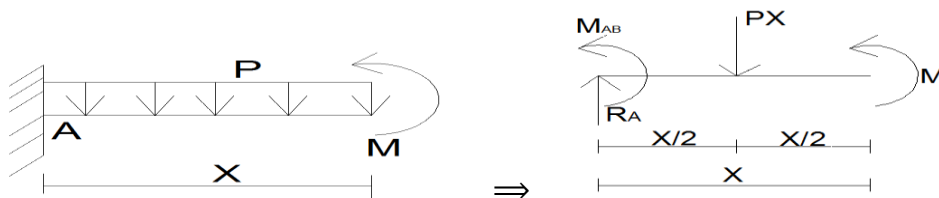


$$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - PL = 0 \Rightarrow R_A = PL - R_B \quad (1)$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \odot - M_{AB} + M_{BA} + PL \frac{L}{2} - L R_B = 0 \Rightarrow R_B = \frac{PL}{2} \quad (2)$$

$$(2) \text{ dans (1) : } R_A = \frac{PL}{2}$$

Zone AB : $0 \leq X \leq L$



$$\Sigma M = 0 \Rightarrow \odot M + M_{AB} + \frac{PX^2}{2} - R_A X = 0 \Rightarrow M = R_A X - \frac{PX^2}{2} - M_{AB}$$

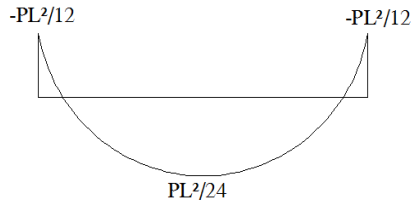
$$M = \frac{PLX}{2} - \frac{PX^2}{2} - \frac{PL^2}{12} \text{ et } T = \frac{dM}{dx} = \frac{PL}{2} - PX$$

$$\text{Si } x = 0 ; M = -\frac{PL^2}{12} \text{ et } T = PL/2$$

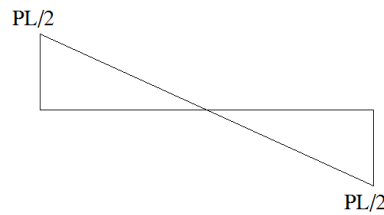
Si $x = L/2$; $M = \frac{P L^2}{24}$ et $T = 0$

Si $x = L$; $M = -\frac{P L^2}{12}$ et $T = - PL/2$

Diagramme



Moment



Effort tranchant

Exemple 3. Appui A et C = 3 réactions d'appui chacune

En somme nous avons 6 réactions d'appui

$6 - 3 = 3$ (3 fois hyperstatique)

Avec $\mu_{AB} = 0$; $\mu_{BC} = \frac{P L^2}{12}$; $\Delta_{AB} = \Delta_{BC} = \theta_A = \theta_C = 0$

$M_{AB} = \frac{2EI}{3} (2\theta_A + \theta_B - \frac{3\Delta_{AB}}{3}) - 0 = \frac{2}{3} EI\theta_B$

$M_{BA} = \frac{2EI}{3} (2\theta_B + \theta_A - \frac{3\Delta_{BA}}{3}) + 0 = \frac{4}{3} EI\theta_B$

$M_{BC} = \frac{2EI}{3} (2\theta_B + \theta_C - \frac{3\Delta_{BC}}{3}) - 7,5 = \frac{4}{3} EI\theta_B - 7,5$

$M_{CB} = \frac{2EI}{3} (2\theta_C + \theta_B - \frac{3\Delta_{CB}}{3}) + 7,5 = \frac{2}{3} EI\theta_B + 7,5$

$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow M_{BA} + M_{BC} = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} EI\theta_B + \frac{4}{3} EI\theta_B - 7,5 = 0 \Rightarrow EI\theta_B = \frac{15}{16}$

On aura :

$M_{AB} = \frac{2}{3} * \frac{15}{16} = \frac{5}{8}$

$M_{BA} = \frac{4}{3} * \frac{15}{16} = \frac{5}{4}$

$$M_{BC} = \frac{4}{3} * \frac{15}{16} - 7,5 = -\frac{25}{4}$$

$$M_{CB} = \frac{2}{3} * \frac{15}{16} + 7,5 = 35/4$$

D. TREILLIS HYPERSTATIQUE

Degré d'hyperstaticité :

$B = 2N - 3$: le treillis est isostatique

$B < 2N - 3$: le treillis est hypostatique

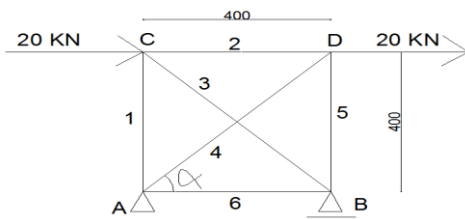
$B > 2N - 3$: le treillis est hyperstatique

Le nombre de fois d'hyperstaticité : $B - 2N - 3$

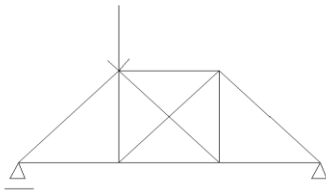
Nous allons utiliser la méthode de travail virtuel.

EXERCICES

Exemple 1. Calculer le treillis suivant

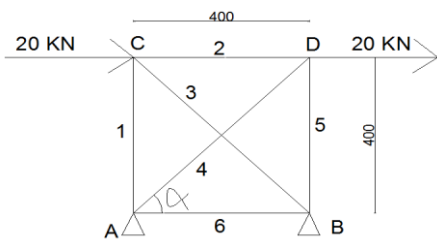


Exemple 2. Résoudre ce treillis



REPONSES

Exemple 1.



$$\alpha = 45^\circ ; \cos \alpha = \sin \alpha = 0,707$$

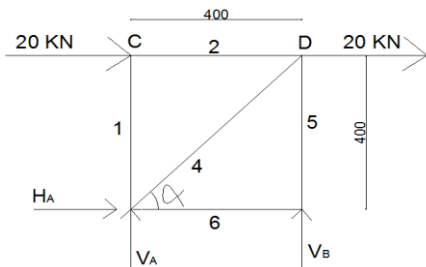
$B = 2N - 3 \Rightarrow 6 = 2 * 4 - 3 \Rightarrow 6 \neq 5$, d'où, le treillis n'est pas isostatique

$B - (2N - 3) \Rightarrow 6 - (2 * 4 - 3) = 1$, d'où, le treillis est une fois hyperstatique

Nous allons supprimer une barre (B_3)

$L_1 = L_2 = L_5 = L_6 = 4\text{ m}$ et $L_3 = L_4 = 5,6\text{ m}$

• Treillis isostatique



$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A + 20 + 20 = 0 \Rightarrow H_A = -40 \quad (1)$$

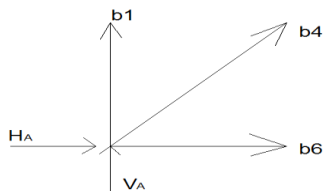
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = 0 \Rightarrow R_A = -R_B \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \curvearrowright 20 * 4 + 20 * 4 - 4R_B = 0 \Rightarrow R_B = 40\text{ KN} \quad (3)$$

(3) dans (2) : $R_A = -40\text{ KN}$

Effort dans les barres

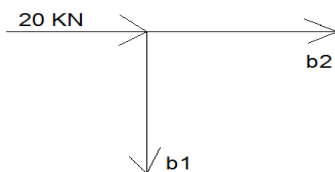
Nœud A



$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A + b_6 + b_4 \cos \alpha = 0 \Rightarrow b_6 = 40 - 0,707 b_4 \quad (1)$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow R_A + b_1 + b_4 \cos \alpha = 0 \Rightarrow b_1 = 40 - 0,707 b_4 \quad (2)$$

Nœud C



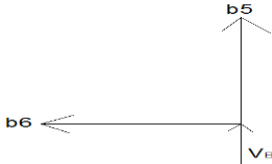
$$\sum F_X = 0 \Rightarrow b_2 + 20 = 0 \Rightarrow b_2 = -20 \quad (3)$$

$$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow b_1 = 0 \quad (4)$$

$$(4) \text{ dans } (2) : 0 = 40 - 0,707 b_4 \Rightarrow b_4 = 56,6 \quad (5)$$

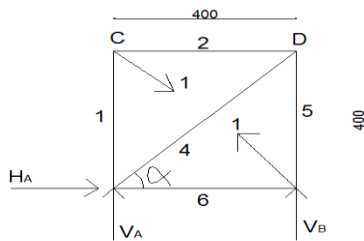
$$(5) \text{ dans } (1) : b_6 = 40 - 0,707 b_4 = 40 - 0,707 * 56,6 = 0$$

Nœud B



$$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow b_5 + R_B = 0 \Rightarrow b_5 = -R_B = -40$$

Treillis fictif



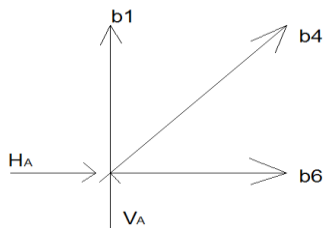
$$\Sigma F_X = 0 \Rightarrow H_A + 1 \cos \alpha - 1 \cos \alpha = 0 \Rightarrow H_A = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow R_A + R_B + 1 \cos \alpha - 1 \cos \alpha = 0 \Rightarrow R_A = -R_B \quad (2)$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \odot 1 \cos \alpha * 4 - 1 \cos \alpha * 4 - 4 R_B = 0 \Rightarrow R_B = 0 \text{ KN} \quad (3)$$

$$(3) \text{ dans } (2) : R_A = 0 \text{ KN}$$

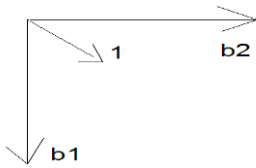
Nœud A



$$\Sigma F_X = 0 \Rightarrow b_6 + b_4 \cos \alpha = 0 \Rightarrow b_6 = -b_4 \cos \alpha \quad (1)$$

$$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow b_1 + b_4 \sin \alpha = 0 \Rightarrow b_4 = -\frac{b_1}{\sin \alpha} \quad (2)$$

Nœud C



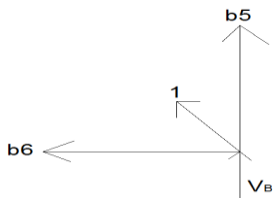
$$\Sigma F_X = 0 \Rightarrow b_2 + 1 \cos \alpha = 0 \Rightarrow b_2 = -0,707 \quad (3)$$

$$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow b_1 - 1 \cos \alpha = 0 \Rightarrow b_1 = 0,707 \quad (4)$$

$$(4) \text{ dans } (2) : b_4 = -\frac{0,707}{0,707} = -1 \quad (5)$$

$$(5) \text{ dans } (1) : b_6 = 1 \cos \alpha = 0,707$$

Nœud B



$$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow b_5 + R_B + 1 \cos \alpha = 0 \Rightarrow b_5 = -\cos \alpha = -0,707$$

Calcul de la flèche

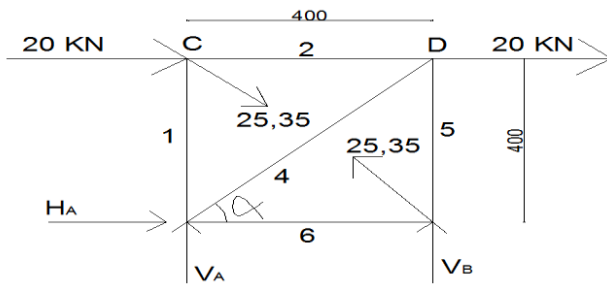
BARRE	L	N	n	N * n * L	n ² L
1	4	0	0,707	0	1,999
2	4	- 20	- 0,707	56,56	1,999
3	5,6	0	1	0	5,6
4	5,6	56,6	- 1	- 316,96	5,6
5	4	- 40	- 0,707	113,12	1,999
6	4	0	0,707	0	1,999
			Σ	486,68	19,196

$$\text{Déflexion réelle : } \Delta P = \frac{N n L}{EA} = \frac{486,64}{EA}$$

$$\text{Déflexion fictive : } \Delta q = \frac{n^2 L X}{EA} = \frac{19,196 X}{EA}$$

$$\text{On aura : } \Delta P + \Delta q = 0 \Rightarrow \frac{486,64}{EA} + \frac{19,196 X}{EA} = 0 \Rightarrow X = 25,35 \text{ KN}$$

La structure devient :



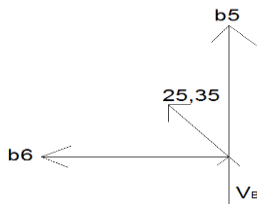
$$\Sigma F_X = 0 \Rightarrow H_A + 20 + 20 + 25,35 \cos \alpha - 25,35 \cos \alpha = 0 \Rightarrow H_A = 40 \quad (1) \quad \Sigma F_Y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - 25,35 \cos \alpha + 25,35 \cos \alpha = 0 \Rightarrow R_A = -R_B \quad (2)$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \odot 20 * 4 + 20 * 4 + 25,35 \cos \alpha * 4 - 25,35 \cos \alpha * 4 - 4 R_B = 0$$

$$\Rightarrow R_B = 40 \quad (3)$$

$$(3) \text{ dans } (2) : R_A = -40$$

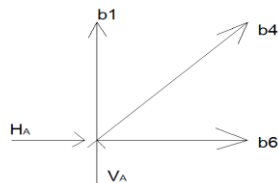
Nœud B



$$\Sigma F_X = 0 \Rightarrow -b_6 - 25,35 \cos \alpha = 0 \Rightarrow b_6 = -17,92$$

$$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow b_5 + R_B + 25,35 \cos \alpha = 0 \Rightarrow b_5 = -40 - 17,92 = -57,92$$

Nœud A



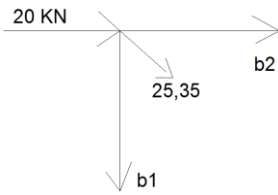
$$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow b_1 + b_4 \cos \alpha + R_A = 0 \Rightarrow b_1 = 40 - 0,707 b_4 \quad (1)$$

$$\Sigma F_X = 0 \Rightarrow H_A + b_6 + b_4 \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow b_4 = \frac{-H_A - b_6}{\cos \alpha} = \frac{-40 + 17,92}{0,707} = -31,23 \quad (2)$$

$$(2) \text{ dans } (1) : b_1 = 40 - 0,707(-31,23) = 62$$

Nœud C



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow b_2 + 20 + 25,35 \cos \alpha = 0 \Rightarrow b_2 = -37,9$$

RESUME

N°	LONGUEUR	VALEUR	SIGNE	NATURE
1	4 m	62 KN	+	TRACTION
2	4 m	37,9 KN	-	COMPRESSION
3	5,6 m	25,35 KN	+	TRACTION
4	5,6 m	31,23 KN	-	COMPRESSION
5	4 m	57,92 KN	-	COMPRESSION
6	4 m	17,92 KN	-	COMPRESSION

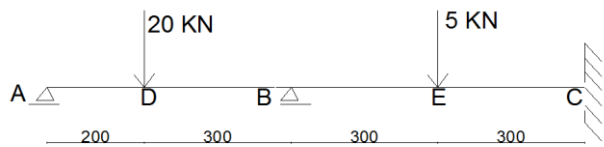
E. METHODE DE TRAVAIL MIMIMUM

Dans cette méthode, nous allons considérer les réactions des appuis surabondantes comme inconnues. On aura des équations à résoudre qui correspondront au nombre des inconnues qui sont les réactions d'appui surabondantes.

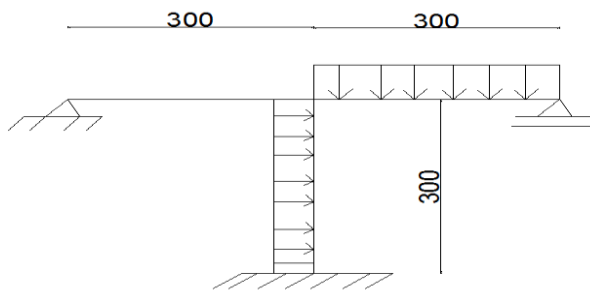
$$\frac{\partial M_i}{\partial R_i} = \int_0^L M * \frac{\partial M}{\partial R} : \text{Le théorème de la méthode du travail minimum}$$

EXERCICES

Exemple 1. Calculer les réactions d'appui surabondantes de la poutre suivante



Exemple 2. Faite l'étude complète de cette structure



RESOLUTION

Exemple 1.

Appui A = 1 réaction

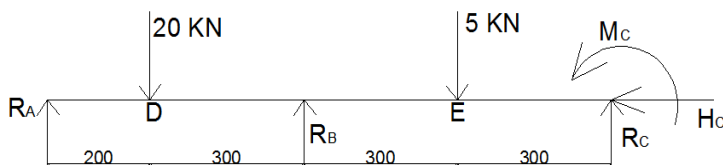
Appui B = 1 réaction

Appui C = 3 réactions

Somme = 5 réactions – 3 équations d'équilibre statique = 2

D'où la poutre est 2 fois hyperstatique.

Nous remplaçons R_A et R_B comme des inconnues



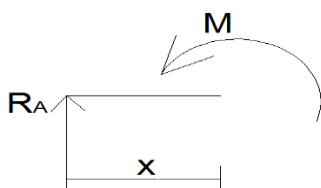
$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_C = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow R_A + R_B + R_C - 25 = 0 \Rightarrow R_C = 25 - R_A - R_B \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \curvearrowleft - M_C + 20 * 2 - 5R_B + 5 * 8 - 11R_C = 0$$

$$M_C = 40 - 5R_B + 40 - 11(25 - R_A - R_B) = -195 + 6R_B + 11R_A$$

Zone AD : $0 \leq x \leq 2$



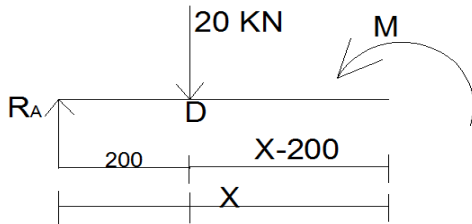
$$M - R_A X = 0 \Rightarrow M = R_A X$$

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = X \text{ et } \frac{\partial M}{\partial R_B} = 0$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial R_A} = R_A X^2$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial R_B} = 0$$

Zone DB : $2 \leq x \leq 5$



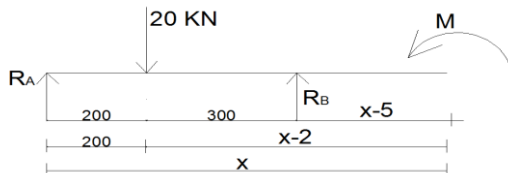
$$M + 20(X - 2) - R_A X = 0 \Rightarrow M = R_A X + 40 - 20X$$

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = X \text{ et } \frac{\partial M}{\partial R_B} = 0$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial R_A} = (R_A X + 40 - 20X) * X = R_A X^2 + 40X - 20X^2$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial R_B} = 0$$

Zone BE : $5 \leq x \leq 8$



$$M - R_B(X - 5) + 20(X - 2) - R_A X = 0$$

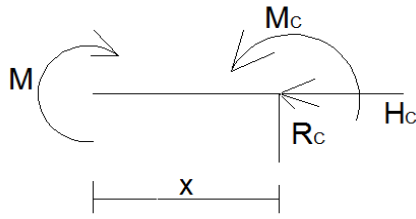
$$M - R_B X + 5R_B + 20 - 40 - R_A X = 0 \Rightarrow M = R_B X + R_A X - 5R_B + 20$$

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = X \text{ et } \frac{\partial M}{\partial R_B} = X - 5$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial R_A} = R_B X^2 + R_A X^2 - 5X R_B + 20$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial R_B} = R_B X^2 + R_A X^2 - 5X R_B + 20X - 5R_B X - 5R_A X + 25R_B - 100$$

Zone CE : $0 \leq x \leq 3$



$$M - M_C - R_C X = 0 \Rightarrow M = M_C + R_C X$$

$$M = 25X - R_A X - R_B X - 195 + 6R_B + 11R_A$$

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = -X + 11 \text{ et } \frac{\partial M}{\partial R_B} = -X + 6$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial R_A} = -25X^2 + R_A X^2 + R_B X^2 + 470X - 17R_B X - 22R_A X - 2145 + 66R_B + 121R_A$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial R_B} = -25X^2 + R_A X^2 - 5R_B X^2 + 345X - 5R_A X - 6R_B X - 1170 + 36R_B + 66R_A$$

On aura :

- $\frac{\partial M}{\partial R_A} = \Sigma \int_a^b M * \frac{\partial M}{\partial R_A} = \int_0^2 (R_A X^2) dx + \int_2^5 (R_A X^2 + 40X - 20X^2) dx + \int_5^8 (R_B X^2 + R_A X^2 - 5XR_B + 20) dx +$

$$\int_0^3 (-25X^2 + R_A X^2 + R_B X^2 + 470X - 17R_B X - 22R_A X - 2145 + 66R_B + 121R_A) dx$$

Après résolutions de ces intégrales on aura :

$$= 442 R_A + 102 R_B - \frac{17475}{6} \quad (1)$$

- $\frac{\partial M}{\partial R_B} = \Sigma \int_a^b M * \frac{\partial M}{\partial R_B} = \int_0^2 (0) dx + \int_2^5 (0) dx + \int_5^8 (R_B X^2 + R_A X^2 - 5XR_B + 20X - 5R_B X - 5R_A X + 25R_B - 100) dx +$

$$\int_0^3 (-25X^2 + R_A X^2 - 5R_B X^2 + 345X - 5R_A X - 6R_B X - 1170 + 36R_B + 66R_A) dx$$

Après résolutions de ces intégrales, on aura : $\frac{9}{2} R_A + \frac{1485}{2}$

Posons : $\frac{\partial M}{\partial R_A} = 0$ et $\frac{\partial M}{\partial R_B} = 0$ pour résoudre le système d'équation

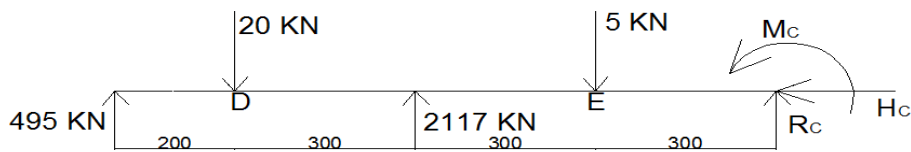
$$442 R_A + 102 R_B - \frac{17475}{6} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{9}{2} R_A + \frac{1485}{2} = 0 \quad (2)$$

Après résolutions du système d'équation, nous avons le résultat suivant

$R_A = 495 \text{ KN}$ et $R_B = 2117 \text{ KN}$

La structure devienne comme suite :



F. THEOREME DE MENABREA

Le théorème de Menabrea s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{\partial W}{\partial R_i} = \int \frac{M}{EI} * \frac{\partial M}{\partial R_i} dx = 0$$

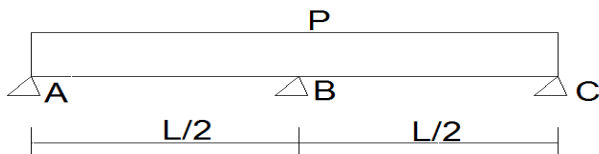
Ce théorème nous aide à trouver les réactions aux appuis surabondants

NB : - Ce théorème découle du théorème de Castigliano

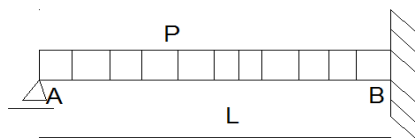
- On considère les appuis surabondants comme les inconnues

EXERCICES

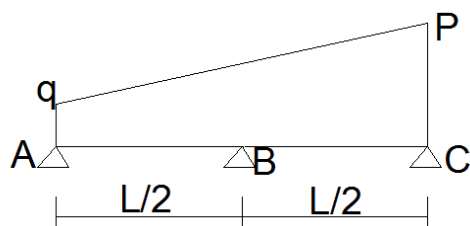
Exemple 1. Calculer les réactions aux appuis de cette poutre



Exemple 2. Calculer les réactions aux appuis

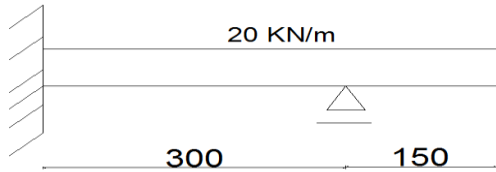


Exemple 3. Calculer les réactions d'appuis de la poutre suivantes

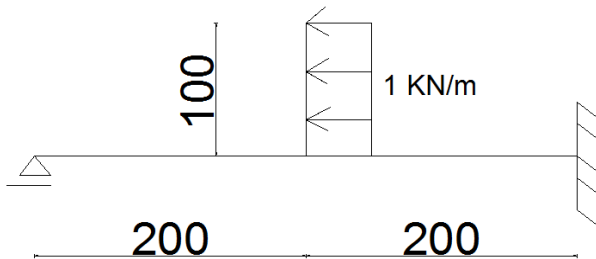


Exemple 4. Dimensionner la poutre suivante

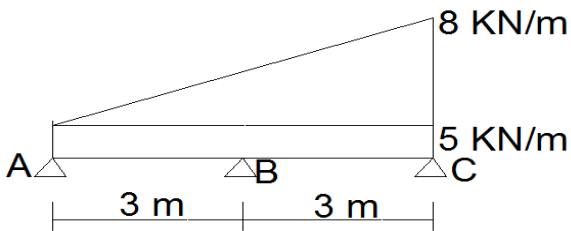
$$\tau_{adm} = 70 \frac{KN}{cm^2} \text{ et } \sigma_{adm} = 200 \frac{KN}{cm^2}$$



Exemple 5. Tracer le diagramme de la poutre suivante



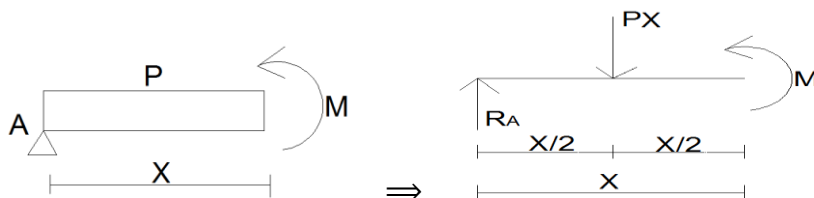
Exemple 6. Calculer les réactions d'appuis



REPONSES

Exemple 1.

Zone AB : $0 \leq X \leq \frac{l}{2}$



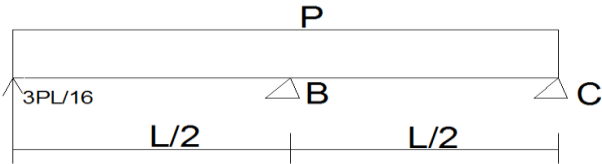
$$M + PX * \frac{X}{2} - R_A X = 0 \Rightarrow M = -\frac{PX^2}{2} + R_A X \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial R_A} = X$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial R_A} = R_A X^2 - \frac{PX^3}{2}$$

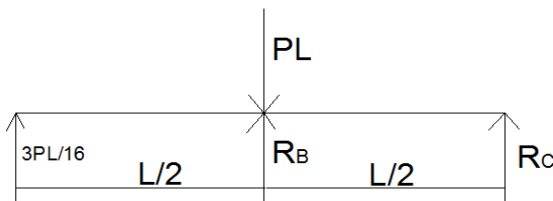
$$\frac{\partial W}{\partial R_i} = \int_0^L (M * \frac{\partial M}{\partial R_A}) dx = \int_0^L (R_A X^2 - \frac{P X^3}{2}) dx = \frac{R_A L^3}{24} - \frac{P L^4}{128}$$

Posons : $\frac{\partial W}{\partial R_i} = 0 \Rightarrow \frac{R_A L^3}{24} - \frac{P L^4}{128} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{3 P L}{16}$

Donc la structure devient :



$F = PL$ et $X = L/2$



$$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow R_A + R_B + R_C - PL = 0 \Rightarrow R_B = PL - R_C - \frac{3PL}{16} = \frac{13PL}{16} - R_C \quad (1)$$

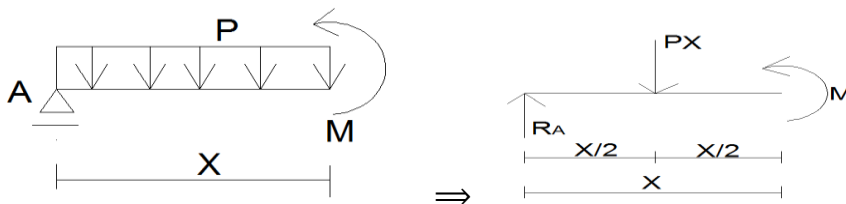
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \curvearrowright - \frac{L}{2} R_B + PL * \frac{L}{2} - L R_C = 0 \Rightarrow R_C = -\frac{1}{2} R_B + \frac{PL}{2} \quad (2)$$

$$(2) \text{ dans } (1) : R_B = \frac{13PL}{16} + \frac{1}{2} R_B - \frac{PL}{2} \Rightarrow R_B = \frac{5PL}{8} \quad (3)$$

$$(3) \text{ dans } (2) : R_C = -\frac{1}{2} * \frac{5PL}{8} + \frac{PL}{2} = \frac{3PL}{16}$$

Exemple 2.

Zone AB : $0 \leq X \leq L$



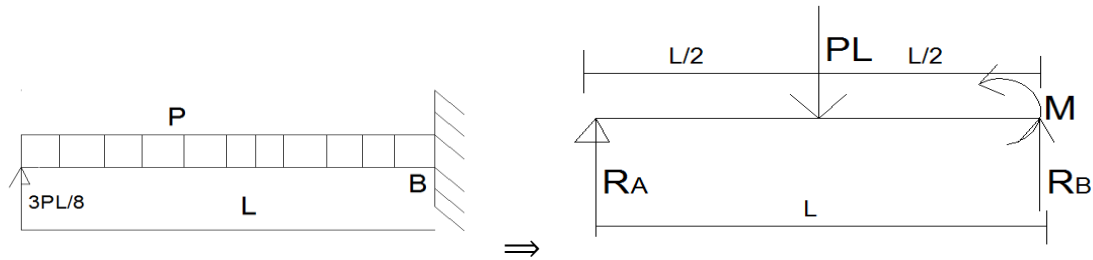
$$M + PX * \frac{X}{2} - R_A X = 0 \Rightarrow M = -\frac{P X^2}{2} + R_A X \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial R_A} = X$$

$$M * \frac{\partial M}{\partial R_A} = R_A X^2 - \frac{P X^3}{2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial R_i} = \int_0^L (M * \frac{\partial M}{\partial R_A}) dx = \int_0^L (R_A X^2 - \frac{P X^3}{2}) dx = \frac{R_A L^3}{3} - \frac{P L^4}{8}$$

Posons : $\frac{\partial W}{\partial R_i} = 0 \Rightarrow \frac{R_A L^3}{3} - \frac{PL^4}{8} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{3PL}{8}$

Nous aurons :



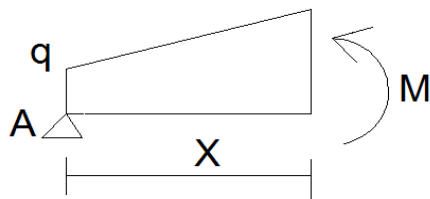
$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - PL = 0 \Rightarrow R_B = PL - \frac{3PL}{8} = \frac{5PL}{8}$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -M_B + \frac{PL^2}{2} - LR_B = 0 \Rightarrow M_B = LR_B - \frac{PL^2}{2} = L * \frac{5PL}{8} - \frac{PL^2}{2} = \frac{PL^2}{8}$

Exemple 3. On sait que : $Y(\alpha) = \frac{P\alpha}{L} - \frac{q\alpha}{L} + q$ (cfr chapitre 3 charge trapézoïdale)

$R = (P + q) \frac{L}{2}$ et $X_G = \frac{(2P + q)}{P + q} * \frac{L}{3}$

Zone AB : $0 \leq X \leq L/2$



$M = R_A X - \int_0^X Y(\alpha)(X - \alpha) d\alpha = \int_0^X (\frac{P\alpha}{L} - \frac{q\alpha}{L} + q)(X - \alpha) d\alpha$

$M = \int_0^X (\frac{P\alpha X}{L} - \frac{q\alpha X}{L} + qX - \frac{P\alpha^2}{L} + \frac{q\alpha^2}{L} - q\alpha) d\alpha$

$M = R_A X - \frac{PX^3}{6L} + \frac{qX^3}{6L} - \frac{qX^2}{2}$ et $\frac{\partial M}{\partial R_A} = X$

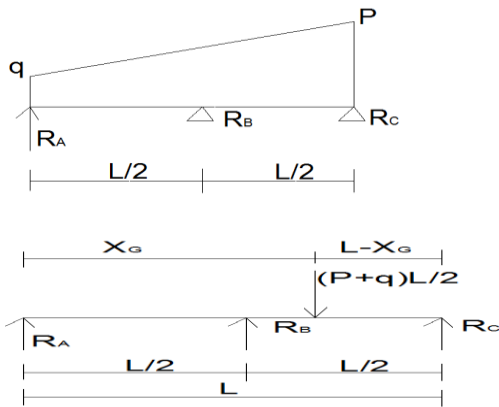
$M * \frac{\partial M}{\partial R_A} = R_A X^2 - \frac{PX^4}{6L} + \frac{qX^4}{6L} - \frac{qX^3}{2}$

$\frac{\partial W}{\partial R_i} = \int_0^L (M * \frac{\partial M}{\partial R_A}) dx = \int_0^L (R_A X^2 - \frac{PX^4}{6L} + \frac{qX^4}{6L} - \frac{qX^3}{2}) dx$

$\frac{\partial W}{\partial R_i} = \frac{R_A L^3}{24} - \frac{PL^4}{960} - \frac{13qL^4}{1920}$

Posons $\frac{\partial W}{\partial R_i} = 0 \Rightarrow \frac{R_A L^3}{24} - \frac{PL^4}{960} - \frac{13qL^4}{1920} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{PL}{40} + \frac{13qL}{80}$

La structure devient :



$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow R_A + R_B + R_C - \frac{PL}{2} - \frac{qL}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{PL}{40} + \frac{13qL}{80} + R_B + R_C - \frac{PL}{2} - \frac{qL}{2} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{19PL}{40} + \frac{27qL}{80} - R_C \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \odot - \frac{L}{2} R_B + \left(\frac{PL}{2} + \frac{qL}{2} \right) * \left(\frac{2PL + qL}{3P + 3q} \right) - LR_C = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{L}{2} R_B + \frac{P^2 L^2}{3P + 3q} + \frac{q^2 L^2}{6P + 6q} + \frac{PqL^2}{2P + 2q} - LR_C = 0 \quad (2)$$

$$(1) \text{ dans } (2) : -\frac{L}{2} \left(\frac{19PL}{40} + \frac{27qL}{80} - R_C \right) + \frac{P^2 L^2}{3P + 3q} + \frac{q^2 L^2}{6P + 6q} + \frac{PqL^2}{2P + 2q} - LR_C = 0$$

$$\Rightarrow R_C = -\frac{19PL}{40} - \frac{27qL}{80} + \frac{2P^2 L}{3P + 3q} + \frac{q^2 L}{3P + 3q} + \frac{PqL}{P + q} \quad (3)$$

$$(3) \text{ dans } (1) : R_B = \frac{19PL}{40} + \frac{27qL}{80} + \frac{19PL}{40} + \frac{27qL}{80} - \frac{2P^2 L}{3P + 3q} - \frac{q^2 L}{3P + 3q} - \frac{PqL}{P + q}$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{19PL}{20} + \frac{27qL}{40} - \frac{2P^2 L}{3P + 3q} - \frac{q^2 L}{3P + 3q} - \frac{PqL}{P + q}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. OUVRAGE

- François Frey, Traiter de génie civil
- Nouredine Bourahla, Résistance des matériaux de base
- William A. Nash, Série Schaum de résistance des matériaux 1
- Jean Louis Fancon , Guide de mécanique
- Mécanique des structures
- A. Kadi, Mécanique rationnelle
- Résistance des matériaux Timoshenko tome 1 et 2
- Jean-Claude Doubrère, Résistance des matériaux cours et exercices corrigés
- **OTEMAKUMI LOTENGO MERLIN (OLM SUPREME)**. Guide du cours de la statique appliquée (principes et méthodes de calcul), le 27/07/2017. KINSHASA
- Formulaire de RDM

2. COURS

- Mafuta, Cours de stabilité des constructions. INBTP/BTP3, 2015
- Mbuyamba, Cours de résistance des matériaux. INBTP/BTP2, 2014
- Bidashima, Cours de complément de calcul des structures. INBTP/BTP4, 2016

3. COURS D'ENCADREMENT

- Moke Emmanuel Mbenga. Cours de la R.D.M, INBTP/KINSHASA
- Mukinayi Mukendi Joel. Cours de la R.D.M, INBTP/KINSHASA
- Gustave Cyani. Cours de la R.D.M, KINSHASA

TABLE DES MATIÈRES

guide pour la comprehension de la resistance des materiaux	0
avant propos	2
note aux utilisateurs	4
preface	5
conversion des unites	6
chap 1. caracteristiques geometriques des sections plane.....	7
1.1 définition :.....	7
1.2 but	7
1.3 surface	7
1.4 moment statique	8
1.5 centre de gravité (c.g) ou centre d’inertie ou centre de masse	8
1.5.1 définition :	8
exercices	11
resolutions	11
1.6 moment d’inertie (moment quadratique)	12
1.7 produit d’inertie.....	14
1.8 moment d’inertie polaire	15
1.9 les formules dérivées	16
1.9.1 principe des axes parelles.....	16
1.9.2 direction des axes principaux.....	18
1.9.3 moment d’inertie principale	20
1.9.4 rayon de giration	20
1.9.5 module de flexion	20
1.9.6 noyau central	21
1.9.7 ellipse d’inertie.....	21
chap 2 notions des contraintes	23
2.1 définition	23
2.2. notion de contrainte	24
2.3 coupure, facette et vecteur contrainte	24
2.4 contrainte normale (σ) et contrainte tangentielle (t)	24
2.5 equilibre du cube	25

2.6 formule de cauchy : tenseur des contraintes ou contrainte sur un plan inclinaut..... 26

2.7 equilibre du parallélépipède élémentaire 27

2.8 distributions des contraintes autour d'un point 28

2.9 cercle de mohr 31

 2.9.1 définition : 31

 2.9.2 tracé du cercle de mohr..... 31

contraintes dans le sol 37

applications 37

chapitre 3. etudes des structures isostatiques 43

 3.1 generalites 43

 1. verification de l'isostaticite 44

 2. schema du corps rendu libre (scl) ou schema du corps isolee..... 45

 2.1. la resultante 46

 2.2 centre de gravite 49

 3. calcul des reactions..... 50

 4. efforts interieurs 56

 5. diagramme..... 58

 questions 65

chapitre 4. traction et compression..... 66

 définition :..... 67

 but : 68

 barreau ou pièce chargé axialement..... 68

 contrainte normale 68

 déformation normale..... 68

 contrainte 69

 diagramme de déformation..... 69

 quelques matériaux et leurs caractéristiques 70

 exercices 71

chapitre 5. flexion simple et pure 75

 5.1 definition 75

 5.2 contrainte normale de flexion (σ)..... 75

 5.3 contrainte de cisaillement en flexion (τ)..... 76

exercices 76

chapitre 6. cisaillement..... 80

6.1 definition 80

6.2 contrainte de cisaillement..... 80

definition : 80

6.3 contrainte de resistance au cisaillement..... 81

exercices 83

chapitre 7. torsion..... 85

7.1 definiton 85

7.2 moment d’inertie polaire 85

7.3 deformation de cisaillement 86

7.4 contrainte de cisaillement en torsion (τ) 87

exercices 88

cas des sections variables 90

chapitre 8. flambement 99

8.1 definition **Erreur ! Signet non défini.**

8.2 charge critique d’euler : *FCR ou PCR* 99

8.3 contrainte critique d’euler (flambement).....101

8.4 critere de dimensionnement 103

8.4.1 poutre ou colonne en acier 103

8.4.2 poutre ou poteau en alliage d’aluminium 103

8.4.3 poutre ou poteau en bois..... 103

exercices 104

chapitre 9 flexion composee 108

9.1 definition 108

9.2 les sollicitations qui peuvent engendrer la flexion composee 108

9.3 contrainte 109

exercices 110

chapitre 10 flexion deviee 117

10.1. définition 117

10.2 contrainte..... 117

exercices 118

chapitre 11. deformation (fleche et rotation) 121

- 11.1 definition.....121
- 11.2. but.....121
- 11.3. deformation (fleche et rotation)121
 - 11.3.1. fleche ou deflexion ou déplacement vertical (f ou Δ ou y)121
 - 11.3.2. rotation ou pente ou deviation (θ)121
- 11.4. methode de double integrale ou methode de l'equation differentielle 122
 - exercices 123
- 11.5. methode de castigliano130
- 11.6 methode de travail virtuel 138
- 11.7 travail reel ou travail et energie 145
- 11.8 methode de moment secondaire methode de la poutre conjuguee..... 148
- 11.9 methode simplifiee ou methode geometrique ou methode par l'aire de moment ou theoreme de moment de surface 153
- 11.10 methode de bresse 157
- 11.11 methode de superposition 160
- 11.12 dimensionnement a l'aide des deformations 162
- chapitre 12. systeme hyperstatique..... 164
 - 12.1 définition 164
 - b. methode des fleches 169
 - c. methode des deformations.....171
 - d. treillis hyperstatique 178
 - e. methode de travail mimimum 183
 - f. theoreme de menabrea 187
- Bibliographie 192
- Table des matieres 193